Bevezetlés a bonyolultságelméletbe gyakorlatok I.

1.* **Az Ackermann függvény** *avagy nem minden olyan egyszerű, mint amilyennek látszik*
Legyen $A(x, y)$ a következő, rekurzív módon definiált függvény:

$$\begin{aligned} A(0,y) &:= y+1 && y \geq 0 \\ A(x,0) &:= A(x-1,1) && x \geq 1 \\ A(x,y) &:= A(x-1, A(x,y-1)) && x,y \geq 1 \end{aligned}$$

Határozzuk meg (akárhogy: fejben, papíron, számítógépen, kompjúteralgebrai programmal, stb.) A(4,2) és A(5,1) értékét.

2. Tegyük fel, hogy egy számítógép a TSP problémát az összes lehetséges ($\frac{1}{2}(n-1)!$) körút előállításával oldja meg, mindegyik körút elemzésére $n \cdot 5 \cdot 10^{-5}$ másodperc időt fordítva. Körülbelül mennyi ideig tart így a feladat megoldása $n = 10, 14, 18, 22$ város esetén? Megkönnyítené a dolgunkat, ha egy egymilliószor gyorsabb ,,szuperszámítógép" állna rendelkezésünkre?

3. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy $k = 1000$ méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. beszerzünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén (a) n-nel; (b) n^3-bel; (c) 2^n-nel arányos?

4. **Papadimitriou 1.4.9.** Mutassuk meg, hogy minden $p(n)$ polinomhoz és c konstanshoz létezik egy n_0 egész szám úgy, hogy $n \geq n_0$ estén $2^{cn} \geq p(n)$. Határozzuk meg n_0 értékét, ha (a) $p(n) = n^2$ és $c = 1$; (b) ha $p(n) = 100n^{100}$ és $c = \frac{1}{100}$.

5. (**Papadimitriou 1.4.10. alapján**) Legyen $f(n)$ és $g(n)$ valamelyik kettő az alábbi függvények közül. Döntsük el, hogy teljesül-e
(i) $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$; (ii) $f(n) = \Omega(g(n))$; (iii) $f(n) = \Theta(g(n))$.

a) n^2
b) n^3
c) $3n^2 + 2n$
d) $n^2 \log n$
e) 2^n
f) 3^n
g) 2^{n+1}
h) n^n
i) $n^{\log n}$
j) 2^{2^n}
k) $2^{2^{n+1}}$
l) $\begin{cases} n^2 & \text{ha } n \text{ páratlan,} \\ 2^n & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

Rajzoljuk meg azt az irányított gráfot, melynek csúcsai a felsorolt függvények, és f-ből g-be pontosan akkor vezet él, ha $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$. Az áttekinthetőség kedvéért hagyjuk el azokat az éleket, amelyek a megmaradó élekből az $\mathcal{O}$ reláció tranzitivitása miatt következnek.

6. Bizonyítsuk be, hogy $\mathcal{O}$, Ω és Θ relációk reflexív és tranzitív tulajdonságát.

7. Legyenek $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvények. Igaz-e, hogy
a)
$$f(n) + g(n) = \mathcal{O}(\max\{f(n), g(n)\}), \text{ ahol}$$
$$\max\{f(n), g(n)\} = \begin{cases} f(n), & \text{ha } f(n) \geq g(n) \\ g(n), & \text{ha } f(n) < g(n) \end{cases}$$
b)
$$f(n) + g(n) = \Theta(\min\{f(n), g(n)\}), \text{ ahol min definíciója hasonló.}$$

8. Igazak-e az alábbi állítások minden $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ függvényre? Válaszát bizonyítsa!
a) $f(n) = \mathcal{O}(f^2(n))$
b) $f(n) = \Theta(f(n)/2)$
c) $\min\{f(n), g(n)\} = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$

9.* **Sivatagi-show** Eltévedtünk a sivatagban, mitöbb az ivóvizünk is elfogyott, de nagy nehezen kivergődtünk egy kelet-nyugati irányú egyenes útra. Biztos, hogy az úton valamelyik irányban x km távolságra találunk kutat (tegyük fel, hogy x pozitív egész szám). Csak az a probléma, hogy sem x-et, sem a megfelelő irányt nem ismerjük. Szorult helyzetünkben tervezzünk olyan algoritmust, mely segítségével legfeljebb $C \cdot x$ km gyaloglással biztonan megtaláljuk a kutat, ahol C egy pozitív konstans. Mekkora lehet az algoritmusunkra C minimális értéke? (Természetesen a legrosszabb esetet figyelembe véve.)