

## Bonyolultságelmélet gyakorlatok II.

1. Adjunk meg olyan Turing-gépet<sup>1</sup>, mely csupa  $A$  és  $B$  betűt tartalmazó szavakon dolgozik, mégpedig úgy, hogy az  $A$  betűket  $B$  betűkre a  $B$ -ket pedig  $A$ -kra cseréli.
2. Adjunk meg olyan Turing-gépet<sup>1</sup>, mely az  $M(x) = \sqcup x$  függvényt számítja ki, de (ellentétben az órai példával) csak egyszer halad végig a szón ( $x \in \{0, 1\}^*$ ).
3. Adjunk meg olyan egyszalagos Turing-gépet<sup>1</sup>, melyek a következő függvényeket valósítják meg:
  - a) unáris növelést, azaz  $M(I^k) = I^{k+1}$ .
  - b) unáris összeadást, azaz  $M(I^k c I^l) = I^{k+l}$ .
  - c) 2-vel való szorzást, azaz  $M(I^k) = I^{2k}$ .
  - d) 3-mal való szorzást, azaz  $M(I^k) = I^{3k}$ .
  - e) 2-vel való maradékos osztást, azaz  $M(I^k) = I^{k \bmod 2}$ .
4. Mutassuk meg, hogy minden  $M$  Turing-géphez létezik olyan, vele ekvivalens (azaz ugyanazt a függvényt megvalósító),  $M'$  Turing-gép, mely működését mindig a szó elején, a  $\triangleright$  karakteren fejezi be. Konstruáljuk meg  $M'$ -t a 2. példa  $M$  Turing-gépjéhez.
5. Konstruáljunk, olyan Turing-gépet<sup>1</sup>, melyek a következő nyelveket ismerik fel:
  - (a)  $\{a^{2^n} \mid n \geq 1\}$
  - (b)  $\{a^{2^n} \mid n \geq 1\}$
  - (c)  $\{a^i b^j \mid i < j\}$
  - (d)  $\{a^i b^j \mid i \geq j\}$
  - (e)  $\{w \in \{a, b\}^* \mid w\text{-ben ugyanannyi } a \text{ betű van mint } b\}$
  - (f)  $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$
6. Adjunk meg olyan egyszalagos Turing-gépet, mely egy  $\{0, 1\}$  feletti szóból az összes 0-t törli. Szóközök ne maradjanak az eredményben, hanem a maradék egyeseket mozgassuk balra.
- 7\* Konstruáljunk olyan egyszalagos Turing-gépet, mely a szalagjára írt  $\{0, 1\}$  feletti szavakat megfordítja. Például  $\triangleright 0010111$ -ből  $\triangleright 1110100$ -t készít.
8. Valósítsuk meg a  $\{0, 1\}$  feletti szavak megfordítását kétszalagos Turing-géppel. (Ugye mennyivel könnyebb!)
9. Adjunk meg<sup>1</sup> olyan kétszalagos a) determinisztikus; b) nemdeterminisztikus Turing gépet, mely a  $L = \{\triangleright w w \mid w \in \{a, b\}^*\}$  nyelvet ismeri fel. (lehetőleg minél kevesebb állapot felhasználásával.)
10. Készítsünk olyan többszalagos Turing-gépet, mely az  $L = \{I^{2^k} \mid k \geq 0\}$  nyelvet dönti el.
11. Készítsünk olyan többszalagos Turing-gépet, mely az unáris szorzást valósítja meg, azaz  $M(I^k X I^l) = I^{k \cdot l}$ .
12. Vázzuk meg egy olyan többszalagos Turing-gép működését, mely az unáris hatványozást valósítja meg, azaz  $M(I^k \uparrow I^l) = I^{k^l}$ .
13. Készítsünk olyan  $M$  háromszalagos determinisztikus Turing-gépet, melynek ábécéje  $\Sigma = \{0, 1, \triangleright, \triangleleft, ;, \# \}$  és a következőképpen működik

$$M(\underbrace{\triangleright x_1; y_1 \# x_2; y_2 \# \dots \# x_n; y_n}_{1. \text{ szalag}}, \underbrace{z}_{2. \text{ szalag}}) = \underbrace{\begin{cases} y_i, & \text{ha } \exists i : z = x_i \text{ és } \forall j < i \ x_j \neq z \\ \lambda, & \text{ha } \nexists i : z = x_i \end{cases}}_{3. \text{ szalag}}$$

- 14\* Adjunk meg esetleg több szalagos determinisztikus Turing-gépet az alábbi nyelvek eldöntésére. Ellenőrizzük megoldásunk helyességét a Binghamtoni Egyetem Turing-gép szimulátor programjával: (<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth/bonyelm.html>)
  - a)  $\{xyx \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ és } |x| \geq 1\}$
  - b)  $\{xy \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ és } x\text{-ben ugyanannyi } a \text{ betű van mint } y\text{-ban}\}$
  - c)  $\{xy \mid x, y \in \{a, b\}^* \text{ és } x\text{-ben nem ugyanannyi } a \text{ betű van mint } y\text{-ban}\}$
  - d)  $\{a^i b^j c^j d^i \mid i \neq j\}$
  - e)  $\{aba^2 b^2 a^3 b^3 \dots a^n b^n \mid n \geq 0\}$

<sup>1</sup>Adja meg a Turing gép programját, átmenet diagramját, és röviden magyarázza is el a működését, pl. mi az egyes állapotok szerepe

15. Milyen konfigurációkon megy keresztül az alábbi Turing-gép az  $(s, \triangleright, abaa)$  valamint az  $(s, \triangleright, abab)$  konfigurációból indítva? Rajzoljuk meg a gép átmenet diagramját és írjuk le az által felismert nyelvet.

$q \in Q$	$\sigma \in \Sigma$	$\delta(q, \sigma)$
$s$	$\triangleright$	$(q_0, \triangleright, \rightarrow)$
$q_0$	$a$	$(q_1, A, \rightarrow)$
$q_0$	$b$	$(q_1, B, \rightarrow)$
$q_0$	$A$	$(q_4, A, \leftarrow)$
$q_0$	$B$	$(q_4, B, \leftarrow)$
$q_0$	$\sqcup$	$(igen, \sqcup, -)$
$q_1$	$a$	$(q_1, a, \rightarrow)$
$q_1$	$b$	$(q_1, b, \rightarrow)$
$q_1$	$A$	$(q_2, A, \leftarrow)$
$q_1$	$B$	$(q_2, B, \leftarrow)$
$q_1$	$\sqcup$	$(q_2, \sqcup, \leftarrow)$
$q_2$	$a$	$(q_3, A, \leftarrow)$
$q_2$	$b$	$(q_3, B, \leftarrow)$
$q_3$	$a$	$(q_3, a, \leftarrow)$
$q_3$	$b$	$(q_3, b, \leftarrow)$
$q_3$	$A$	$(q_0, A, \rightarrow)$
$q_3$	$B$	$(q_0, B, \rightarrow)$
$q_4$	$A$	$(q_4, a, \leftarrow)$
$q_4$	$B$	$(q_4, b, \leftarrow)$
$q_4$	$\triangleright$	$(q_5, \triangleright, \rightarrow)$
$q_5$	$a$	$(q_7, A, \rightarrow)$
$q_5$	$b$	$(q_6, B, \rightarrow)$
$q_5$	$\sqcup$	$(igen, \sqcup, -)$
$q_6$	$a$	$(q_6, a, \rightarrow)$
$q_6$	$b$	$(q_6, b, \rightarrow)$
$q_6$	$B$	$(q_8, \sqcup, \leftarrow)$
$q_6$	$\sqcup$	$(q_6, \sqcup, \rightarrow)$
$q_7$	$a$	$(q_7, a, \rightarrow)$
$q_7$	$b$	$(q_7, b, \rightarrow)$
$q_7$	$A$	$(q_8, \sqcup, \leftarrow)$
$q_7$	$\sqcup$	$(q_7, \sqcup, \rightarrow)$
$q_8$	$a$	$(q_8, a, \leftarrow)$
$q_8$	$b$	$(q_8, b, \leftarrow)$
$q_8$	$A$	$(q_5, A, \rightarrow)$
$q_8$	$B$	$(q_5, B, \rightarrow)$
$q_8$	$\sqcup$	$(q_8, \sqcup, \leftarrow)$