

Bonyolultságelmélet gyakorlatok V.

1. Legyen 3SATKÜL a következő probléma: Adott egy φ konjunktív normálformájú, tagonként pontosan három különböző változót tartalmazó formula, döntsük el, hogy kielégíthető-e. Mutassuk meg, hogy 3SATKÜL NP-teljes.
2. Legyen SAT LEGFELJEBB HÁROMSZOR a következő probléma: Adott egy φ konjunktív normál formájú formula, melyben minden változó legfeljebb háromszor fordul elő, döntsük el, hogy kielégíthető-e. Mutassuk meg, hogy SAT LEGFELJEBB HÁROMSZOR NP-teljes.
3. NP-teljes-e SAT azon speciális esete, melyben minden tag vagy Horn-tag, vagy csak két literált tartalmaz?
4. Legyen MAX-2SAT a következő probléma, adott egy φ formula, mely 2SAT egy példánya és egy $K > 0$ egész szám. Döntsük el, hogy van-e a változóknak olyan kiértékelése, amely esetén φ -nek legalább K darab tagja igaz. Mutassuk meg, hogy MAX-2SAT NP-teljes.
5. Legyen $0 \leq p \leq 100$ rögzített. Legyen $p\%$ -SAT a következő probléma: adott egy konjunktív normálformájú formula, van-e a változóknak olyan kiértékelése, mely a tagok legalább $p\%$ -át igazgá teszi. Igazoljuk, hogy
 - (a) $p \leq 50$ esetén $p\%$ -SAT triviális (a válasz mindig „igen”)
 - (b) $p > 50$ esetén $p\%$ -SAT NP-teljes.
6. Legyen 3-SZÍNEZÉS a következő probléma: Adott egy irányítatlan gráf, kiszínezhetők-e a csúcsai legfeljebb három színnel úgy, hogy szomszédos csúcsok nem legyenek azonos színűek. Mutassuk meg, hogy 3-SZÍNEZÉS NP-teljes. (Ld. Papadimitriou könyv, 228. o.)
7. Legyen LEGHOSSZABB ÚT a következő probléma. Adott egy G irányítatlan gárf és egy $K \geq 0$ egész szám. Kérdés, hogy létezik-e G -ben legalább K hosszúságú út. Mutassuk meg, hogy LEGHOSSZABB ÚT NP-teljes.
8. Legyen RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS a következő probléma. Adott G_1 és G_2 irányítatlan gárfok esetén döntsük el, hogy van-e G_1 -nek G_2 -vel izomorf részgárfja. Mutassuk meg, hogy RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS NP-teljes.
9. Legyen HAMILTON-KÖR a következő probléma. Adott G irányított gárf, van-e benne olyan kör, mely minden csúcsot pontosan egyszer érint. Mutassuk meg, hogy HAMILTON-KÖR NP-teljes.
10. Ismertnek tételezve fel az alábbi problémák NP-teljességét: SAT, 3SAT, HAMILTON-ÚT, HAMILTON-KÖR, 3-SZÍNEZÉS, döntsük el, hogy az alábbi problémák P-ben vannak-e, vagy NP-teljesek?
 - a) Adott egy G gráf. Van-e benne 100 hosszú kör?
 - b) Adott egy G gráf, melynek n csúcsa van. Van-e G -ben $\frac{n}{2}$ hosszú kör?
 - c) Adott egy G összefüggő gráf, melynek n csúcsa van. Van-e G -ben $\frac{n}{2}$ hosszú kör?
 - d) Adott egy G összefüggő gráf, melynek n csúcsa van. Van-e G -ben $\frac{n}{100}$ hosszú kör?
 - e) Adott egy G gráf, melynek élei pirosak vagy kékek, és egy K egész szám. Van-e a gráfban legalább K méretű piros kör?
 - f) Adott egy G gráf, melynek élei pirosak vagy kékek, igaz-e hogy piros az a szín, amelyből hosszabb kör van benne (ha a leghosszabb piros és kék kör egyenlő hosszú a válasz „igen”).
 - g) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e csúcsai 2 színnel? (Szomszédos csúcsok persze ne legyenek azonos színűek.)
 - h) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e élei 2 színnel? (Egy csúcsra illeszkedő élek ne legyenek azonos színűek.)
 - i) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e csúcsai 3 színnel úgy, hogy valamelyik színt pontosan egyszer használjuk?
 - j) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e csúcsai 3 színnel úgy, hogy valamelyik színt legfeljebb 100-szor használjuk?
 - k) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e csúcsai 4 színnel úgy, hogy valamelyik színt pontosan egyszer használjuk?
 - l) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e csúcsai 4 színnel úgy, hogy valamelyik színt pontosan kétszer használjuk?
 - m) Adott egy G gráf, kiszínezhetők-e csúcsai 5 színnel úgy, hogy valamelyik két színt pontosan kétszer-kétszer használjuk?
 - n) Adott egy G gráf, van-e benne 5 méretű klikk?
 - o) Adott egy G gráf, melynek n csúcsa van, van-e benne $\frac{n}{2}$ méretű klikk?
11. Tegyük fel, hogy van egy olyan K nevű eljárás, mely (egyetlen lépésben) megmondja, hogy az inputjaként megadott irányítatlan gráf színezhető-e három színnel. Csináljunk egy, a K eljárást használó algoritmust, mely polinom időben megadja az input G gráf egy 3-színezését, ha $G \in 3\text{-SZÍNEZÉS}$.
12. Tegyük fel, hogy van egy T eljárásunk, mely input gráfra (egyetlen lépésben) megmonja a gráfban levő maximális klikk(ek) méretét. Tervezzünk olyan, T eljárást használó algoritmust, mely polinom időben talál egy maximális klikket az input gráfban!