NP-teljesség bizonyítása log. tárú visszavezetéssel

Ahhoz hogy egy PROB probléma NP-teljességét igazoljuk két dolgot kell megmutatnunk.

PROB $\in$ NP, azaz a PROB probléma megoldható nemdeterminisztikus Turing-géppel polinom időben. Ez általában könnyen megy, és belátható az alábbi gondolatmenettel: Egy nemdeterminisztikus Turing-gép megkapva PROB egy példányát először ,,megsejthet egy megoldást", azaz nemdeterminisztikusan előállíthat egy tetszőleges karaktersorozatot, majd polinom időben determinisztikusan ellenőrizheti, hogy a generált karaktersorozat valóban igazolja-e, hogy a kapott példányra igen a válasz. Például HAMILTON-ÚT esetén, a megsejtett karaktersorozat csúcsoknak olyan sorozatát kódolja-e, melyben minden csúcs pontosan egyszer fordul elő és a sorozatban szomszédos csúcsok között vezet él. Nem ritkán a PROB probléma egy ismert NP-teljes probléma egyik speciális esete, ezért nyilvánvalóan eleme NP-nek, hiszen a speciális eset nem lehet nehezebb, mint az általános.

PROB NP-nehéz, azaz minden NP-beli probléma visszavezethető PROB-ra. Ezt úgy tudjuk igazolni, hogy egy már bizonyítottan NP-teljes problémát (például: SAT-ot, 3SAT-ot vagy KLIKK-et, stb.) visszavezetünk PROB**-ra**. Bár – amennyiben a PROB valóban NP-teljes – *minden* NP-teljes probléma visszavezethető rá, célszerű olyan problémát keresni, amely a PROB problémához közel áll vagy könnyen kapcsolatba hozható vele, hogy a visszavezetés ne legyen túlságosan nehezen kivitelezhető. Definíció szerint a visszavezetésnek két dolgot kell teljesítenie:

- A választott NP-teljes probléma példányait PROB ekvivalens példányaiba kell transzformálnia, azaz igen példányból igen példányt, nem példányból nem példányt kell készítenie.
- Logaritmikus tárban kiszámíthatónak kell lennie (ez utóbbi általában könnyen igazolható.)

V/7. *Legyen* LEGHOSSZABB ÚT *a következő probléma. Adott egy G irányítatlan gárf és egy $k \geq 0$ egész szám. Kérdés, hogy létezik-e G-ben legalább k hosszúságú út. Mutassuk meg, hogy* LEGHOSSZABB ÚT *NP-teljes.* Legyen

$$\text{LEGHOSSZABB ÚT} := \{\, G; k \mid G \text{ gráf, } k \text{ poz. egész, } G\text{-ben van legalább } k \text{ élt tartalmazó út.} \,\}$$

LEGHOSSZABB ÚT $\in$ NP, mert egy adott $G; k$ példány esetén egy Turing-gép nemdeterminisztikusan ,,megsejthet" egy karaktersorozatot, majd polinom időben ellenőrizheti, hogy az valóban G-ben egy k hosszúságú utat kódol-e.

LEGHOSSZABB ÚT NP-nehéz, mert az NP-teljes (és így NP-nehéz) HAMILTON-ÚT könnyen visszavezethető rá. Valóban legyen G' a HAMILTON-ÚT egy példánya. G' igen példány, ha van benne Hamilton-út, azaz olyan út, melyen minden csúcs pontosan egyszer fordul elő, G' nem példány különben. Akármilyen példány is G' rendeljük hozzá azt a LEGHOSSZABB ÚT példányt, melyben a G gráf legyen G', a k szám pedig G' csúcsainak a száma mínusz egy. Azaz $f : G' = (V, E) \mapsto G'; |V| - 1$. Ekkor

$$G' \in \text{HAMILTON-ÚT} \Leftrightarrow G' = (V, E)\text{-ben van Hamilton-út} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow G' = (V, E)\text{-ben van } |V| - 1 \text{ hosszú út} \Leftrightarrow f(G') = G'; |V| - 1 \in \text{LEGHOSSZABB ÚT}$$

Ezért f visszavezeti HAMILTON-ÚT-at LEGHOSSZABB ÚT-ra. Az is könnyen látható, hogy f log. tárral kiszámítható, csak G' csúcsait kell megszámolni, és kivonni e számból egyet. Mivel HAMILTON-ÚT $\leq_{\log}$ LEGHOSSZABB ÚT és HAMILTON-ÚT NP-nehéz, ezért LEGHOSSZABB ÚT is NP-nehéz.

V/8. *Legyen* RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS *a következő probléma. Adott G_1 és G_2 irányítatlan gárfok esetén döntsük el, hogy van-e G_1-nek G_2-vel izomorf részgáfja.*
Mutassuk meg, hogy RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS *NP-teljes.*

Megoldás. A probléma a formálisan a következő:

$$\text{RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS} := \{\, G_1; G_2 \mid G_1,\ G_2 \text{ gráfok és } G_1\text{-ben van } G_2\text{-vel izomorf részgráf.} \,\}$$

Egy $G = (V_1, E_1)$ és egy $H = (V_2, E_2)$ gráf *izomorf*, ha létezik olyan $\varphi : V_1 \to V_2$ bijektív függvény, melyre $(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow (\varphi(x), \varphi(y)) \in E_2$, minden $x, y \in V_1$-re. Ismét a szokásos két dolgot kell belátni.

RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS $\in$ NP, mert egy adott $G_1; G_2$ példány esetén egy Turing-gép nemdeterminisztikusan megsejtheti a G_1 egy G_1' részgráfját és egy $\varphi : G_1' \to G_2$ leképezést, majd polinom időben ellenőrizheti, hogy φ izomorfizmus, azaz bijektív és tartja az ,,él van közte" relációt.

RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS NP-nehéz, mert az NP-teljes (és így NP-nehéz) KLIKK visszavezethető rá. Valóban legyen $G; k$ a KLIKK egy példánya, azaz G egy gráf k pedig egy pozitív egész és a kérdés az, hogy van-e G-ben k csúcsú teljes részgráf (más szóval klikk).

A G gráfhoz rendeljük hozzá azt a RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS példányt, melyben a G_1 gráf G, a G_2 gráf pedig egy k csúcsú teljes gráf. Azaz $f(G; k) := G; T_k$, ahol T_i az i csúcsú teljes gráfot jelöli, minden $i \geq 1$ egész szám esetén.

Ekkor

$$G; k \in \text{KLIKK} \Leftrightarrow G\text{-ben van } k \text{ csúcsú klikk} \Leftrightarrow f(G; k) = G; T_k \in \text{RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS}$$

Könnyen ellenőrizhető, hogy f logaritmikus tárban kiszámítható, ezért KLIKK $\leq_{\log}$ RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS és mivel KLIKK NP-nehéz, ezért RÉSZGRÁF-IZOMORFIZMUS is az.

V/8. *Legyen* HAMILTON-KÖR *a következő probléma. Adott G irányított gárf, van-e benne olyan kör, mely minden csúcsot pontosan egyszer érint. Mutassuk meg, hogy* HAMILTON-KÖR NP-*teljes.*

Megoldás. Egyszerűen belátható, hogy HAMILTON-KÖR $\in$ NP.

Azt, hogy HAMILTON-KÖR NP-nehéz például úgy láthatjuk be, hogy a már ismerten (ld. Papadimitriou könyv) NP-telejes HAMILTON-ÚT problémát vezetjük vissza rá.

Valóban, legyen G a HAMILTON-ÚT egy tetszőleges példánya. Definiáljuk $f(G)$-t a következő képpen. Legyen $f(G)$ egy olyan G' gráf, mely úgy áll elő, hogy G-hez még egy új u csúcsot hozzáveszünk, és ezt az új csúcsot G minden csúcsával összekötjük. Könnyel látható, hogy ez az f transzformáció a nekünk megfelelő visszavezetés, azaz G-ben akkor és csak akkor lesz Hamilton-út, ha G'-ben lesz Hamilton-kör.

Valóban, ha G-ben van Haminlton-út, akkor ezt az utat az út két végpontjából u-ba vezető éllel kibővítve G'-ben egy Hamilton-körhöz jutunk. És fordítva, ha G'-ben van Hamilton-kör, akkor mivel a Hamilton-kör minden csúcson pontosan egyszer áthalad, a kör áthalad u-n is. Töröljük most az u-csúcsot a hozzátartozó összes éllel együtt, ekkor a megmaradt gráf épen G és a kör megmaradt része éppen G egy Hamilton-útját adja.

Ismét nyilvánvaló, hogy f logaritmikus tárban kiszámítható, G másolásán túl csak egy számlálót kell végigfuttani G csúcsain, hogy az új éleket az u csúcsból generálni tudjuk. Összeségében

$$\text{HAMILTON-ÚT} \leq_{\log} \text{HAMILTON-KÖR},$$

ezért HAMILTON-ÚT NP-nehézsége maga után vonja HAMILTON-KÖR NP-nehézségét.