II. gyak útmutatások, megoldások

Az debreceni feladatsor megoldásai a feladatokkal együtt letölthetők. A változtatások nem számottevőek.

Az `www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps` "Ítéletkalkulus" feladatsorból:

I/2.

$p \oplus q$	0	1
0	0	1
1	1	0

$$p \oplus q = (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$$

I/3.

c)

$(F$	$\rightarrow$	$G)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	F	$\vee$	$(F$	$\wedge$	$G))$
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Igazságtábla módszer:
minden lehetséges igazságértéke F-nek és G-nek
mivel a kimenet mindig 1 $\Rightarrow$ tautológia!

I/4. Könnyű HF.

I/5. a.)NEM b.)NEM

I/6.

$$\models F \to G \Leftrightarrow^{def.}_{szerint} \quad \forall \mathcal{A} : Var \to \{0,1\}$$
$$\text{kiértékelésre } \mathcal{A}(F \to G) = 1$$

$$\Leftrightarrow^{\text{implikáció def.}}_{\text{szerint}} \quad \forall \mathcal{A} \text{ kiértékelésre } (\mathcal{A}(F) = 0 \text{ vagy } \mathcal{A}(G) = 1)$$

I. Ha most $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A}(F) = 0$ akkor F kielégíthetetlen.

II. Ha van olyan $\mathcal{A}'$ kiértékelés, hogy $\mathcal{A}'(F) \neq 0$ akkor meg kell mutatnunk, hogy G tautológia.

Vegyünk egy tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelést
Mivel F-nek és G-nek nincs közös ítéletváltozója, készítetünk egy olyan $\mathcal{B}$ kiértékelés melyre

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} \mathcal{A}'(p_i) & \text{ha } p_i \in \mathrm{Var}(F) \\ \tilde{\mathcal{A}}(p_i) & \text{ha } p_i \in \mathrm{Var}(G) \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{B}(F \to G) = 1$ mert $F \to G$ tautológia, de $\mathcal{B}(F) = \mathcal{A}'(F) = 1$ ezért $\mathcal{B}(G) = 1$. Mivel $\tilde{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{B}(G) = 1$ teljesül tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelésre, ezért $\models G$
A feltétel szükséges pl. $F = p \wedge q, G = p$ esetén $\models F \to G$ teljesül de F kielégíthető és G nem tautológia.

I/8

-NEM
-IGEN pl. $\mathcal{A}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha i páratlan} \\ 0 & \text{ha i páros} \end{cases}$ (vagy fordítva)

I/9

a) $\{x_1 \leftrightarrow x_2, x_2 \leftrightarrow x_3, x_3 \leftrightarrow \neg x_1\}$
b) $\{x_1 \leftrightarrow x_2, x_2 \leftrightarrow x_3, \ldots, x_{n-1} \leftrightarrow x_n, x_n \leftrightarrow \neg x_1\}$

I/10

a) IGAZ
$<$ID$>$(ID=indirekt) Ha G nem tautológia $\Rightarrow$ $\exists \mathcal{A}$ kiértékelés: $\mathcal{A}(G) = 0 \quad \Rightarrow \mathcal{A}(F \to G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0 \Rightarrow$ ellentmond annak, hogy $\models F \to G$

b) NEM IGAZ pl: $F = p$, $G = \downarrow$

I/11

a) triviális, ha $\triangle$ minden formulája igaz, akkor Γ-é is.

b) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(F \to G) = 1$

II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F\}$, így $\Gamma \cup \{F\} \models G$ miatt $\mathcal{A}(G) = 1$. Ezért $\mathcal{A}(F \to G) = 1$

c) $\Gamma \models F \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen. Ez indirekt bizonyítható:
Tfh. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A}$ kiértékelés, melyre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg F\}$.
Ha most $\mathcal{A}(G) = 0$, akkor $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ nem teljesül.
Ha viszont $\mathcal{A}(G) = 1$, akkor $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$ nem teljesül.
ELLENTMONDÁS!

d) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1) \Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$. Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$

e) <ID> Tfh. $\Gamma \cup \triangle$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \triangle$

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0$, akkor $\Gamma \models F$ nem teljesül

II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\triangle \models \neg F$ nem teljesül
ELLENTMONDÁS!!!