III. gyak útmutatások, megoldások

Az `www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps` "Ítéletkalkulus" feladatsorból:

II/3.c

Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

1.lépés: $F \rightarrow G$ helyett $\neg F \vee G$
$F \leftrightarrow G$ helyett $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$
$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s) \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \vee s) \equiv \neg \Big((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \Big) \vee (r \vee s)$

2.lépés: $\neg$ bevitele
$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$, és $\neg\neg F \equiv F$ alapján.
$\equiv \Big(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \Big) \vee (r \vee s) \equiv \Big((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \Big) \vee r \vee s \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r \vee s.$
Ez már DNF!
A KNF-hez szükséges még

3.lépés: a disztributivitás használata
KNF-nál a $\wedge$ kivitele: $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$ alapján.
DNF-nál a $\vee$ kivitele: $(F \vee G) \wedge H \equiv (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$ alapján.

$\Big((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \Big) \vee r \vee s \equiv \Big((p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \Big) \vee r \vee s \equiv$
$\equiv \Big((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \Big) \vee r \vee s \equiv (p \vee q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s)$ Ez már KNF!

A II/3 feladat összes megoldása:

a) $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
$(\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

b) $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
$\neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (r \wedge q) \vee (\neg q \vee \neg r)$

c) $(\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s)$
$(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee r \vee s$

d) $\uparrow$ (tautológia) (üres KNF)
pl: $p \vee \neg p$ VIGYÁZAT <u>az üres DNF azonosan HAMIS!</u>

e) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Konjunktív és diszjunktív normálformák ellenőrzéséhez (és még sok minden máshoz) ajánlom még a következő linket:

`http://logik.phl.univie.ac.at/~chris/formular-uk.html`

II/5 Ha a formulahalmaz nem tartalmaz pozitív klózt, akkor minden változónak hamis értéket adva, ha a formulahalmaz nem tartalmaz negatív klózt, akkor minden változónak igaz értéket adva a formulahalmazt kielégítő kiértékelést kapunk.

II/6 Minden a halmaz műveleteiből felépített egyváltozós $f(x)$ függvényre, $f(1) = 1$, mert $1 \vee 1 = 1 \wedge 1 = = 1 \to 1 = 1$. De $\neg 1 = 0$, ezért a negáció nem fejezhető ki.

II/7 Egy Boole-függvényt lineárisnak hívunk, ha $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ vagy $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \uparrow$ alakú. Megmutatjuk, hogy $\neg$-val és $\leftrightarrow$-val csak lineáris függvények fejezhetők ki. Valóban $\neg x = x \oplus \uparrow$ és $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus \uparrow$ lineáris. Továbbá, ha f és g lineáris függvények, akkor könnyen látható, hogy $\neg f = f \oplus \uparrow$ és $f \leftrightarrow g = f \oplus g \oplus \uparrow$ szintén lineáris függvények. (Ehhez fel kell használni, hogy $\oplus$ asszociatív és kommutatív, $x \oplus x = \downarrow$ és $x \oplus \downarrow = x$.) De például a konjunkció nem lineáris, ezért nem fejezhető ki.

II/8 $\{\neg, \to\}$ teljes rendszert alkot, mert $x \vee y = \neg x \to y$ és a $\{\neg, \vee\}$ halmazról pedig már tudjuk, hogy teljes. Avagy lásd az előadás anyagát.

III/2 A könyvben vannak útmutatások.