Gyakorló feladatok a II. ZH-ra

Követelmények:

1. Elmélet (fogalmak, definíciók, tételek, algoritmusok) az április 23-i előadással bezárólag (Az SLD rezolúcióig)
2. Hilbert típusú bizonyítások: Dr. Fülöp Zoltán "Ítéletkalukus" [1] II/4,5
3. Skolemizáció: Dr. Fülöp Zoltán "Predikátumkalkulus" [2] II/5,6,7,8
4. Egyesítési algoritmus: V/1,2,5,6,7
5. Elsőrendű rezolúció (lineáris és SLD rezolúció is): V/8,9,10,11,12,14,15

Néhány példa megoldása

Skolemizáció

Korábbi gyakorlatom anyaga, most nem pont ebben a sorrendben vettük a lépéseket, de a végeredmények ugyanazok.

"Kvantorkihúzási" törvények:

$$
\begin{array}{ll}
F \lor QxG(x) \equiv Qx(F \lor G(x)) & \text{ahol } Q = \forall \text{ vagy } \exists \text{ és } x \notin FreeVar(F) \\
F \land QxG(x) \equiv Qx(F \land G(x)) & \text{ahol } Q = \forall \text{ vagy } \exists \text{ és } x \notin FreeVar(F) \\
\forall xF(x) \to G \equiv \exists x(F(x) \to G) & \text{ahol } x \notin FreeVar(G) \\
\exists xF(x) \to G \equiv \forall x(F(x) \to G) & \text{ahol } x \notin FreeVar(G) \\
F \to \forall xG(x) \equiv \forall x(F \to G(x)) & \text{ahol } x \notin FreeVar(F) \\
F \to \exists xG(x) \equiv \exists x(F \to G(x)) & \text{ahol } x \notin FreeVar(F) \\
\neg\forall xF(x) \equiv \exists x\neg F(x) & \\
\neg\exists xF(x) \equiv \forall x\neg F(x) &
\end{array}
$$

II/5 a) $\forall x\,[\exists y\ p(x,y) \to q(y,z)] \land \exists y\,[\forall x\ r(x,y) \lor q(x,y)]$

1. kiigazítás: ‘minden kvantornak saját változója legyen’
   $\forall u\,[\exists v\ p(u,v) \to q(y,z)] \land \exists w\,[\forall t\ r(t,w) \lor q(x,w)]$
2. prenex alakra hozás ‘a kvantorkihúzási törvényekkel ‘
   $\forall u\forall v\exists w\forall t\,[(p(u,v) \to q(y,z)) \land (r(t,w) \lor q(x,w)]$ avagy $\exists w\forall u\forall v\forall t\,[\dots]$ is jó!
3. zárttá tevés ‘egzisztenciális kvantorokkal (vagy új konstansokkal) kötjük le a szabad változókat ‘
   $\exists x\exists y\exists z\forall u\forall v\exists w\forall t\,[(p(u,v) \to q(y,z)) \land (r(t,w) \lor q(x,w)]$
4. Skolemizáció:
   "az egzisztenciálisan lekötött változók az előttük univerzálisan kvantifikáltak függvényével helyettesíthetők "

[1] www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps
[2] www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

szükséges fgv. szimbólumok:

$$\begin{array}{rl} c & x \text{ helyére} \\ d & y \text{ helyére} \\ e & z \text{ helyére} \\ f(u,v) & w \text{ helyére} \end{array}$$

$\forall u \forall v \forall t\,[(p(u,v) \to q(d,e)) \wedge (r(t,f(u,v)) \vee q(c,f(u,v))]$
Mj.: Valójában $f(u,v)$ helyett az f konstans is használható, mert nincs a formulában olyan atomi formula, melyben w mellett u vagy v is szerepel.

b) $\exists x\ r(x,y) \leftrightarrow \forall y\ p(x,y)$

0. átírás $\neg, \vee, \wedge$ műveletekre $A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
   $(\neg \exists x\ r(x,y) \vee \forall y\ p(x,y)) \wedge (\neg \forall y\ p(x,y) \vee \exists x\ r(x,y))$
1. kiigazítás
   $(\neg \exists u\ r(u,y) \vee \forall v\ p(x,v)) \wedge (\neg \forall w\ p(x,w) \vee \exists t\ r(t,y))$
2. prenex alakra hozás:
   $[\forall u(\neg r(u,y)) \vee \forall v\ p(x,v)] \wedge [\exists\ w(\neg p(x,w) \vee \exists t\ r(t,y)] \equiv$
   $\equiv \forall u \forall v \exists w \exists t\,[(\neg r(u,y) \vee p(x,v)) \wedge (\neg p(x,w) \vee r(t,y)]$
   Mj: bármely kvantor sorrend jó!
3. zárttá tevés
   $\exists x \exists y \forall u \forall v \exists w \exists t\,[(\neg r(u,y) \vee p(x,v)) \wedge (\neg p(x,w) \vee r(t,y)]$
4. Skolemizáció:
   új fgv. szimbólumok: $\begin{array}{cc} x & \text{helyére } c \\ y & \text{helyére } d \\ w & \text{helyére } l(u,v) \\ t & \text{helyére } f(u,v) \end{array}$
   $\forall u \forall v\,[(\neg r(u,d) \vee p(c,v)) \wedge (\neg p(c,l(u,v)) \vee r(f(u,v),d)]$
   Valójában l(u ,v) helyett l és f(u , v) helyett f is elegendő lenne.

c) $(\forall x \exists y q(x,y) \vee \exists x \forall y\ p(x,y)) \wedge \neg \exists x\ \exists y\ p(x,y)$

1. kiigazítás:
   $(\forall x \exists y\ q(x,y) \vee \exists v \forall w\ p(v,w)) \wedge \neg \exists s \exists z\ p(s,z)$
2. prenex:
   $\forall x \exists y \exists v \forall w\,[(q(x,y) \vee p(v,w)) \wedge \forall s \forall z(\neg p(s,z))]$
   $\forall x \exists y \exists v \forall w \forall s \forall z\,[(q(x,y) \vee p(v,w)) \wedge \neg p(s,z)]$
3. zárttá tevés = nem kell mert zárt.
4. Skolemizáció:
   y helyére c(x)
   v helyére d(x)
   $\forall x \forall w \forall s \forall z\,[(q(x,c(x)) \vee p(d(x),w)) \wedge \neg p(s,z)]$
   Mj.: d(x) helyett d alaklmazható, de c(x) helyett c nem!!!

d) $\neg(\forall x \exists y\ p(x,y) \to \exists x \exists y\ r(x,y)) \wedge \forall x\ \neg \exists y\ q(x,y)$

0. átírás $\neg(A \to B) \equiv A \wedge \neg B$ $(\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge \neg \exists x \exists y\ r(x,y)) \wedge \forall x \neg \exists y\ q(x,y)$
1. kiigazítás: $(\forall x \exists y\ p(x,y) \wedge \neg \exists s \exists z\ r(s,z)) \wedge \forall t \neg \exists u\ q(t,u)$
2. prenex: $\forall x \exists y\,[(p(x,y) \wedge \forall s \forall z\ \neg r(s,z)) \wedge \forall t \forall u\ \neg(q(t,u))]$
   $\forall x \exists y \forall s \forall z \forall t \forall u\,[p(x,y) \wedge \neg r(s,z) \wedge q(t,u)]$
3. zárni nem kell mert zárt!

4. Skolemizáció: y helyére c(x)
   $\forall x \forall s \forall z \forall t \forall u\, [p(x, c(x)) \wedge \neg r(s, z) \wedge q(t, u)]$
   Mj.: c(x) x-től való függése lényeges!

II/7

a) $\exists x \forall y\ p(x, y) \rightarrow \forall y \exists x\ p(x, y) \equiv$
   $\neg \exists x \forall y\ p(x, y) \vee \forall t \exists s\ p(, t) \equiv$
   $\forall x \exists y\ \neg p(x, y) \vee \forall t \exists s\ p(s, t) \equiv$
   $\forall x \exists y \forall t \exists s\, [\neg p(x, y) \vee p(s, t)] \equiv_s$
   y helyére c(x)
   s helyére d(x,t)
   $\forall x \forall t\, [\neg p(x, c(x)) \vee p(d(x, t), t)]$
   Mj.: d(x,t) helyett d(t) használható, de d nem!

b) $\forall x(p(x) \rightarrow q(y)) \equiv \exists y \forall x(p(x) \rightarrow q(y)) \equiv_s \forall x(p(x) \rightarrow q(c))$

c) $\forall x \forall y(p(z) \wedge [q(x, u) \rightarrow \exists v\ q(y, v)]) \equiv$
   $\equiv \forall x \forall y\, [p(z) \wedge (\neg q(x, u) \vee q(y, v)] \equiv$
   $\equiv \forall x \forall y \exists v\, [p(z) \wedge (\neg q(x, u) \vee \exists v\ q(y, v)] \equiv$
   $\equiv \exists u \exists z \forall x \forall y \exists v\, [p(z) \wedge (\neg q(x, u) \vee q(y, v)] \equiv_s \forall x \forall y\, [p(d) \wedge (\neg q(x, c) \vee q(y, e(x, y))]$
   u helyére c
   z helyére d
   v helyére e(x,y).

d) $\neg \exists y\ p(y) \rightarrow \exists z(q(z) \rightarrow r(x)) \equiv \exists y\ p(y) \vee \exists z(q(z) \rightarrow r(x)) \equiv \exists y\ p(y) \vee \exists z(\neg q(z) \vee r(x)) \equiv$
   $\exists y \exists z\, [p(x) \vee (\neg q(z) \vee r(x))] \equiv \exists x \exists y \exists z\, [p(y) \vee (\neg q(z) \vee r(x))] \equiv_s p(d) \vee (\neg q(e) \vee r(c)).$

Az egyesítési algoritmus

V/1 a)

$\{F_1 = p(x, f(y), z),$
$F_2 = p(g(a), f(w), u),$
$F_3 = p(v, f(b), c\ \}$

$s_0 = [\ ]$
$s_1 = [x/g(a)]\, [v/g(a)]$

$F_1 s_1 = p(g(a), f(y), z)$
$F_2 s_1 = p(g(a), f(w), u)$
$F_3 s_1 = p(g(a), f(b), c)$

$s_2 = s_1\, [y/b]\, [w/b]$

$F_1 s_2 = p(g(a), f(b), z)$
$F_2 s_2 = p(g(a), f(b), u)$
$F_3 s_2 = p(g(a), f(b), c)$

$s_3 = s_2\, [z/c]\, [u/c] = [x/g(a)]\, [v/g(a)]\, [y/b]\, [w/b]\, [z/c]\, [u/c]$

Ekkor $F_1 s_3 = F_2 s_3 = F_3 s_3 = p(g(a), f(b), c)$

b) Hf.
Megoldás: $s = [x/g(v)]\,[y/a]\,[w/f(v)]\,[v/b]$ vagy $[x/g(v)]\,[y/a]\,[w/f(b)]\,[v/b]$

V/2 a)
$F_1 = p(x, a)$
$F_2 = p(b, c)$
mivel itt két különböző term kezdődik ezért a és c nem egyesíthetők!!!

b)
$F_1 = p(f(x), x)$
$F_2 = p(a, w)$
Ez sem egyesíthető mivel itt is két klönböző termmel kezdődik: a és f(x)-el.

V/5/c
$F_1 = p(x, g(x))$
$F_2 = p(y, y)$

$s_0 = [\,]$

$s_1 = [x/y]$ (vagy $[y/x]$ is jó)

$F_1 s_1 = p(y, g(y))$
$F_2 s_1 = p(y, y)$

y helyére olyan termet kellene helyettesíteni g(y)-t, amelyben y előfordul ⇒ nem egyesíthetők

HF: 5/a,b, 6

Elsőrendű rezolúció

Miért kell rezolvens képzés előtt az egyesítendő klózok változóit átnevezni?
Pl: $F = \forall x \forall y (p(x, g(y)) \wedge \neg p(f(y), x))$
$\{l_1 = p(x, g(y)), \bar{l}'_1 = p(f(y), x)\}$ NEM EGYESÍTHETŐ HALMAZ!
mivel
$s_1 = [x/f(y)]$
$l_1 s_1 = p(f(y), \underline{g}(y))$
$\bar{l}'_1 s_1 = p(f(y), \underline{f}(y))$

De ha az $s_1 = [\,]\,, s_2 = [x/z]\,[y/t]$ változóátnevezéseket elvégezzük akkor:
$C_1 s_1 = \{p(x, g(y)\}$
$C_2 s_1 = \{\neg p(f(t), z)\}$ rezolválhatók az $s = [x/f(t)]\,[z/g(y)]$ egyesítővel
Csak így vezethető le az üres klóz.

1. $\{p(f(t), g(y))\}$ $C_1 s_1$ klóz s helyettesítéssel
2. $\{\neg p(f(t), g(y)\}$ $C_2 s_2$ klóz s helyettesítéssel

3. $\square$ Res 1,2

V/11 a) $\{p(x,y), p(y,z)\}, \{\neg p(u, f(u)\}$

p(x,y) és p(u,f(u)) egyesíthető: $s_1 = [u/x]$-gyel $\Rightarrow p(x,y)$és $p(x, f(x))$

$s_2 = s_1\,[y/f(x)] \Rightarrow$ mindkettő:$p(x, f(x))$. Így

$\{p(x,y), p(y,z)\}\ s_2 = \{p(x, f(x)), p(f(x), z)\},$

$\{\neg p(u, f(u)\} s_2 = \{\neg p(x, f(x))\}$

$R_1 = \{p(f(x), z)\}.$

De a $\{p(x,y), p(y,z)\}, \{\neg p(u, f(u))\}$ klózok $p(y,z)$és $p(u, f(u))$ literáljai az $s = [y/u]\,[z/f(u)]$-val egyesíthetők $\Rightarrow \{p(x,u), p(u, f(u))\}, \{\neg p(u, f(u))\}$

$R_2 = \{p(x,u)\}.$

b) $R = \{p(x,x), \neg r(x, f(x))\}, \{r(\underline{x}, y), q(y,z)\}$ az aláhúzott x-et át kell nevezni, mert a másik klózban is szerepel (nevezzük át u-ra) és így egyesíthetők:

$s = [x/u]\,[y/f(u)]$-val

$R = \{p(u,u), q(f(u), z)\}$

V/9 B(x) – x boldog

Gy(x,y) -x-nek gyereke y

R(x) - x tud repülni

Z(x) -x zöld

$F_1 = \forall x(\forall y\,[Gy(x,y) \to R(y)] \to B(x)) \equiv \forall x \exists y(\neg\,[Gy(x,y) \to R(y)] \vee B(x)) \equiv \forall x \exists y([\neg Gy(x,y) \wedge \neg R(y)] \vee B(x)) \equiv \forall x \exists y\,[(Gy(x,y) \vee B(x)) \wedge (\neg R(y) \vee B(x))] \equiv_s \forall x\,[(Gy(x, f(x)) \vee B(x)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee B(x))]$

$F_2 = \forall x(Z(x) \to R(x)) \equiv \forall x(\neg Z(x) \vee R(x))$

$F_3 = \forall x\,[\exists t(Gy(t,x) \wedge Z(t)) \to Z(x)] \equiv \forall x \forall t\,[\neg Gy(t,x) \vee \neg Z(t) \vee Z(x)]$

$\neg F_4 = \neg \forall x(Z(x) \to B(x)) \equiv \exists x \neg(Z(x) \to B(x)) \equiv \exists x(Z(x) \wedge \neg B(x)) \equiv_s Z(a) \wedge \neg B(a)$

1. $\{Z(a)\}$ $\in E'(\sum)$
2. $\{\neg Z(a), R(a)\}$ $\in E'(\sum)$ elhagyható!
3. $\{R(a)\}$ $Res 1,2$
4. $\{\neg Gy(a, f(a)), \neg Z(a), Z(f(a))\}$ $\in E'(\sum)$
5. $\{\neg Gy(a, f(a)), Z(f(a))\}$ Res 1,4
6. $\{Gy(a, f(a)), B(a)\}$ $\in E'(\sum)$
7. $\{Z(f(a)), B(a)\}$ Res 5,6
8. $\{\neg Z(f(a)), R(f(a))\}$ $\in E'(\sum)$
9. $\{B(a), R(f(a))\}$ Res 7,8
10. $\{\neg R(f(a)), B(a)\}$ $\in E'(\sum)$

11. $\{B(a)\}$ Res 9,10
12. $\{\neg B(a)\}$ $\in E'(\sum)$
13. $\Box$ Res 1,2

V/15 Biz. be lineáris rezolúcióval, hogy $\widetilde{F} = \forall x(F \to G) \to (\forall x\ F \to \forall x\ G)$ tautológia!

Feltehetjük, hogy F-ben és G-ben csak az x változó fordul elő szabadon, és a jelölés egyszerűsítése végett így F helyett $F(x)$-et , $F\,[x/y]$ helyett $F(y)$-t írunk. Továbbá $F(x)$-et és $G(x)$-et atomi formulának tekintjük.

$\neg\widetilde{F} = \neg\left[\forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x\ F(x) \to \forall x\ G(x))\right] \equiv \forall x(F(x) \to G(x)) \wedge \neg(\forall y\ F(y) \to \forall z\, G(z)) \equiv \forall x((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge \forall y\, F(y) \wedge \neg\forall z(G(z)) \equiv \forall x \forall y \exists z((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(z)) \equiv_s \forall x \forall y((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(f(x,y)))$

$\neg\widetilde{F}^* = \{\{\neg F(x), G(x)\}, \{F(y)\}, \{\neg G(f(x,y))\}\}$ az utolsó tagban x-et át kell nevezni!

1. $\{\neg F(x), G(x)\}$
2. $G(x)$ rezolúció a második klózzal $[y/x]$ helyettesítés után
3. $\Box$ rezolúció az $[x/u]$ változóátnevezés után a 3. klózzal $[x/f(u,y)]$ helyettesítés után

V/16 $\{\neg p(a,c)\}, \{p(a,b)\}, \{p(c,b)\}, \{p(x,y), \neg p(x,z), \neg p(z,y)\}, \{p(x,y), \neg p(y,x)\}$

1. $\{\neg p(a,c)\}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{\neg p(a,z), \neg p(z,c)\}$
3. $\{\neg p(b,c)\}$
4. $\{\neg p(c,b)\}$
5. $\Box$