

Logika és informatikai alkalmazásai

1. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Követelmények

A tárgy (ea+gyak) teljesítésének követelményeit mindenki olvassa el, itt van link az előadás fóliáira is:

www.inf.u-szeged.hu/oktatas/kurzusleirasok/I604.xml

Az én gyakorlaimhoz kiadott segédanyagok, információk pedig a gyakorlat weblapján (lesznek) találhatóak:

www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth/logika2008/

1. gyak anyaga

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

- ▶ Előadás fóliák: #12-#21
- ▶ Szendrei Ágnes: Diszkrét Matematika, Polygon, Szeged 2004, I. fejezet (1-28. oldal) /ezt ugye mindenki tanulta?/

Feladatgyűjtemények

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Itéletkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

KKK Kalmárné Németh Márta, Katonáné Horváth Eszter,
Kámán Tamás: Diszkrét matematikai feladatok. Szeged,
Polygon, 2003.

LZ Lengyel Zoltán: Logikai feladatgyűjtemény
(megoldásokkal!)
www.inf.unideb.hu/~lengyelz/docs/logika-0519.pdf

SGY2 Serény György: Matematikai logika jegyzet, 2. rész:
Predikátum logika
www.math.bme.hu/~sereny/LINKEK/pred_calculus.ps.gz

1. gyak anyaga II.

Alap feladattípusok I.

- ▶ elsőrendű nyelvek jelkészlete (pl. predikátumok és fgv-ek különbsége)
- ▶ a term és alapterm fogalma, termek különböző jelölései (normál, lengyel, fordított lengyel, fa)
- ▶ atomi formulák és formulák, műveletek precedencia szabályai
- ▶ kvantorok, kvantorok hatásköre, szabad és kötött változó előfordulások, szabad és kötött változók
- ▶ természetes nyelvi mondatok formalizásaa elsőrendű formulákkal

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{Var} = \{x_1, x_2, \dots\}$, a függvénszimbólumok halmaza $\mathcal{Fgv} = \{f, g, h, c\}$, ahol f rangja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátumszimbólumok halmaza legyen $\mathcal{Pred} = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q -é 2, R -é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R NEM, R predikátum szimbólum

f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvantor a formulák képzéséhez kell.

g) $f(x_1) + g(x_1, x_2)$ NEM, $+$ nem szerepel a jelkészletben.

h) $g(x_1, Q(R, R), f(x_2))$ NEM, $Q(R, R)$ nem term, még csak nem is formula.

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

- a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula
- b) $P(c) \rightarrow \forall x_3 (P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula
- c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term
- d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term
- e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor
- f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedjük meg
- g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor
- h) $\forall x_1 (\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, x_2 szabad változó!
- i) $\neg P(x_1) \rightarrow \forall c P(g(c, x_1))$ NEM, c nem változó
- j) $\exists n (P(x_1) \vee P(x_2) \vee \dots \vee P(x_n) \vee \neg P(x_{n-1}))$ NEM, n nem változó, és $\dots$ sem megengedett.

Logikai műveletek precedencia sorrendje

Balról jobbra csökkenő erősség szerint:

$$\neg \quad \forall \quad \exists \quad \wedge \quad \vee \quad \rightarrow \quad \leftrightarrow$$

Az unáris műveletek ($\neg, \forall, \exists$) egyforma erősen kötnek, hiszen két unáris művelet esetén, értelemszerűen a jobbralevő eredményére alkalmazzuk a balra levőt. Pl.

$$\forall x \neg \exists y P(x) = \forall x [\neg (\exists y P(x))]$$

Bár nem kötelező, én azért $\vee$ és $\wedge$ esetén ki szoktam rakni a zárójelet, azaz pl. $A \vee B \wedge C$ esetén, $A \vee (B \wedge C)$ -t írok, hogy félreérthetetlenül megkülönböztessem $(A \vee B) \wedge C$ -től, ahol a zárójel nem hagyható el.

Azonos bináris műveletek esetén:

- ▶ $\wedge, \vee$ és $\leftrightarrow$ asszociatív, köztük a zárójelezés tetszőleges, így elhagyható
- ▶ $\rightarrow$ **nem asszociatív**, itt a megállapodás, a jobbról zárójelezés, azaz $A \rightarrow B \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni:
predikátumszimbólumok: $P, Q, R, \dots$, *függvényszimbólumok:* $f, g, h, \dots$, *változók:* $x, y, z, \dots$, *konstansok* c, d, e , valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum- és függvényszimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

- a) $\forall x(\forall y(P(x) \rightarrow Q(x, y)))$
- b) $(P(x) \rightarrow \neg \exists x \forall y Q(x, y)) \rightarrow \neg \forall z Q(x, y)$
- c) $Q(f(x), g(y, x))$
- d) $\neg[(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \rightarrow R(x))) \rightarrow \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- ▶ $P(x), Q(x, y), Q(y, x), R(x)$ atomi formulák.
- ▶ $P(x) \rightarrow Q(x, y), \exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)), Q(y, x) \rightarrow R(x)$
- ▶ $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \rightarrow R(x))$
- ▶ $\neg P(x)$ és $\forall x(\neg P(x))$
- ▶ $(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \rightarrow R(x))) \rightarrow \forall x(\neg P(x))$ **k!**
- ▶ és az egész formula.

Feladatok IV

4. LZ 2.8.

Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

- a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y, x, z)) \rightarrow P(x))$
- b) $\forall x(P(x) \vee \neg \exists x Q(x, g(x, x))) \wedge \exists x P(f(f(x)))$
- c) $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))$
- d) $\exists x \forall y P(x) \vee \neg P(x)$

d) megoldása

$\exists x \boxed{\forall y \boxed{P(x)}} \vee \neg P(x)$, így x szabad változó (paraméter).

Feladatok IV

5. LZ 2.9.

Jelöljük be az alábbi formulákban, hogy mely kvantor melyik változót köti, és határozzuk meg a formula paramétereinek (=benne szabadon (is) előforduló változók) halmazát.

- a) $\exists x \forall y Q(x, y) \vee P(x)$
- b) $\forall x (P(x, y) \rightarrow \forall y Q(y))$
- c) $(\forall x P(x, y) \rightarrow \forall y R(x, y)) \wedge P(c)$
- d) $\neg \exists z (Q(z, z) \wedge R(f(y, z)))$
- e) $\forall x (\forall y P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y))$
- f) $\forall y \exists z (P(x, y, z) \rightarrow \exists x \forall x Q(z, x))$
- g) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$

Feladatok IV

g) megoldása

- ▶ $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
- ▶ $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \rightarrow \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- ▶ az első $\exists y$ az y változó első előfordulását köti
- ▶ az első $\exists x$ az x változó első és második előfordulását köti
- ▶ a második $\forall y$ az y változó második előfordulását köti
- ▶ x utolsó előfordulása szabad, így x az egyetlen paraméter.
- ▶ A kötési viszonyok jelölését lásd a táblán.

Formalizálás

SGY2 2.3.(ii)

Formalizáljuk az alábbi következtetéseket és állapítsuk meg, melyik érvényes, melyik nem! Válaszunkat indokoljuk meg!

Az ilyen alakú következtetéseket **kategórikus szillogizmusoknak** nevezzük, a feltételek neve: **premissza**, a következményé: **konklúzió**.

Ezeket egy vízszintes vonallal szoktuk elválasztani egymástól.

Például:

(1) Minden ember halandó

(2) Szokratész ember

(3) Tehát Szokratész halandó.

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- ▶ **Univerzum (individuum tartomány):** minden objektum
- ▶ **Predikátum szimbólumok:**
 - ▶ $E(x)$: x ember,
 - ▶ $H(x)$: x halandó
- ▶ **Függvény szimbólumok:** s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$

(2) Szokratész ember: $E(s)$

(3) Tehát Szokratész halandó: $H(s)$

Könnyen látható, hogy a következtetés **érvényes**.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- ▶ **Univerzum (individuum tartomány):** az emberek halmaza
- ▶ **Predikátum szimbólumok:**
 - ▶ $B(x)$: x bolond,
 - ▶ $M(x)$: x megcsinálja.
- ▶ **Függvény szimbólumok:** e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$

(2) Én nem csinálom meg. $\neg M(e)$

(3) Nem vagyok bolond: $\neg B(e)$

A következtetés **nem érvényes**. Ha én bolond vagyok és nem csinálom meg, attól még az első mondat igaz marad. Hiszen az első mondat csak azokról beszélt, akik megcsinálják.

További példák (HF)

SGY2 2.3.(ii)

- ▶ Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.
- ▶ Nincs tökéletes ember. Minden görög ember. Tehát nincsen olyan görög, aki tökéletes.
- ▶ Van olyan férfi, akinek minden nő teszlik. Tehát minden nő tetszik valakinek.
- ▶ Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszlik valaki.
- ▶ Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden férfi tetszik valakinek.
- ▶ Minden gazdag nő csúnya. Tehát minden szegény nő szép. (Itt szegény és gazdag, szép és csúnya legyen egymás ellentéte.)
- ▶ További példák a Serény jegyzetben ...

Jövő hétre

HF, a kimaradt példák.

A formalizálás gyakorlásához mindenkinek ajánlott még megoldani a **KKK I. 18** példát. A feladatgyűjteményben ott a megoldás. Még később is szükség lesz rá.

Következő gyakorlatra:

Az új előadás anyaga.

A Dr. Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus" c. feladatsorból: I/1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 12.

Letölthető:

www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps