

Logika és informatikai alkalmazásai

2. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: #23-#39

Feladatsorok

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

LM I. A. Lavrov – L. L. Makszimova: Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$ -re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

b) $U = \mathbb{N}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$ -re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$.

NEM. $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$ egyszerre nem teljesülhet.

c) $U = 2^{\mathbb{N}}$, minden $A, B \subseteq \mathbb{N}$ -re $I(p)(A, B) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto \{1\}, y \mapsto \{1, 2, 3\}, z \mapsto \{1, 2\}]}$ modellje a formula magjának.

Feladatok II

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a) $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$, ahol

$$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \rightarrow \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$I(f) : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1,$$

$\varphi(z) = 1$, különben φ tetszőleges.

Ekkor $\forall x \forall y P(x, y, f(z)) = „\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+ \text{-re } x + y \geq 1 + 1”$ igaz, azaz $\mathcal{A}_1 \models F$.

De ha $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi')$ ugyanaz a modell kivéve, hogy

$\varphi'(z) = 13$, akkor $„\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+ \text{-ra } x + y \geq 13 + 1”$ **nem igaz**, azaz $\mathcal{A}_2 \not\models F$, $\mathcal{A}_2$ nem modellje F -nek.

Feladatok III

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b) $F = \forall x \forall y ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y)$

A formula a p reláció antiszimmetrikus tulajdonságát fejezi ki.

$$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, I, \varphi),$$

$$\text{ahol } I(p) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1\}, \quad I(p)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y \\ 0 & \text{különben} \end{cases} \quad \text{modellje}$$

a formulának, (φ tetszőleges).

$$\text{De } \mathcal{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, I, \varphi), \text{ ahol } I(p) : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\},$$

$$I(p)(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad (\varphi \text{ tetszőleges})$$

Nem modellje a formulának.

Feladatok IV

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

c) $F = \forall x \exists y (f(y) = x \wedge \neg \exists z (f(z) = x \wedge \neg (y = z)))$

A formula azt fejezi ki, hogy az f függvény bijektív függvény, azaz szürjektív (= minden elem képpé válik) és injektív (=különböző elemek képe is különböző).

Ezért egy modell akkor és csak akkor elégíti ki az F formulát, ha benne az f függvényt bijektív függvénynek interpretáljuk.
Részletesen HF.

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus)
predikátumszimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

FZ2 I/3. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű!** Az = reláció használható.

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$$

Vagy

$$\forall x ((x = c) \vee (x = d)).$$

Feladatok VI

FZ2 I/9. Legyen $\mathcal{A} = (U, I)$,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és $\mathcal{A} \models F$.

Tartalmazhat-e az $I(p)$ reláció gráfja az U halmazon kört? A választ indokoljuk!

(Az $I(p)$ reláció gráfjában a szögpontok U elemei és tetszőleges $u_1, u_2 \in U$ esetén u_1 -ből u_2 -be pontosan akkor vezet él, ha $I(p)(u_1, u_2)$ igaz.)

Indirekt módom igazolható. Ha $u_1, u_2, \dots, u_n = u_1$ kör lenne $I(p)$ gráfjában, akkor a tranzitivitás többszöri felhasználásával azt kapnánk, hogy $I(p)(u_1, u_1)$ is teljesül, ellentmondva F -nek.

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen!**

Néhány lehetséges megoldás:

- ▶ A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\wedge \forall x \exists y p(x, y)$
- ▶ A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\wedge \forall x p(x, f(x))$
- ▶ Ld. Iván Szabolcs: [Elsőrendű szemantika](#) (gyakorlat) VI. feladat.
www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/feladatok1.pdf

Feladatok VIII

LM 11.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a) $x = 0$; $N(x) := \forall y S(x, y, y)$;
- b) $x = 1$; $E(x) := \forall y P(x, y, y)$;
- c) $x = 2$; $K(x) := \exists z (E(z) \wedge S(z, z, x))$;
- d) x páros; $Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$;
- e) x páratlan; $Ptl(x) := \neg Ps(x)$;
- f) x prím; $R(x) := \neg E(x) \wedge \forall y \forall z (P(y, z, x) \rightarrow E(y) \vee E(z))$;

Feladatok IX.

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

- a) $x = y$;
- b) $x \leq y$;
- c) $x < y$;
- d) x osztója y -nak;
- e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

- a) $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$;
- b) $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$;
- c) $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$;
- d) $O(x, y) := \exists z P(x, z, y)$;
- e) $I(x, y) := R(x) \wedge R(y) \wedge \exists z [K(z) \wedge (S(x, z, y) \vee S(y, z, x))]$.

Feladatok X

LM II.4/11. Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója x , y és z , és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, ha

- a) z az x és y legkisebb közös többszöröse;
- b) z az x és y legnagyobb közös osztója.

a) megoldása

$$\exists uP(x, u, z) \wedge \exists vP(y, v, z) \wedge \forall t[\exists uP(x, u, t) \wedge \exists vP(y, v, t) \rightarrow (z \leq t)]$$

b) HF.

Feladatok XI

LM II.4/12. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az összeadás kommutatív;
 - b) az összeadás asszociatív;
 - c) a szorzás kommutatív;
 - d) a szorzás asszociatív;
 - e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;
 - f) a prímszámok halmaza végtelen;
 - g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a **négy-négyzetszám-tétel**);
 - h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.
- d)** $\forall x \forall y \forall z \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 (P(x, y, u_1) \wedge P(u_1, z, u_2) \wedge P(y, z, v_1) \wedge P(x, v_1, v_2) \rightarrow u_2 = v_2)$
- f)** $\forall x \exists y (x \leq y \wedge R(y))$

Feladatok XII

LM II.4/13. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;
- b) a prímszámok halmaza véges;
- c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;
- d) minden számnál van kisebb szám;
- e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok $\mathcal{A}$ -ban?

LM II.4/14. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az ikerprímek halmaza végtelen;
- b) minden kettőnél nagyobb páros szám két prímszám összege.

Megjegyzés. A fenti két állítás a számelmélet két híres a maig napig bizonyítatlan sejtése az **ikerprím-sejtés** és a **(páros) Goldbach-sejtés**.

Feladatok XIII

LM II.4/15. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van

LM II.4/16. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a következő egyenletrendszernek nincs megoldása:

$$3x - y = 0,$$

$$x + y = 2.$$

Jövő hétre

- ▶ HF, a kimaradt példák és még **FZ2 I/7, 8, 13.**
- ▶ HF, a természetes számokra vonatkozó formulák felírása, **az előadáson bevezetett jelkészlettel** (amikor a műveletek + és $\cdot$ függvénytípusként és nem az S és P predikátumtípusokkal vannak kifejezve. Ugye mennyivel könnyebb pl. **LM II.4/15.** és **LM II.4/16.?**
- ▶ HF* (nehezebb példák): **FZ2 I/6, 14** és mutassuk meg, hogy **FZ2 I/14** nem igaz, ha $F = \exists x_1 \dots \exists x_n F^*$ alakú, vagy ha F^* tartalmaz függvénytípusot.
- ▶ Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a **kielégíthetőség, tautológia, logikai következmény** fogalma.
- ▶ Az **FZ1 "Ítéletkalkulus"** c. feladatsor is kell majd.
Letölthető:
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps