

# Logika és informatikai alkalmazásai

## 2. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

## Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: #23-#39

## Feladatsorok

**FZ2** Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"  
[www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps](http://www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps)

**LM** I. A. Lavrov – L. L. Makszimova: Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987

Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktrúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktrúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

- a)  $U = \{0, 1, 2 \dots\} (= \mathbb{N})$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $m < n$ .

Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktrúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

a)  $U = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $m < n$ .

**IGEN.**  $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$  modellje a formula magjának, hiszen  $x = 1 < y = 3$ ,  $z = 2 < y = 3$  és  $x = 1 < z = 2$ , de **nem**  $z = 2 < x = 1$ .

Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

a)  $U = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $m < n$ .

**IGEN.**  $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$  modellje a formula magjának, hiszen  $x = 1 < y = 3$ ,  $z = 2 < y = 3$  és  $x = 1 < z = 2$ , de **nem**  $z = 2 < x = 1$ .

b)  $U = \mathbb{N}$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $n = m + 1$ .

Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

a)  $U = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $m < n$ .

**IGEN.**  $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$  modellje a formula magjának, hiszen  $x = 1 < y = 3, z = 2 < y = 3$  és  $x = 1 < z = 2$ , de **nem**  $z = 2 < x = 1$ .

b)  $U = \mathbb{N}$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $n = m + 1$ .

**NEM.**  $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$  egyszerre nem teljesülhet.

Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

a)  $U = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $m < n$ .

**IGEN.**  $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$  modellje a formula magjának, hiszen  $x = 1 < y = 3$ ,  $z = 2 < y = 3$  és  $x = 1 < z = 2$ , de **nem**  $z = 2 < x = 1$ .

b)  $U = \mathbb{N}$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $n = m + 1$ .

**NEM.**  $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$  egyszerre nem teljesülhet.

c)  $U = 2^{\mathbb{N}}$ , minden  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ -re  $I(p)(A, B) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $A \subseteq B$ .



Az alábbi  $\mathcal{A} = (U, I)$  struktúrák közül melyik modellje az  $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$  formulának?

a)  $U = \{0, 1, 2, \dots\} (= \mathbb{N})$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $m < n$ .

**IGEN.**  $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$  modellje a formula magjának, hiszen  $x = 1 < y = 3, z = 2 < y = 3$  és  $x = 1 < z = 2$ , de **nem**  $z = 2 < x = 1$ .

b)  $U = \mathbb{N}$ , minden  $m, n \in \mathbb{N}$ -re  $I(p)(m, n) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $n = m + 1$ .

**NEM.**  $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$  egyszerre nem teljesülhet.

c)  $U = 2^{\mathbb{N}}$ , minden  $A, B \subseteq \mathbb{N}$ -re  $I(p)(A, B) = 1$  akkor és csak akkor, ha  $A \subseteq B$ .

**IGEN.**  $\mathcal{A}_{[x \mapsto \{1\}, y \mapsto \{1, 2, 3\}, z \mapsto \{1, 2\}]}$  modellje a formula magjának.

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a)  $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a)  $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen  $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$ , ahol

$$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \rightarrow \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$I(f) : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1,$$

$\varphi(z) = 1$ , különben  $\varphi$  tetszőleges.

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a)  $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen  $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$ , ahol

$$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \rightarrow \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$I(f) : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1,$$

$\varphi(z) = 1$ , különben  $\varphi$  tetszőleges.

Ekkor  $\forall x \forall y P(x, y, f(z)) = „\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+ \text{-re } x + y \geq 1 + 1”$  igaz, azaz  $\mathcal{A}_1 \models F$ .

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a)  $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen  $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$ , ahol

$$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \rightarrow \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$$I(f) : \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1,$$

$\varphi(z) = 1$ , különben  $\varphi$  tetszőleges.

Ekkor  $\forall x \forall y P(x, y, f(z)) = „\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+ \text{-re } x + y \geq 1 + 1”$  **igaz**, azaz  $\mathcal{A}_1 \models F$ .

De ha  $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi')$  ugyanaz a modell kivéve, hogy  $\varphi'(z) = 13$ , akkor „ $\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+ \text{-ra } x + y \geq 13 + 1$ ” **nem igaz**, azaz  $\mathcal{A}_2 \not\models F$ ,  $\mathcal{A}_2$  nem modellje  $F$ -nek.

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b)  $F = \forall x \forall y ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y)$

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b)  $F = \forall x \forall y ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y)$

A formula a  $p$  reláció antiszimmetrikus tulajdonságát fejezi ki.

$$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, I, \varphi),$$

ahol  $I(p) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $I(p)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$  modellje a formulának, ( $\varphi$  tetszőleges).

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b)  $F = \forall x \forall y ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y)$

A formula a  $p$  reláció antiszimmetrikus tulajdonságát fejezi ki.

$$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, I, \varphi),$$

ahol  $I(p) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ ,  $I(p)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x \leq y \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$  modellje

a formulának, ( $\varphi$  tetszőleges).

De  $\mathcal{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, I, \varphi)$ , ahol  $I(p) : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0, 1\}$ ,

$$I(p)(A, B) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben,} \end{cases} \quad (\varphi \text{ tetszőleges})$$

Nem modellje a formulának.



**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

c)  $F = \forall x \exists y (f(y) = x \wedge \neg \exists z (f(z) = x \wedge \neg (y = z)))$

**FZ2 I/1** Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

c)  $F = \forall x \exists y (f(y) = x \wedge \neg \exists z (f(z) = x \wedge \neg (y = z)))$

A formula azt fejezi ki, hogy az  $f$  függvény bijektív függvény, azaz szürjektív (= minden elem képpé válik) és injektív (=különböző elemek képe is különböző).

Ezért egy modell akkor és csak akkor elégíti ki az  $F$  formulát, ha benne az  $f$  függvényt bijektív függvénynek interpretáljuk.  
Részletesen HF.

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus)  
predikátumszimbólumok használhatók:

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátumszimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátumszimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

**FZ2 I/3.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű!** Az = reláció használható.



**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátumszimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

**FZ2 I/3.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű!** Az = reláció használható.

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$$

Vagy

**FZ2 I/2.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű!**

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátumszimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

**FZ2 I/3.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű!** Az = reláció használható.

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$$

Vagy

$$\forall x ((x = c) \vee (x = d)).$$

**FZ2 I/9.** Legyen  $\mathcal{A} = (U, I)$ ,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és  $\mathcal{A} \models F$ .

Tartalmazhat-e az  $I(p)$  reláció gráfja az  $U$  halmazon kört? A választ indokoljuk!

(Az  $I(p)$  reláció grájában a szögpontok  $U$  elemei és tetszőleges  $u_1, u_2 \in U$  esetén  $u_1$ -ből  $u_2$ -be pontosan akkor vezet él, ha  $I(p)(u_1, u_2)$  igaz.)

**FZ2 I/9.** Legyen  $\mathcal{A} = (U, I)$ ,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és  $\mathcal{A} \models F$ .

Tartalmazhat-e az  $I(p)$  reláció gráfja az  $U$  halmazon kört? A választ indokoljuk!

(Az  $I(p)$  reláció grájában a szögpontok  $U$  elemei és tetszőleges  $u_1, u_2 \in U$  esetén  $u_1$ -ből  $u_2$ -be pontosan akkor vezet él, ha  $I(p)(u_1, u_2)$  igaz.)

Indirekt módom igazolható.

**FZ2 I/9.** Legyen  $\mathcal{A} = (U, I)$ ,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z ((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és  $\mathcal{A} \models F$ .

Tartalmazhat-e az  $I(p)$  reláció gráfja az  $U$  halmazon kört? A választ indokoljuk!

(Az  $I(p)$  reláció gráfjában a szögpontok  $U$  elemei és tetszőleges  $u_1, u_2 \in U$  esetén  $u_1$ -ből  $u_2$ -be pontosan akkor vezet él, ha  $I(p)(u_1, u_2)$  igaz.)

Indirekt módom igazolható. Ha  $u_1, u_2, \dots, u_n = u_1$  kör lenne  $I(p)$  gráfjában, akkor a tranzitivitás többszöri felhasználásával azt kapnánk, hogy  $I(p)(u_1, u_1)$  is teljesül, ellentmondva  $F$ -nek.

**FZ2 I/12.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek minden modellje végtelen!

**FZ2 I/12.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen!**

Néhány lehetséges megoldás:

- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy

**FZ2 I/12.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen!**

Néhány lehetséges megoldás:

- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy  
$$\neg \forall x \exists y p(x, y)$$



**FZ2 I/12.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen!**

Néhány lehetséges megoldás:

- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy  
 $\wedge \forall x \exists y p(x, y)$
- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy

**FZ2 I/12.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen!**

Néhány lehetséges megoldás:

- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy  
 $\wedge \forall x \exists y p(x, y)$
- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy  
 $\wedge \forall x p(x, f(x))$

**FZ2 I/12.** Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen!**

Néhány lehetséges megoldás:

- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy  
 $\wedge \forall x \exists y p(x, y)$
- A 9. feladat  $F$  formulájához még adjuk hozzá, hogy  
 $\wedge \forall x p(x, f(x))$
- Ld. Iván Szabolcs: [Elsőrendű szemantika](http://www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/feladatok1.pdf) (gyakorlat) VI. feladat.  
[www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/feladatok1.pdf](http://www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/feladatok1.pdf)

# Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

# Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;
- b)  $x = 1$ ;
- c)  $x = 2$ ;
- d)  $x$  páros;
- e)  $x$  páratlan;
- f)  $x$  prím;

# Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;  $N(x) := \forall y S(x, y, y)$ ;
- b)  $x = 1$ ;
- c)  $x = 2$ ;
- d)  $x$  páros;
- e)  $x$  páratlan;
- f)  $x$  prím;

# Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;  $N(x) := \forall y S(x, y, y)$ ;
- b)  $x = 1$ ;  $E(x) := \forall y P(x, y, y)$ ;
- c)  $x = 2$ ;
- d)  $x$  páros;
- e)  $x$  páratlan;
- f)  $x$  prím;

# Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;  $N(x) := \forall y S(x, y, y)$ ;
- b)  $x = 1$ ;  $E(x) := \forall y P(x, y, y)$ ;
- c)  $x = 2$ ;  $K(x) := \exists z (E(z) \wedge S(z, z, x))$ ;
- d)  $x$  páros;
- e)  $x$  páratlan;
- f)  $x$  prím;



## Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;  $N(x) := \forall y S(x, y, y)$ ;
- b)  $x = 1$ ;  $E(x) := \forall y P(x, y, y)$ ;
- c)  $x = 2$ ;  $K(x) := \exists z (E(z) \wedge S(z, z, x))$ ;
- d)  $x$  páros;  $Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$ ;
- e)  $x$  páratlan;
- f)  $x$  prím;

## Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;  $N(x) := \forall y S(x, y, y)$ ;
- b)  $x = 1$ ;  $E(x) := \forall y P(x, y, y)$ ;
- c)  $x = 2$ ;  $K(x) := \exists z (E(z) \wedge S(z, z, x))$ ;
- d)  $x$  páros;  $Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$ ;
- e)  $x$  páratlan;  $Ptl(x) := \neg Ps(x)$ ;
- f)  $x$  prím;

# Feladatok VIII

**LM II.4/9.** Legyen egy nyelvben  $S$  és  $P$  háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát  $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$ , ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$

$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen  $x$  szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak  $\mathcal{A}$ -ban, ha

- a)  $x = 0$ ;  $N(x) := \forall y S(x, y, y)$ ;
- b)  $x = 1$ ;  $E(x) := \forall y P(x, y, y)$ ;
- c)  $x = 2$ ;  $K(x) := \exists z (E(z) \wedge S(z, z, x))$ ;
- d)  $x$  páros;  $Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$ ;
- e)  $x$  páratlan;  $Ptl(x) := \neg Ps(x)$ ;
- f)  $x$  prím;  $R(x) := \neg E(x) \wedge \forall y \forall z (P(y, z, x) \rightarrow E(y) \vee E(z))$ ;

# Feladatok VIII

**LM II.4/10.** Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója  $x$  és  $y$  és amelyek pontosan akkor igazak az  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $x = y$ ;
- b)  $x \leq y$ ;
- c)  $x < y$ ;
- d)  $x$  osztója  $y$ -nak;
- e)  $x$  és  $y$  ikerprímek.

**Megoldások.**

# Feladatok VIII

**LM II.4/10.** Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója  $x$  és  $y$  és amelyek pontosan akkor igazak az  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $x = y$ ;
- b)  $x \leq y$ ;
- c)  $x < y$ ;
- d)  $x$  osztója  $y$ -nak;
- e)  $x$  és  $y$  ikerprímek.

**Megoldások.**

- a)  $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$ ;

# Feladatok VIII

**LM II.4/10.** Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója  $x$  és  $y$  és amelyek pontosan akkor igazak az  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $x = y$ ;
- b)  $x \leq y$ ;
- c)  $x < y$ ;
- d)  $x$  osztója  $y$ -nak;
- e)  $x$  és  $y$  ikerprímek.

## Megoldások.

- a)  $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$ ;
- b)  $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$ ;

**LM II.4/10.** Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója  $x$  és  $y$  és amelyek pontosan akkor igazak az  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $x = y$ ;
- b)  $x \leq y$ ;
- c)  $x < y$ ;
- d)  $x$  osztója  $y$ -nak;
- e)  $x$  és  $y$  ikerprímek.

**Megoldások.**

- a)  $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$ ;
- b)  $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$ ;
- c)  $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$ ;

# Feladatok VIII

**LM II.4/10.** Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója  $x$  és  $y$  és amelyek pontosan akkor igazak az  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $x = y$ ;
- b)  $x \leq y$ ;
- c)  $x < y$ ;
- d)  $x$  osztója  $y$ -nak;
- e)  $x$  és  $y$  ikerprímek.

## Megoldások.

- a)  $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$ ;
- b)  $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$ ;
- c)  $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$ ;
- d)  $O(x, y) := \exists z P(x, z, y)$ ;



# Feladatok VIII

**LM II.4/10.** Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója  $x$  és  $y$  és amelyek pontosan akkor igazak az  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $x = y$ ;
- b)  $x \leq y$ ;
- c)  $x < y$ ;
- d)  $x$  osztója  $y$ -nak;
- e)  $x$  és  $y$  ikerprímek.

## Megoldások.

- a)  $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$ ;
- b)  $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$ ;
- c)  $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$ ;
- d)  $O(x, y) := \exists z P(x, z, y)$ ;
- e)  $I(x, y) := R(x) \wedge R(y) \wedge \exists z [K(z) \wedge (S(x, z, y) \vee S(y, z, x))]$ .

**LM II.4/11.** Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója  $x$ ,  $y$  és  $z$ , és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $z$  az  $x$  és  $y$  legkisebb közös többszöröse;
- b)  $z$  az  $x$  és  $y$  legnagyobb közös osztója.

**LM II.4/11.** Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója  $x$ ,  $y$  és  $z$ , és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $z$  az  $x$  és  $y$  legkisebb közös többszöröse;
- b)  $z$  az  $x$  és  $y$  legnagyobb közös osztója.

**a) megoldása**

$$\exists uP(x, u, z) \wedge \exists vP(y, v, z) \wedge \forall t[\exists uP(x, u, t) \wedge \exists vP(y, v, t) \rightarrow (z \leq t)]$$

**LM II.4/11.** Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója  $x$ ,  $y$  és  $z$ , és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, ha

- a)  $z$  az  $x$  és  $y$  legkisebb közös többszöröse;
- b)  $z$  az  $x$  és  $y$  legnagyobb közös osztója.

**a) megoldása**

$$\exists uP(x, u, z) \wedge \exists vP(y, v, z) \wedge \forall t[\exists uP(x, u, t) \wedge \exists vP(y, v, t) \rightarrow (z \leq t)]$$

**b) HF.**

# Feladatok X

**LM II.4/12.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az összeadás kommutatív;
- b) az összeadás asszociatív;
- c) a szorzás kommutatív;
- d) a szorzás asszociatív;
- e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;
- f) a prímszámok halmaza végtelen;
- g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a **négy-négyzetszám-tétel**);
- h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.

# Feladatok X

**LM II.4/12.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az összeadás kommutatív;
  - b) az összeadás asszociatív;
  - c) a szorzás kommutatív;
  - d) a szorzás asszociatív;
  - e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;
  - f) a prímszámok halmaza végtelen;
  - g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a **négy-négyzetszám-tétel**);
  - h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.
- d)**  $\forall x \forall y \forall z \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 (P(x, y, u_1) \wedge P(u_1, z, u_2) \wedge P(y, z, v_1) \wedge P(x, v_1, v_2) \rightarrow u_2 = v_2)$

# Feladatok X

**LM II.4/12.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az összeadás kommutatív;
- b) az összeadás asszociatív;
- c) a szorzás kommutatív;
- d) a szorzás asszociatív;
- e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;
- f) a prímszámok halmaza végtelen;
- g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a **négy-négyzetszám-tétel**);
- h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.
- d)  $\forall x \forall y \forall z \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 (P(x, y, u_1) \wedge P(u_1, z, u_2) \wedge P(y, z, v_1) \wedge P(x, v_1, v_2) \rightarrow u_2 = v_2)$
- f)  $\forall x \exists y (x \leq y \wedge R(y))$

**LM II.4/13.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;
- b) a prímszámok halmaza véges;
- c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;
- d) minden számnál van kisebb szám;
- e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok  $\mathcal{A}$ -ban?



**LM II.4/13.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;
- b) a prímszámok halmaza véges;
- c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;
- d) minden számnál van kisebb szám;
- e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok  $\mathcal{A}$ -ban?

**LM II.4/14.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az ikerprímek halmaza végtelen;
- b) minden kettőnél nagyobb páros szám két prímszám összege.

**LM II.4/13.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;
- b) a prímszámok halmaza véges;
- c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;
- d) minden számnál van kisebb szám;
- e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok  $\mathcal{A}$ -ban?

**LM II.4/14.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy

- a) az ikerprímek halmaza végtelen;
- b) minden kettőnél nagyobb páros szám két prímszám összege.

**Megjegyzés.** A fenti két állítás a számelmélet két híres a maig napig bizonyítatlan sejtése az **ikerprím-sejtés** és a **(páros) Goldbach-sejtés**.

**LM II.4/15.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy a

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van

**LM II.4/15.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy a

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van

**LM II.4/16.** Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott  $\mathcal{A}$  modellben, azt fejezi ki, hogy a következő egyenletrendszernek nincs megoldása:

$$3x - y = 0,$$

$$x + y = 2.$$

- HF, a kimaradt példák és még **FZ2 I/7, 8, 13**.
- HF, a természetes számokra vonatkozó formulák felírása, **az előadáson bevezetett jelkészlettel** (amikor a műveletek  $+$  és  $\cdot$  függvényszimbólumként és nem az  $S$  és  $P$  predikátumszimbólumokkal vannak kifejezve. Ugye mennyivel könnyebb pl. **LM II.4/15**. és **LM II.4/16**.?)
- HF\* (nehezebb példák): **FZ2 I/6, 14** és mutassuk meg, hogy **FZ2 I/14** nem igaz, ha  $F = \exists x_1 \dots \exists x_n F^*$  alakú, vagy ha  $F^*$  tartalmaz függvényszimbólumot.
- Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a **kielégíthetőség, tautológia, logikai következmény** fogalma.
- Az **FZ1 "Ítéletkalkulus"** c. feladatsor is kell majd.  
Letölthető:  
[www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps](http://www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps)