

Logika és informatikai alkalmazásai

3. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: #31-#41, #52-#58

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps

- **Critical Thinking Webpage:**
philosophy.hku.hk/think

Az ítéletkalkulus a predikátumkalkulus speciális esete

Az *ítéletkalkulus* vagy *zérusrendű logika*, az elsőrendű logikának (a predikátum kalkulusnak) azzal a speciális esetével (is) azonosítható, amelyben nincsenek függvényyszimbólumok és a predikátum szimbólumok is mind 0 változósak, azaz logikai konstansok.

Ekkor nincs szükségünk változókra és kvantorokra, a modell fogalma, pedig a konstans predikátumszimbólumokhoz rendelt 0 vagy 1 logikai érték megadására egyszerűsödik:

$$\mathcal{A} : \mathcal{Pred} \rightarrow \{0, 1\}.$$

Ezért zérusrendű logikában a konstans predikátumszimbólumokat **ítéletváltozóknak** a modellt pedig az ítéletváltozók **kiértékelésének**, vagy **változóhozrendelésnek** is hívjuk. Jelölése: $\mathcal{A}(p)$, a p ítéletváltozó értéke az $\mathcal{A}$ modellben.

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák!

a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G);$

b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G);$

c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G));$

d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F)).$

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák!

a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G);$

b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G);$

c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G));$

d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F)).$

c) megoldása. Igazságtábla módszerrel:

A sorokban F -nek és G -nek minden lehetséges igazságértéke fel van sorolva.

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák!

a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G);$

b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G);$

c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G));$

d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F)).$

c) megoldása. Igazságtábla módszerrel:

A sorokban F -nek és G -nek minden lehetséges igazságértéke fel van sorolva.

$(F$	$\rightarrow$	$G)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	F	$\vee$	$(F$	$\wedge$	$G))$
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák!

a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G);$

b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G);$

c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G));$

d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F)).$

c) megoldása. Igazságtábla módszerrel:

A sorokban F -nek és G -nek minden lehetséges igazságértéke fel van sorolva.

$(F$	$\rightarrow$	$G)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	F	$\vee$	$(F$	$\wedge$	$G))$
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Ha a kimenet

(amit a legkülső műveleti jel alatt van)

- mindig 1 szerepel $\Leftrightarrow$ a formula **tautológia**;
- van 1-es $\Leftrightarrow$ **kielégíthető**;
- mindig 0 szerepel $\Leftrightarrow$ **kielégíthetetlen**;

Az indirekt igazságtábla módszerrel:

Ez a módszer azt jelenti, hogy csak azt a sort (sorokat) írom le az igazságtáblából, melyek végeredménye nem felelnek meg a bizonyítandó állításnak, majd a részeredményekre visszafele következtetve ellentmondásra jutunk.

Az indirekt igazságtábla módszerrel:

Ez a módszer azt jelenti, hogy csak azt a sort (sorokat) írom le az igazságtáblából, melyek végeredménye nem felelnek meg a bizonyítandó állításnak, majd a részeredményekre visszafele következtetve ellentmondásra jutunk.

A következtetésekhez többek között az alábbiakat lehet használni:

Az indirekt igazságtábla módszerrel:

Ez a módszer azt jelenti, hogy csak azt a sort (sorokat) írrom le az igazságtáblából, melyek végeredménye nem felelnek meg a bizonyítandó állításnak, majd a részeredményekre visszafele következtetve ellentmondásra jutunk.

A következtetésekhez többek között az alábbiakat lehet használni:

$$\left(\begin{array}{c} A \\ 1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} B \\ 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{c} A \\ 1 \end{array} \wedge \begin{array}{c} B \\ 1 \end{array} \right)$$

Az indirekt igazságtábla módszerrel:

Ez a módszer azt jelenti, hogy csak azt a sort (sorokat) írunk le az igazságtáblából, melyek végeredménye nem felelnek meg a bizonyítandó állításnak, majd a részeredményekre visszafele következtetve ellentmondásra jutunk.

A következtetésekhez többek között az alábbiakat lehet használni:

$$\begin{pmatrix} A & \wedge & B \\ 1 & & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & \wedge & B \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & \vee & B \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & \vee & B \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Az indirekt igazságtábla módszerrel:

Ez a módszer azt jelenti, hogy csak azt a sort (sorokat) írom le az igazságtáblából, melyek végeredménye nem felelnek meg a bizonyítandó állításnak, majd a részeredményekre visszafele következtetve ellentmondásra jutunk.

A következtetésekhez többek között az alábbiakat lehet használni:

$$\left(\begin{array}{c} A \wedge B \\ 1 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc} A & B \\ 1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} A \vee B \\ 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc} A & B \\ 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ 0 \end{array} \right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc} A & B \\ 1 & 0 \end{array} \right)$$

Az indirekt igazságtábla módszerrel:

Ez a módszer azt jelenti, hogy csak azt a sort (sorokat) írom le az igazságtáblából, melyek végeredménye nem felelnek meg a bizonyítandó állításnak, majd a részeredményekre visszafele következtetve ellentmondásra jutunk.

A következtetésekhez többek között az alábbiakat lehet használni:

$$\begin{array}{c} (A \wedge B) \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} (A \wedge B) \\ 1 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (A \vee B) \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} (A \vee B) \\ 0 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (A \rightarrow B) \\ 0 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} (A \rightarrow B) \\ 1 \quad 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (A \leftrightarrow B) \\ 1 \\ 1 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{cc} (A \leftrightarrow B) \\ 0 \quad 0 \\ 1 \quad 1 \end{array} \text{ vagy } \text{Azaz, utolsó}$$

esetben a balról jobbra következtetés nem egyértelmű, ezért mindkét esetben (azaz sorban) ellentmondásra kell jutnunk!

d) megoldása

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ (F \rightarrow G) & \leftrightarrow & ((\neg G) \rightarrow (\neg F)) & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{cccc} 5 & 6 & 7 & 8 \quad 9 \\ ((\neg G) \rightarrow (\neg F)) & \rightarrow & (\neg F) &) &) \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

d) megoldása

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$(F \rightarrow G)$			$\leftrightarrow$	$((\neg G) \rightarrow (\neg F))$				
1	0	0	0	1	0	1	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	1

- #4=0 indirekt feltevés alapján;

d) megoldása

1	2	3	4	5	6	7	8	9								
(	F	→	G	)	↔	(	(	¬	G	)	→	(	¬	F	)	)
1	0	0	0	1	0	1	0	1								
1	1	0	0	1	0	0	0	1								

- #4=0 indirekt feltevés alapján;
- #2 és #7 rendre 0, 1 **vagy** 1, 0 két sorba szétválasztva;

d) megoldása

1	2	3	4	5	6	7	8	9								
(	F	→	G	)	↔	(	(	¬	G	)	→	(	¬	F	)	)
1	0	0	0	1	0	1	0	1								
1	1	0	0	1	0	0	0	1								

- #4=0 indirekt feltevés alapján;
- #2 és #7 rendre 0, 1 **vagy** 1, 0 két sorba szétválasztva;
- 1. sor: #1 = 1 és #3= 0 → def. alapján;

d) megoldása

1	2	3	4	5	6	7	8	9								
(	F	→	G	)	↔	(	(	¬	G	)	→	(	¬	F	)	)
1	0	0	0	1	0	1	0	1								
1	1	0	0	1	0	0	0	1								

- #4=0 indirekt feltevés alapján;
- #2 és #7 rendre 0, 1 **vagy** 1, 0 két sorba szétválasztva;
- 1. sor: #1 = 1 és #3= 0 → def. alapján;
- 1. sor: #6 = 0 és #9= 1 változó értékének másolása;

d) megoldása

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & & 4 & & 5 & 6 & & 7 & & 8 & 9 \\ (& F & \rightarrow & G &) & \leftrightarrow & (& (& \neg & G &) & \rightarrow & (& \neg & F &) &) \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 1 & & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & & 0 & & 1 & 0 & & 0 & & 0 & 1 \end{array}$$

- #4=0 indirekt feltevés alapján;
- #2 és #7 rendre 0, 1 **vagy** 1, 0 két sorba szétválasztva;
- 1. sor: #1 = 1 és #3= 0 $\rightarrow$ def. alapján;
- 1. sor: #6 = 0 és #9= 1 változó értékének másolása;
- 1. sor: #5 = 1 és #8= 0 $\neg$ def. alapján;

d) megoldása

1	2	3	4	5	6	7	8	9								
(	F	→	G	)	↔	(	(	¬	G	)	→	(	¬	F	)	)
1	0	0	0	1	0	1	0	1								
1	1	0	0	1	0	0	0	1								

- #4=0 indirekt feltevés alapján;
- #2 és #7 rendre 0, 1 **vagy** 1, 0 két sorba szétválasztva;
- 1. sor: #1 = 1 és #3= 0 → def. alapján;
- 1. sor: #6 = 0 és #9= 1 változó értékének másolása;
- 1. sor: #5 = 1 és #8= 0 ¬ def. alapján;
- 1. sor: **ellentmondás**: #7=0 következne, de ott már #7=1 szerepel.

d) megoldása

1	2	3	4	5	6	7	8	9								
(	F	→	G	)	↔	(	(	¬	G	)	→	(	¬	F	)	)
1	0	0	0	1	0	1	0	1								
1	1	0	0	1	0	0	0	1								

- #4=0 indirekt feltevés alapján;
- #2 és #7 rendre 0, 1 **vagy** 1, 0 két sorba szétválasztva;
- 1. sor: #1 = 1 és #3= 0 → def. alapján;
- 1. sor: #6 = 0 és #9= 1 változó értékének másolása;
- 1. sor: #5 = 1 és #8= 0 ¬ def. alapján;
- 1. sor: **ellentmondás**: #7=0 következne, de ott már #7=1 szerepel.
- A 2. sor kitöltése és az ellentmondás pl. #2 értékén hasonló.

Egy kicsit komolyabb feladat

FZ1 I/6. Legyenek F és G az ítéletkalkulus formulái. Tegyük fel, hogy $\models (F \rightarrow G)$, továbbá, hogy F -nek és G -nek **nincs közös ítéletváltozója**. Mutassuk meg, hogy ekkor F kielégíthetetlen vagy G tautológia. Mutassuk meg, hogy a bizonyításhoz szükséges feltenni, hogy ne legyen F -nek és G -nek közös ítéletváltozója.

FZ1 I/6. Legyenek F és G az ítéletkalkulus formulái. Tegyük fel, hogy $\models (F \rightarrow G)$, továbbá, hogy F -nek és G -nek **nincs közös ítéletváltozója**. Mutassuk meg, hogy ekkor F kielégíthetetlen vagy G tautológia. Mutassuk meg, hogy a bizonyításhoz szükséges feltenni, hogy ne legyen F -nek és G -nek közös ítéletváltozója.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$\begin{aligned} \models F \rightarrow G &\stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \mathcal{A} : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\} \text{ kiértékelésre } \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1 \\ &\iff \forall \mathcal{A} \text{ kiértékelésre } (\mathcal{A}(F) = 0 \text{ vagy } \mathcal{A}(G) = 1) \end{aligned}$$

FZ1 I/6. Legyenek F és G az ítéletkalkulus formulái. Tegyük fel, hogy $\models (F \rightarrow G)$, továbbá, hogy F -nek és G -nek **nincs közös ítéletváltozója**. Mutassuk meg, hogy ekkor F kielégíthetetlen vagy G tautológia. Mutassuk meg, hogy a bizonyításhoz szükséges feltenni, hogy ne legyen F -nek és G -nek közös ítéletváltozója.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$\models F \rightarrow G \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \mathcal{A} : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\} \text{ kiértékelésre } \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1 \\ \iff \forall \mathcal{A} \text{ kiértékelésre } (\mathcal{A}(F) = 0 \text{ vagy } \mathcal{A}(G) = 1)$$

- I. Ha most $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A}(F) = 0$ akkor F kielégíthetetlen.

FZ1 I/6. Legyenek F és G az ítéletkalkulus formulái. Tegyük fel, hogy $\models (F \rightarrow G)$, továbbá, hogy F -nek és G -nek **nincs közös ítéletváltozója**. Mutassuk meg, hogy ekkor F kielégíthetetlen vagy G tautológia. Mutassuk meg, hogy a bizonyításhoz szükséges feltenni, hogy ne legyen F -nek és G -nek közös ítéletváltozója.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$\models F \rightarrow G \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall \mathcal{A} : \text{Var} \rightarrow \{0, 1\} \text{ kiértékelésre } \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1 \\ \iff \forall \mathcal{A} \text{ kiértékelésre } (\mathcal{A}(F) = 0 \text{ vagy } \mathcal{A}(G) = 1)$$

- I. Ha most $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A}(F) = 0$ akkor F kielégíthetetlen.
- II. Ha van olyan $\mathcal{A}'$ kiértékelés, hogy $\mathcal{A}'(F) \neq 0$ akkor meg kell mutatnunk, hogy G tautológia.

II. igazolásához, vegyünk egy tetszőleges $\tilde{A}$ kiértékelést.

II. igazolásához, vegyünk egy tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelést.
Mivel F -nek és G -nek nincs közös ítéletváltozója, készíthetünk egy olyan $\mathcal{B}$ kiértékelés melyre

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} \mathcal{A}'(p_i) & \text{ha } p_i \in \text{Var}(F) \\ \tilde{\mathcal{A}}(p_i) & \text{ha } p_i \in \text{Var}(G) \end{cases}$$

II. igazolásához, vegyünk egy tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelést.
Mivel F -nek és G -nek nincs közös ítéletváltozója, készíthetünk egy olyan $\mathcal{B}$ kiértékelés melyre

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} \mathcal{A}'(p_i) & \text{ha } p_i \in \text{Var}(F) \\ \tilde{\mathcal{A}}(p_i) & \text{ha } p_i \in \text{Var}(G) \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{B}(F \rightarrow G) = 1$ mert $F \rightarrow G$ tautológia, de $\mathcal{B}(F) = \mathcal{A}'(F) = 1$ ezért $\mathcal{B}(G) = 1$. Mivel $\tilde{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{B}(G) = 1$ teljesül tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelésre, ezért $\models G$.

II. igazolásához, vegyünk egy tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelést.
Mivel F -nek és G -nek nincs közös ítéletváltozója, készíthetünk egy olyan $\mathcal{B}$ kiértékelés melyre

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} \mathcal{A}'(p_i) & \text{ha } p_i \in \text{Var}(F) \\ \tilde{\mathcal{A}}(p_i) & \text{ha } p_i \in \text{Var}(G) \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{B}(F \rightarrow G) = 1$ mert $F \rightarrow G$ tautológia, de $\mathcal{B}(F) = \mathcal{A}'(F) = 1$ ezért $\mathcal{B}(G) = 1$. Mivel $\tilde{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{B}(G) = 1$ teljesül tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelésre, ezért $\models G$.

A nincs közös ítéletváltozójuk feltétel valóban szükséges. Pl.
 $F = p \wedge q, G = p$ esetén $\models F \rightarrow G$ teljesül de F kielégíthető és G nem tautológia.

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza **kielégíthető** ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazzá teszi, azaz $\exists \mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$ -ra $\mathcal{A} \models F$.

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza **kielégíthető** ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazgá teszi, azaz $\exists \mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$ -ra $\mathcal{A} \models F$.

FZ1 I/8. Kielégíthetők-e a következő formulahalmazok?

a) $\{p, q, p \rightarrow r, \neg r\}$

b) $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \dots\}$

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza **kielégíthető** ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazgá teszi, azaz $\exists \mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$ -ra $\mathcal{A} \models F$.

FZ1 I/8. Kielégíthetők-e a következő formulahalmazok?

a) $\{p, q, p \rightarrow r, \neg r\}$

b) $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \dots\}$

a) NEM. Ha az első kettő és az utolsó formula igaz egy $\mathcal{A}$ modellben, akkor szükségképpen $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(q) = 1$ és $\mathcal{A}(r) = 0$, de ekkor az implikáció definíciója miatt $\mathcal{A} \not\models p \rightarrow r$.

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza **kielégíthető** ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazgá teszi, azaz $\exists \mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$ -ra $\mathcal{A} \models F$.

FZ1 I/8. Kielégíthetők-e a következő formulahalmazok?

a) $\{p, q, p \rightarrow r, \neg r\}$

b) $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \dots\}$

a) NEM. Ha az első kettő és az utolsó formula igaz egy $\mathcal{A}$ modellben, akkor szükségképpen $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(q) = 1$ és $\mathcal{A}(r) = 0$, de ekkor az implikáció definíciója miatt $\mathcal{A} \not\models p \rightarrow r$.

b) IGEN.

Legyen például $\mathcal{A}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha } i \text{ páratlan} \\ 0 & \text{ha } i \text{ páros} \end{cases}$ (vagy fordítva)

FZ1 I/9. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.

FZ1 I/9. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.

Megoldás:

$$\{x_1 \leftrightarrow x_2, x_2 \leftrightarrow x_3, x_3 \leftrightarrow \neg x_1\}$$

FZ1 I/9. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.

Megoldás:

$$\{X_1 \leftrightarrow X_2, X_2 \leftrightarrow X_3, X_3 \leftrightarrow \neg X_1\}$$

Általánosítása:

$$\{X_1 \leftrightarrow X_2, X_2 \leftrightarrow X_3, \dots, X_{n-1} \leftrightarrow X_n, X_n \leftrightarrow \neg X_1\}$$

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

- a) Ha $\models (F \rightarrow G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;
- b) Ha $F \rightarrow G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

- a) Ha $\models (F \rightarrow G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;
- b) Ha $F \rightarrow G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

- a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt) Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ kiértékelés: $\mathcal{A}(G) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0 \Rightarrow$ ellentmond annak, hogy $\models F \rightarrow G$.

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

- a) Ha $\models (F \rightarrow G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;
- b) Ha $F \rightarrow G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

- a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt) Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ kiértékelés: $\mathcal{A}(G) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0 \Rightarrow$ ellentmond annak, hogy $\models F \rightarrow G$.
- b) **NEM IGAZ.** Pl: $F = p$, $G = \perp$ esetén.

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
- b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.
- c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
- b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.
- c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

- a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ -é is.

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
- b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.
- c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

- a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ -é is.
- b) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
- b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.
- c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

- a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ -é is.
- b) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor
 - I.eset** Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
- b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.
- c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

- a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ -é is.
- b) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor
 - I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$
 - II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F\}$, így $\Gamma \cup \{F\} \models G$ miatt $\mathcal{A}(G) = 1$. Ezért $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;
- b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.
- c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

- a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ -é is.
- b) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor
 - I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \Rightarrow \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$
 - II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F\}$, így $\Gamma \cup \{F\} \models G$ miatt $\mathcal{A}(G) = 1$. Ezért $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$
- c) $\Gamma \models F \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen. Ez indirekt bizható:
Tfh. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A}$ kiértékelés, melyre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg F\}$.
Ha most $\mathcal{A}(G) = 0$, akkor $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ nem teljesül.
Ha viszont $\mathcal{A}(G) = 1$, akkor $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$ nem teljesül.
ELLENTMONDÁS!

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
- e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
- e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
- e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

- d) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1) \Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$. Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
- e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

- d) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1) \Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$. Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.
- e) ID Tfh. $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \Delta$.

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
- e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

- d) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1) \Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$. Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.
- e) ID Tfh. $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \Delta$.
l.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0$, akkor $\Gamma \models F$ nem teljesül.

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

- d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;
- e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

- d) $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\} \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1 \Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1) \Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$. Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.
- e) ID Tfh. $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \Delta$.
 - I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0$, akkor $\Gamma \models F$ nem teljesül.
 - II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\Delta \models \neg F$ nem teljesül.ELLENTMONDÁS!!!

Log. következmények az ítéletkalkulusban.

Vizsgáljuk meg indirekt igazságtábla módszerrel az alábbi logikai következtetések helyességét, amennyiben a következtetés nem áll fenn adjunk is meg egy olyan ítéletváltozó kiértékelést, mely a feltételeket kielégíti a következményt azonban nem.

- a) $(P \rightarrow (Q \wedge (R \rightarrow S))), P, \neg S \models \neg(Q \wedge R)$
- b) $(P \leftrightarrow (R \rightarrow (P \vee \neg Q))), \neg(R \rightarrow (P \vee Q)) \models Q$
- c) $(\neg(P \wedge Q) \wedge \neg(\neg P \vee \neg Q)) \models \neg(\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q))$
- d) $\neg((\neg P \wedge Q) \vee (R \rightarrow S)), (\neg(\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg(R \rightarrow S)) \models (\neg((R \rightarrow S) \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \vee (R \leftrightarrow S)))$
- e) $((((P \vee Q) \rightarrow R) \leftrightarrow ((\neg P \wedge \neg Q) \leftrightarrow R)) \models (P \vee Q)$
- f) $(P \rightarrow (Q \wedge \neg R)), (\neg P \vee \neg(\neg Q \vee \neg S)) \models (S \rightarrow (\neg P \vee T))$
- g) $(\neg R \rightarrow \neg Q), ((\neg P \wedge R) \wedge \neg Q) \models \neg(P \leftrightarrow (\neg R \vee Q))$

Ez a feladat innen származik és ott meg is oldható interaktív módon: Critical Thinking Webpage:

philosophy.hku.hk/think/sl/indirect-ex.php

FZ1 II/3. c Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

Konjunktív és diszjunktív normálformára hozás

FZ1 II/3. c Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

1.lépés: $F \rightarrow G$ helyett $\neg F \vee G$

$F \leftrightarrow G$ helyett $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s) \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \vee s) \equiv$$

$$\neg \left((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \right) \vee (r \vee s) \equiv$$

Konjunktív és diszjunktív normálformára hozás

FZ1 II/3. c Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

1.lépés: $F \rightarrow G$ helyett $\neg F \vee G$

$F \leftrightarrow G$ helyett $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s) \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \vee s) \equiv \\ \neg \left((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \right) \vee (r \vee s) \equiv$$

2.lépés: $\neg$ bevitele

$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$, és $\neg\neg F \equiv F$ alapján.

$$\equiv \left(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \right) \vee (r \vee s) \equiv \left((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee \right. \\ \left. (\neg\neg q \wedge \neg p) \right) \vee r \vee s \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r \vee s.$$

Ez már DNF, a harmadik lépésre most nincs szükség.

A KNF-hez szükséges még a

A KNF-hez szükséges még a

3. lépés: a disztributivitás használata

A KNF-hez szükséges még a

3. lépés: a disztributivitás használata

KNF-nál a $\wedge$ kivitele: $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$
alapján.

A KNF-hez szükséges még a

3. lépés: a disztributivitás használata

KNF-nál a $\wedge$ kivitele: $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$
alapján.

DNF-nál a $\vee$ kivitele: $(F \vee G) \wedge H \equiv (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$
alapján.

$$\begin{aligned} & \left((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \right) \vee r \vee s \equiv \\ & \left((p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \right) \vee r \vee s \equiv \\ & \equiv \left((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p) \right) \vee r \vee s \equiv \\ & (p \vee q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \quad \text{Ez már KNF!} \end{aligned}$$

A **FZ1 II/3.** feladat megoldásai:

a) $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
 $(\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

b) $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
 $\neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (r \wedge q) \vee (\neg q \vee \neg r)$

c) $(\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s)$
 $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee r \vee s$

d) $\uparrow$ (tautológia) (üres KNF)

pl: $p \vee \neg p$ **VIGYÁZAT** az üres DNF azonosan HAMIS!

e) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$
 $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

A **FZ1 II/3.** feladat megoldásai:

a) $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
 $(\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

b) $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
 $\neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (r \wedge q) \vee (\neg q \vee \neg r)$

c) $(\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s)$
 $(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee r \vee s$

d) $\uparrow$ (tautológia) (üres KNF)

pl: $p \vee \neg p$ VIGYÁZAT az üres DNF azonosan HAMIS!

e) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$
 $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Konjunktív és diszjunktív normálformák ellenőrzéséhez (és még sok minden máshoz) ajánlom még a következő linket:

logik.phl.univie.ac.at/~chris/formular-uk.html

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 I/1, 2, 4, 5, 12.**
- HF* (nehezebb példa): **FZ1 I/7.**
- Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a **Boole függvények és formulák kapcsolata és az adekvát (teljes) rendszer fogalma.**