

Logika és informatikai alkalmazásai

4. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: #52-#63, #70-#76

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps

LM I. A. Lavrov – L. L. Makszimova: Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987

Teljes rendszerek I

FZ1. II/8. Mutassuk meg, hogy $\{\neg, \rightarrow\}$ adekvát, azaz teljes rendszert alkot!

Megoldás.

$$x \vee y = \neg x \rightarrow y,$$

és a $\{\neg, \vee\}$ halmazról pedig már tudjuk, hogy teljes.

Teljes rendszerek II

LM II 2/4. Fejezzük ki

a) $\wedge$ -t és $\rightarrow$ -t a $\vee$ és a $\neg$ művelet segítségével;

- $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$, $x \rightarrow y = \neg x \vee y$;

b) $\vee$ -t és $\rightarrow$ -t a $\wedge$ és a $\neg$ művelet segítségével;

- $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y)$, $x \rightarrow y = \neg(x \wedge \neg y)$;

c) $\wedge$ -t és $\vee$ -t a $\rightarrow$ és a $\neg$ művelet segítségével;

- $x \wedge y = \neg(x \rightarrow \neg y)$, $x \vee y = \neg x \rightarrow y$;

d) $\wedge$, $\vee$, $\neg$ -t és $\rightarrow$ -t a $|$ művelet segítségével;

- $\neg x = (x|x)$, $x \wedge y = (x|y)|(x|y)$,
 $x \vee y = (x|x)|(y|y)$, $x \rightarrow y = x|(y|y)$;

e) $\neg$ -t a $\rightarrow$ és a $\downarrow$ művelet segítségével;

- $\neg x = x \rightarrow \downarrow$;

f) $\neg$ -t a $\oplus$ (kizáró vagy) a $\uparrow$ művelet segítségével;

- $\neg x = x \oplus \uparrow$;

g) $\vee$ -t az $\rightarrow$ művelet segítségével;

- $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y$;

Teljes rendszerek III

FZ1 II/6. Mutassuk meg, hogy a $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ halmaz nem adekvát (azaz nem alkot teljes rendszert.)

Megoldás. A negáció nem fejezhető ki.

Minden a halmaz műveleteiből felépített egyváltozós $f(x)$ függvényre, $f(1) = 1$, mert $1 \vee 1 = 1 \wedge 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$.

De $\neg 1 = 0$, ezért a negáció nem fejezhető ki.

Teljes rendszerek IV

LM II 2/6.

Mutassuk meg, hogy nem fejezhető ki

a) $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ segítségével;

b) $\rightarrow$, $\wedge$ és $\vee$ segítségével;

c) $\wedge$, $\vee$ és $\rightarrow$ segítségével.

a) HF.

b)

Minden a halmaz műveleteiből felépített kétváltozós $f(x, y)$ függvényre, $f(0, 0) = 0$, mert $0 \wedge 0 = 0 \vee 0 = 0$.

De $0 \rightarrow 0 = 1$, ezért az implikáció nem fejezhető ki.

Teljes rendszerek IV

c) megoldása

c) $\wedge$ nem fejezhető ki $\vee$ és $\rightarrow$ segítségével.

Azok az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ függvények, melyek kifejezhetők $\vee$ és $\rightarrow$ segítségével rendelkeznek a következő tulajdonsággal:

Létezik i , hogy $x_i = 1$ esetén mindig $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 1$ teljesül, azaz „egyetlen változó igazzá tételével az egész függvény igazzá tehető.”

$\vee$ és $\rightarrow$ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.

Az is könnyen látható, hogy ezt a tulajdonságot a függvénykompozíció megőrzi:

A külső függvényt igazzá tevő változó helyére helyettesített belső függvényt egy változóval igazzá téve az összetett függvény is igazzá tehető.

$\wedge$ ellenben nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, sem az első sem a második változójával nem tehető igazzá.

Teljes rendszerek V

FZ1 II/7. Mutassuk meg, hogy a $\neg, \leftrightarrow$ halmaz nem adekvát!
(Van olyan kétváltozós igazságtábla, ami nem fejezhető ki.)

1. Megoldás. Mutassuk meg, hogy $\neg$ -val és $\leftrightarrow$ -val csak olyan kétváltozós igazságtáblák fejezhetők ki, melyekben páros sok 1-es szerepel, így pl. $\vee$ nem fejezhető ki.

Valóban, világos, hogy $\leftrightarrow$ igazságtáblája ilyen, és hogy a $\neg$ alkalmazása megőrzi ezt a tulajdonságot. Lássuk, be hogy, ha $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ ilyen tulajdonságú, akkor $f_1 \leftrightarrow f_2$ is. (HF.)

2. Megoldás. Egy Boole-függvényt lineárisnak hívunk, ha $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$ vagy $x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n \oplus \uparrow$ alakú. Megmutatjuk, hogy $\neg$ -val és $\leftrightarrow$ -val csak lineáris függvények fejezhetők ki.

Valóban $\neg x = x \oplus \uparrow$ és $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus \uparrow$ lineáris. Továbbá, ha f és g lineáris függvények, akkor könnyen látható, hogy

$\neg f = f \oplus \uparrow$ és $f \leftrightarrow g = f \oplus g \oplus \uparrow$ szintén lineáris függvények.

(Ehhez fel kell használni, hogy $\oplus$ asszociatív és kommutatív, $x \oplus x = \downarrow$ és $x \oplus \downarrow = x$.) De például a konjunkció nem lineáris, ezért nem fejezhető ki.

Horn-formulák

Az alábbi itéletkalkulusbeli formulákat hozzuk konjunktív normálformára, majd írjuk őket „implikációs alakba” (a tagokra a $p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \dots \vee \neg q_n \equiv q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_n \rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_m$ azonosságot használva, üres konjunktció: $\uparrow$, üres diszjunktció: $\downarrow$).

Írjuk fel a formulákat a rezolúciónál használt halmazos formátumban is. Melyek közülük Horn-formulák? A Horn-formulák kielégíthetőségét vizsgáljuk meg a tanult algoritmussal.

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$

b) $p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge (\neg s \vee r))$

c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

d) $(p \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

e) $\downarrow$

f) $\uparrow$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$

Konjunktív normálformára kell hozni:

$$\begin{aligned}(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) &\equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv \\ &(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \equiv \\ &(p \rightarrow r) \wedge (p \wedge q \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow q \vee r) \equiv \\ &\{\{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{q, r\}\}\end{aligned}$$

Nem Horn-formula, mert a harmadik tag nem Horn-tag (mivel egynél több pozitív literált tartalmaz).

b) $p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv$
 $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee r) \equiv$
 $\equiv (p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge s \rightarrow r) \equiv \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg s, r\}\},$

ebben az alakban Horn-formula. Kielégíthető, legyen minden változó hamis.

Megoldások II

c)

$$(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r) \equiv q \wedge (p \vee \neg r) \equiv (\uparrow \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \equiv \{\{q\}, \{p, \neg r\}\}$$

A második (hosszú) formula nem Horn-formula, de a harmadik (egyszerűsített) már igen. Kielégíthető $\mathcal{A}(q) = 1$,

$$\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(r) = 0.$$

e) $\downarrow \equiv \uparrow \rightarrow \downarrow \equiv \{\square\}$ (csak az üres klózt tartalmazó KNF),

Horn-formula. Kielégíthetetlen.

f) $\uparrow \equiv p \vee \neg p \equiv p \rightarrow p \equiv \{\{p, \neg p\}\}$, Horn-formula, kielégíthető.

(Másik megoldás: $\emptyset$: üres, azaz egyetlen klózt sem tartalmazó KNF.)

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s) \\ \wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v, p . Azaz

$$(\boxed{p} \wedge \boxed{q} \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{v} \rightarrow \boxed{p}) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s}) \\ \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{u} \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{u})$$

Mivel nincs olyan $(q_1 \wedge q_2 \wedge \dots \wedge q_m \rightarrow \downarrow)$ tag, melynek a baloldalán **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthető, és $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(p) = 1$, $\mathcal{A}(r) = \mathcal{A}(t) = 0$ igazgá teszi.

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p) \\ \wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w) \\ \wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s}) \\ \wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v}) \\ \wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w}) \\ \wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p, q, u, w .

Mivel a $(\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow)$ a tagban a baloldalon **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthetetlen.

Jövő hétre

- ▶ HF, a kimaradt példák és még **FZ1 II/3, 4, 5, III/1, 2.**
- ▶ Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a **rezolúció alapfogalmai és algoritmusai**.