

# Logika és informatikai alkalmazásai

## 5. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

# Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: zérusrendű rezolúció: #??-#??

Feladatsorok

**FZ1** Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítétekalkulus"  
**`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps`**

# Rezolúció I

**FZ1. II/8.** Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a)  $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b)  $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q);$

c)  $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

**b) megoldása.** Először KNF-re kell hozni:

$$\begin{aligned} F &= \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \wedge q \equiv \\ &(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q \end{aligned}$$

$F$  mint klózik halmaza:  $F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

## A bizonyítás folytatása

**Tétel.**  $\Sigma$  formulahalmaz kielégíthetetlen  $\Leftrightarrow \square \in \text{Res}^*(\Sigma)$ .

Most  $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1.  $\{p, \neg q\} \in F$
2.  $\{\neg q\} \in F$
3.  $\{q\} \in F$
4.  $\{\square\} \text{ Res } 2,3$

Rezolúcióval levezethető az üres klóz:  $\square$

Ezért  $F$  **kielégíthetetlen**.

Ha az üres klóz nem lenne levezethető (ezt észrevesszük, mert egy idő után nem tudunk rezolúcióval újabb klózokat képezni, amikor már előállítottuk  $\text{Res}^*(\Sigma)$  minden elemét), akkor  $F$  kielégíthető lenne.

## Rezolúció II.

### FZI. V/5.

Adjuk meg a  $\text{Res}^2(F)$  klózthalmazt!

a)  $F = \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{p\}, \{q, r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\};$

b)  $F = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{\neg r\}\}.$

## b) megoldása.

|       |                     |          |                            |
|-------|---------------------|----------|----------------------------|
| 1.    | $\neg p, \neg q, r$ | $\in F$  |                            |
| 2.    | $p, r$              | $\in F$  |                            |
| 3.    | $q, r$              | $\in F$  |                            |
| 4.    | $\neg r$            | $\in F$  | 1-4.=Res <sup>0</sup> (F)  |
| <hr/> |                     |          |                            |
| 5.    | $\neg q, r$         | Res 1,2  |                            |
| 6.    | $\neg p, r$         | Res 1,3  |                            |
| 7.    | $\neg p, \neg q$    | Res 1,4  |                            |
| 8.    | $p$                 | Res 2,4  |                            |
| 9.    | $q$                 | Res 3,4  | 1-9.=Res <sup>1</sup> (F)  |
| <hr/> |                     |          |                            |
| 10.   | $r$                 | Res 2,6  |                            |
| 11.   | $\neg q$            | Res 4,5  |                            |
| 12.   | $\neg p$            | Res 4,6  | 1-12.=Res <sup>2</sup> (F) |
| <hr/> |                     |          |                            |
| 13.   | $\square$           | Res 4,10 | 1-13.=Res <sup>3</sup> (F) |

Így Res<sup>2</sup>(F)-nek **nem eleme**  $\square$  .

Különben Res<sup>4</sup>(F)=Res<sup>3</sup>(F), így Res\*(F)=Res<sup>3</sup>(F), és

$\square \in \text{Res}^*(F)$ , ezért F kielégíthetetlen.

# Tautológiáság eldöntése rezolúcióval

**3.** Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a)  $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b)  $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c)  $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d)  $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

**Tétel.**  $F$  tautológia  $\Leftrightarrow \neg F$  kielégíthetetlen.

**Megoldások.**

a)  $\neg F = (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q = \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}.$

1.  $\neg p, q \in F$

2.  $p \in F$

3.  $\neg q \in F$

4.  $q$  Res 1,2

5.  $\square$  Res 3,4

Így  $\neg F$  kielégíthetetlen, ezért  $F$  tautológia.

b) nem tautológia. c) tautológia. d) tautológia.

# Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a)  $p \rightarrow \neg q$  és  $q \rightarrow \neg p$

b)  $(p \vee q \rightarrow r)$  és  $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

**Tétel.**  $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$  kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b)  $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$  (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

- |                     |              |
|---------------------|--------------|
| 1. $\neg p, \neg q$ | $\in \Sigma$ |
| 2. $p, q$           | $\in \Sigma$ |
| 3. $\neg r$         | $\in \Sigma$ |
| 4. $\neg q, q$      | Res1, 2      |
| 5. $\neg p, p$      | Res1, 2      |

1-5. =  $\text{Res}^1(\Sigma) = \text{Res}^2(\Sigma) = \text{Res}^*(\Sigma)$ . Mivel  $\square \notin \text{Res}^*(\Sigma)$ , ezért  $\Sigma$  kielégíthető, így  $F$  és  $G$  **nem ekvivalensek**.



# Logikai következmény eldöntése rezolúcióval

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a)  $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p), \} \models r \rightarrow p$

b)  $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c)  $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$

d)  $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

**Tétel.**  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$   
kielégíthetetlen.

**Megoldások** a) Igaz    b) Igaz.    c) Nem igaz.    d) Igaz.

## a) megoldása

$$\mathbf{a)} F_1 = \underbrace{q}, F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}, G = r \rightarrow p \text{ és} \\ \neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

- |                        |              |
|------------------------|--------------|
| 1. $q$                 | $\in \Sigma$ |
| 2. $\neg r, \neg q, p$ | $\in \Sigma$ |
| 3. $r$                 | $\in \Sigma$ |
| 4. $\neg p$            | $\in \Sigma$ |
| 5. $\neg r, p$         | Res1, 2      |
| 6. $p$                 | Res3, 5      |
| 7. $\square$           | Res4, 6      |

Ezért  $\Sigma$  kielégíthetetlen, ami azt mutatja, hogy **a logikai következtetés fennáll.**

## Logikai következmény eldöntése rezolúcióval II.

**6.** Formalizálja az alábbi mondatokat és döntse el rezolúcióval, hogy az első két mondatnak logikai következménye-e a harmadik.

$F_1$ : Ha Peti busszal utazik és a busz késik, akkor Peti nem ér oda a találkozóra.

$F_2$ : Petinek nem kell hazamennie, ha nem ér oda a találkozóra és ha rosszkedvű.

$F_3$ : Ha Petinek haza kell mennie, és Peti busszal utazik, akkor Peti nem lesz rosszkedvű, ha késik a busz.

# Megoldás

- ▶  $B = \text{„Peti busszal utazik.”}$
- ▶  $K = \text{„A busz késik.”}$
- ▶  $O = \text{„Peti odaér a találkozóra.”}$
- ▶  $H = \text{„Petinek haza kell mennie.”}$
- ▶  $R = \text{„Peti rosszkedvű (lesz).”}$
  
- ▶  $F_1 = B \wedge K \rightarrow \neg O \equiv \neg B \vee \neg K \vee \neg O;$
- ▶  $F_2 = \neg O \wedge R \rightarrow \neg H \equiv O \vee \neg R \vee \neg H;$
- ▶  $F_3 = (H \wedge B) \rightarrow (K \rightarrow \neg R);$
- ▶  $\neg F_3 = H \wedge B \wedge K \wedge R;$

A  $\Sigma = \{\{\neg B, \neg K, \neg O\}, \{O, \neg R, \neg H\}, \{H\}, \{B\}, \{K\}, \{R\}\}$

halmazból pedig levezethető az üres klóz (HF!)

**Így a logikai következtetés fennáll.**

## Házi feladat

- ▶ HF, a kimaradt példák és még **FZ1 V/3, 6, 7, 8.**
- ▶ HF\* (nehezebb példák): **FZ1 V/1, 2.**

# Követlemények a ZH-ra

1. Definíciók, tételek az előadás első 100 fóliájáról.
2. Az ítéletkelkulus alapvető algoritmikus kérdéseinek:
  - ▶ Egy  $F$  formula, vagy véges  $\Sigma$  formulahalmaz **kielégíthető-e**;
  - ▶ Egy  $F$  formula **tautológia-e** ( $\models F$ );
  - ▶ Formulák egy véges  $\Sigma$  halmazának egy  $F$  formula **logikai következménye-e** ( $\Sigma \models F$ );
  - ▶ Egy  $F$  és egy  $G$  formula **ekvivalens-e** ( $F \equiv G$ );eldöntése az alábbi módszerekkel
  - ▶ igazságtáblázattal;
  - ▶ Horn-formulák algoritmusával (persze ez csak akkor alkalmazható, ha csak Horn-klózek kielégíthetőségét kell eldönteni);
  - ▶ rezolúcióval.
3. Boole-műveletek egymással való kifejezhetősége, rendszerek teljessége és nem teljessége.
4. Elsőrendű formulák és modelljeik.

A Zh-ban lesz feladat a kiadott házifeladatok közül.