

Logika és informatikai alkalmazásai

5. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: zérusrendű rezolúció: #??-#??

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q);$

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q);$

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

b) megoldása.

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q);$

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:

$$\begin{aligned} F &= \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \wedge q \equiv \\ &(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q \end{aligned}$$

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q);$

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:

$$\begin{aligned} F &= \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \wedge q \equiv \\ &(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q \end{aligned}$$

F mint klózik halmaza:

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q);$

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:

$$\begin{aligned} F &= \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \wedge q \equiv \\ &(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q \end{aligned}$$

F mint klózok halmaza: $F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$
2. $\{\neg q\} \in F$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$
2. $\{\neg q\} \in F$
3. $\{q\} \in F$

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in \text{Res}^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$
2. $\{\neg q\} \in F$
3. $\{q\} \in F$
4. $\{\Box\} \text{ Res } 2,3$

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in \text{Res}^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$
2. $\{\neg q\} \in F$
3. $\{q\} \in F$
4. $\{\square\} \text{ Res } 2,3$

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\square$

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in \text{Res}^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$
2. $\{\neg q\} \in F$
3. $\{q\} \in F$
4. $\{\Box\} \text{ Res } 2,3$

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\Box$

Ezért F **kielégíthetetlen**.

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in \text{Res}^*(\Sigma)$.

Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \in F$
2. $\{\neg q\} \in F$
3. $\{q\} \in F$
4. $\{\square\} \text{ Res } 2,3$

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\square$

Ezért F **kielégíthetetlen**.

Ha az üres klóz nem lenne levezethető (ezt észrevesszük, mert egy idő után nem tudunk rezolúcióval újabb klózat képezni, amikor már előállítottuk $\text{Res}^*(\Sigma)$ minden elemét), akkor F kielégíthető lenne.

FZI. V/5.

Adjuk meg a $\text{Res}^2(F)$ klózhalmazt!

a) $F = \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{p\}, \{q, r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\};$

b) $F = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{\neg r\}\}.$

b) megoldása.

b) megoldása.

1.	$\neg p, \neg q, r$	$\in F$	
2.	p, r	$\in F$	
3.	q, r	$\in F$	
4.	$\neg r$	$\in F$	1-4.=Res ⁰ (F)
5.	$\neg q, r$	Res 1,2	
6.	$\neg p, r$	Res 1,3	
7.	$\neg p, \neg q$	Res 1,4	
8.	p	Res 2,4	
9.	q	Res 3,4	1-9.=Res ¹ (F)
10.	r	Res 2,6	
11.	$\neg q$	Res 4,5	
12.	$\neg p$	Res 4,6	1-12.=Res ² (F)
13.	$\square$	Res 4,10	1-13.=Res ³ (F)

Így Res²(F)-nek **nem eleme** $\square$.

Különben Res⁴(F)=Res³(F), így Res*(F)=Res³(F), és

$\square \in \text{Res}^*(F)$, ezért F kielégíthetetlen.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow \neg F$ kielégíthetetlen.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow \neg F$ kielégíthetetlen.

Megoldások.

a) $\neg F = (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q = \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}.$

1. $\neg p, q \in F$

2. $p \in F$

3. $\neg q \in F$

4. q Res 1,2

5. $\square$ Res 3,4

Így $\neg F$ kielégíthetetlen, ezért F tautológia.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow \neg F$ kielégíthetetlen.

Megoldások.

a) $\neg F = (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q = \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}.$

1. $\neg p, q \in F$

2. $p \in F$

3. $\neg q \in F$

4. q Res 1,2

5. $\square$ Res 3,4

Így $\neg F$ kielégíthetetlen, ezért F tautológia.

b) nem tautológia. c) tautológia. d) tautológia.

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1. $\neg p, \neg q$ $\in \Sigma$

2. p, q $\in \Sigma$

3. $\neg r$ $\in \Sigma$

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1. $\neg p, \neg q$ $\in \Sigma$

2. p, q $\in \Sigma$

3. $\neg r$ $\in \Sigma$

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

- | | |
|---------------------|--------------|
| 1. $\neg p, \neg q$ | $\in \Sigma$ |
| 2. p, q | $\in \Sigma$ |
| 3. $\neg r$ | $\in \Sigma$ |
| 4. $\neg q, q$ | Res1, 2 |
| 5. $\neg p, p$ | Res1, 2 |

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1. $\neg p, \neg q$	$\in \Sigma$
2. p, q	$\in \Sigma$
3. $\neg r$	$\in \Sigma$
4. $\neg q, q$	Res1, 2
5. $\neg p, p$	Res1, 2

1-5. = $\text{Res}^1(\Sigma) = \text{Res}^2(\Sigma) = \text{Res}^*(\Sigma)$.

Ekvivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

- | | |
|---------------------|--------------|
| 1. $\neg p, \neg q$ | $\in \Sigma$ |
| 2. p, q | $\in \Sigma$ |
| 3. $\neg r$ | $\in \Sigma$ |
| 4. $\neg q, q$ | Res1, 2 |
| 5. $\neg p, p$ | Res1, 2 |

1-5. = $\text{Res}^1(\Sigma) = \text{Res}^2(\Sigma) = \text{Res}^*(\Sigma)$. Mivel $\square \notin \text{Res}^*(\Sigma)$, ezért Σ kielégíthető, így F és G **nem ekvivalensek**.

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p), \} \models r \rightarrow p$

b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

- a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p), \} \models r \rightarrow p$
- b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$
- c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$
- d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

- a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p), \} \models r \rightarrow p$
- b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$
- c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$
- d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

Megoldások

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p), \} \models r \rightarrow p$

b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \dots, F_n, \neg G\}$
kielégíthetetlen.

Megoldások a) Igaz b) Igaz. c) Nem igaz. d) Igaz.

a) megoldása

$$\mathbf{a)} \ F_1 = \underbrace{q}, F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}, G = r \rightarrow p \text{ és}$$
$$\neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$$

a) megoldása

$$\mathbf{a)} \ F_1 = \underbrace{q}, F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}, G = r \rightarrow p \text{ és}$$

$$\neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

a) megoldása

$$\mathbf{a)} } F_1 = \underbrace{q}, F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}, G = r \rightarrow p \text{ és}$$

$$\neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

$$1. \ q \qquad \qquad \qquad \in \Sigma$$

$$2. \ \neg r, \neg q, p \qquad \qquad \in \Sigma$$

$$3. \ r \qquad \qquad \qquad \in \Sigma$$

$$4. \ \neg p \qquad \qquad \qquad \in \Sigma$$

a) megoldása

$$\mathbf{a)} } F_1 = \underbrace{q}, F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}, G = r \rightarrow p \text{ és}$$

$$\neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

- | | |
|------------------------|--------------|
| 1. q | $\in \Sigma$ |
| 2. $\neg r, \neg q, p$ | $\in \Sigma$ |
| 3. r | $\in \Sigma$ |
| 4. $\neg p$ | $\in \Sigma$ |
| 5. $\neg r, p$ | Res1, 2 |
| 6. p | Res3, 5 |
| 7. $\square$ | Res4, 6 |

a) megoldása

$$\mathbf{a)} } F_1 = \underbrace{q}, F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}, G = r \rightarrow p \text{ és}$$

$$\neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

- | | |
|------------------------|--------------|
| 1. q | $\in \Sigma$ |
| 2. $\neg r, \neg q, p$ | $\in \Sigma$ |
| 3. r | $\in \Sigma$ |
| 4. $\neg p$ | $\in \Sigma$ |
| 5. $\neg r, p$ | Res1, 2 |
| 6. p | Res3, 5 |
| 7. $\square$ | Res4, 6 |

Ezért Σ kielégíthetetlen, ami azt mutatja, hogy **a logikai következtetés fennáll.**

6. Formalizálja az alábbi mondatokat és döntse el rezolúcióval, hogy az első két mondatnak logikai következménye-e a harmadik.

F_1 : Ha Peti busszal utazik és a busz késik, akkor Peti nem ér oda a találkozóra.

F_2 : Petinek nem kell hazamennie, ha nem ér oda a találkozóra és ha rosszkedvű.

F_3 : Ha Petinek haza kell mennie, és Peti busszal utazik, akkor Peti nem lesz rosszkedvű, ha késik a busz.

- $B = \text{„ Peti busszal utazik.”}$
- $K = \text{„ A busz késik.”}$
- $O = \text{„ Peti odaér a találkozóra.”}$
- $H = \text{„ Petinek haza kell mennie.”}$
- $R = \text{„ Peti rosszkedvű (lesz).”}$

- $F_1 = B \wedge K \rightarrow \neg O \equiv \neg B \vee \neg K \vee \neg O;$
- $F_2 = \neg O \wedge R \rightarrow \neg H \equiv O \vee \neg R \vee \neg H;$
- $F_3 = (H \wedge B) \rightarrow (K \rightarrow \neg R);$
- $\neg F_3 = H \wedge B \wedge K \wedge R;$

A $\Sigma = \{\{\neg B, \neg K, \neg O\}, \{O, \neg R, \neg H\}, \{H\}, \{B\}, \{K\}, \{R\}\}$
halmazból pedig levezethető az üres klóz (HF!)

Így a logikai következtetés fennáll.

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 V/3, 6, 7, 8.**
- HF* (nehezebb példák): **FZ1 V/1, 2.**

Követlemények a ZH-ra

- 1 Definíciók, tételek az előadás első 100 fóliájáról.
- 2 Az ítéletkelculus alapvető algoritmikus kérdéseinek:
 - Egy F formula, vagy véges Σ formulahalmaz **kielégíthető-e**;
 - Egy F formula **tautológia-e** ($\models F$);
 - Formulák egy véges Σ halmazának egy F formula **logikai következménye-e** ($\Sigma \models F$);
 - Egy F és egy G formula **ekvivalens-e** ($F \equiv G$);eldöntése az alábbi módszerekkel
 - igazságtáblázattal;
 - Horn-formulák algoritmusával (persze ez csak akkor alkalmazható, ha csak Horn-klózek kielégíthetőségét kell eldönteni);
 - rezolúcióval.
- 3 Boole-műveletek egymással való kifejezhetősége, rendszerek teljessége és nem teljessége.
- 4 Elsőrendű formulák és modelljeik.

A Zh-ban lesz feladat a kiadott házifeladatok közül.