Logika és informatikai alkalmazásai

6. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Normálformák, Skolemizáció:

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus" `www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Egy formula

- zárt: ha nincs benne szabad változó;
- kiigazított: ha különböző kvantorok különböző változókat kötnek le és a kötött változók a szabad változóktól is különböznek.
- prenex alakú: ha a kvantorok a formula legelején vannak és az egész kvantormentes részre (azaz a formula magjára) vonatkoznak. Pl: $\forall x p(x) \rightarrow q(y)$ nem prenex alakú, de $\exists x(p(x) \rightarrow q(y))$ igen.
- Skolem normálformájú: ha $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F^*$ alakú, ahol F^* kvantormentes, $n \geq 0$.

Ekvivalens, s-ekvivalens

Két formula, F és G

- ekvivalens, ha pontosan ugyanazokban a modellekben igazak, azaz $\mathrm{Mod(F)} = \mathrm{Mod(G)}$. Jele: $F \equiv G$.
- s-ekvivalens, ha pontosan ugyanakkor kielégíthetők, azaz $\mathrm{Mod(F)} \neq \emptyset \iff \mathrm{Mod(G)} \neq \emptyset$ Jele: $F \equiv_s G$.

Pl. $\forall x p(x) \equiv \neg\exists\neg p(x)$.
De $\exists x(x \cdot x = x) \not\equiv (c \cdot c = c)$, csak $\exists x(x \cdot x = x) \equiv_s (c \cdot c = c)$.
Valóban, ha a természetes számok modelljét úgy bővítjük, hogy a c konstans interpretációja 2 legyen, akkor az első formula igaz, a második nem.
De bármely modellt, melyben $\exists x(x \cdot x = x)$ igaz, tudunk úgy módosítani, hogy módosított modellben $(c \cdot c = c)$ igaz legyen, ehhez csak a c interpretációját kell alkalmas objektumra megváltoztatnunk, ilyen objektum pedig létezni fog.
Megjegyzés. Minden F formulára vagy $F \equiv_s \uparrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthető) vagy pedig $F \equiv_s \downarrow$ (mégpedig akkor ha F

A Skolem normálformára hozás ajánlott lépései

1. lezárás
2. kiigazítás
3. $\rightarrow$ és $\equiv$ kifejezése $\neg, \vee$ és $\wedge$-sel
4. prenex alakra hozás
5. Skolemizáció
6. a formula magjának konjunktív normálformára hozása, ha azt is kérik (pl. rezolúciónál szükség lesz rá.)
7. a Skolem-függvények változóktól való függése szükségességének vizsgálata, ha én kérem :)

Megjegyzés. 2, 3, 4 és 6 ekvivalens átalakítások, 1 és 5 csak s-ekvivalensek.

FZ2 II/5a Adjunk meg a következő formulával s-ekvivalens zárt Skolem normálformájú formulát.

$$\forall x\,[\exists y\, p(x,y) \rightarrow q(y,z)] \wedge \exists y\,[\forall x\, r(x,y) \vee q(x,y)]$$

1. Lezárás

$$F = \forall x \, [\exists y \; p(x,y) \rightarrow q(y,z)] \wedge \exists y \, [\forall x \; r(x,y) \vee q(x,y)]$$

Meg kell határoznunk a szabad változó előfordulásokat. Ehhez ki kell számítanunk a kvantorok hatáskörét. Minden kvantor a következő binér (kétváltozós) műveletei jelig vagy a formula végéig köt, kivéve, ha a zárójelek mást követelnek. Most a bekeretezett változó előfordulások a szabad előfordulások:

$$F = \forall x \left[\exists y \; p(x,y) \rightarrow q(\boxed{y},\boxed{z})\right] \wedge \exists y \left[\forall x \; r(x,y) \vee q(\boxed{x},y)\right]$$

Helyettesítsünk minden szabad változót egy-egy új, a formulában még nem szereplő konstanssal. Ugyanannak a változónak az előfordulásait természetesen ugyanazzal a konstanssal helyettesítsük. A példákban az ellenőrzés megkönnyítéséhez válasszuk mondjuk a konstansoknak mindig a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ szimbólumok közül.

Így

$$F = \forall x \left[\exists y\, p(x,y) \to q(\boxed{y}, \boxed{z})\right] \wedge \exists y \left[\forall x\, r(x,y) \vee q(\boxed{x}, y)\right] \equiv_s$$
$$\equiv_s \forall x\, [\exists y\, p(x,y) \to q(c_1, c_2)] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3, y)]\,.$$

Megjegyzés. A lezárást elvégezhetnénk úgy is, hogy a formula elején egzisztenciális kvantorral kötnénk le a szabad változókat. A példánkban $F \equiv_s \exists x \exists y \exists z F$, de a Skolemizáció az egzisztenciálisan kvantifikált változókból úgy is konstansokat fog csinálni.
Ha nem egyetlen F formulánk van, hanem formuláknak egy Σ halmazával dolgozunk, akkor az egész halmazban **ugyanazokat a konstansokat használjuk** az azonos szabd változók lekötésére. Ebben az esetben a formulánként egzisztenciális kvantorokkal való lekötés nem működik. Ha $\Sigma = \{F_1, F_2\}$ akkor általában $\exists x (F_1 \wedge F_2) \not\equiv_s \exists x F_1 \wedge \exists x F_2$.

A kötött változók átnevezésével érjük el, hogy minden kvantornak saját változója legyen. Mivel az előző lépésben a szabad változóktól már megszabadultunk, azokra nem kell figyelni. (Különben a szabad változóktól is különböző kötött változókat kellene bevezetni).
Fontos észben tartani: a kötött változók átnevezése ekvivalens átalakítás, de a szabad változók nem nevezhetők át vagy cserélhetők konstansokra az ekvivalencia megtartásával.
Példáinkban az új változókat válasszuk $v_1, v_2, \ldots$ közül!

$$
\begin{aligned}
F &\equiv_s \forall x\,[\exists y\; p(x,y) \to q(c_1,c_2)] \wedge \exists y\,[\forall x\; r(x,y) \vee q(c_3,y)] \\
&\equiv \forall x\,[\exists y\; p(x,y) \to q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1\,[\forall v_2\; r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\,.
\end{aligned}
$$

3. $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ kifejezése

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B, \qquad \neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
- $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

alkamazásával (izlés szerint).
Igazából az első két sor első azonosságait elég tudni, de ha úgy is KNF-ban kell a mag, akkor a többi azonossággal lehet némi időt spórolni.
Haladóknak: az implikációt nem muszáj kifejezni, de az implikációra vonatkozó kvantorkihúzási törvények egy kicsit bonyolultabbak. Az ekvivalenciát mindenképpen ki kell fejezni legalább implikációval, mert nincs rá vonatkozó kvantorkihúzási törvény.

$$F \equiv_s \forall x \left[\exists y\, p(x,y) \boxed{\rightarrow} q(c_1,c_2)\right] \wedge \exists v_1 [\forall v_2\, r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$$
$$\equiv \forall x [\neg\exists y\, p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 [\forall v_2\, r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$$

"Kvantorkihúzási" törvények:

- $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
- $\neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$
- $F \vee QxG(x) \equiv Qx(F \vee G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $QxG(x) \vee F \equiv Qx(G(x) \vee F)$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $F \wedge QxG(x) \equiv Qx(F \wedge G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $QxG(x) \wedge F \equiv Qx(G(x) \wedge F)$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$

Szerencsére a kiigazítottság miatt az $x \notin FreeVar(F)$ (azaz, hogy x nem fordul elő szabadon F-ben) mindig teljesülni fog, arra külön nem kell figyelni.

$F \equiv_s$

$\equiv_s \forall x \left[\neg \boxed{\exists y} p(x,y) \vee q(c_1,c_2) \right] \wedge \exists v_1 [\boxed{\forall v_2} r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$

$\equiv \forall x [\boxed{\forall y} \neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$

$\equiv \forall x \, \boxed{\forall y} [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$

$\equiv \{ \boxed{\forall x \, \forall y} [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\} \equiv$

$\equiv \forall x \, \forall y \{[\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \boxed{\exists v_1 \forall v_2} [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\} \equiv$

$\equiv \forall x \, \forall y \exists v_1 \forall v_2 \{[\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\}$

Nem ez az egyetlen jó megoldás! Pl. $\exists v_1 \forall v_2 \forall x \, \forall y \{\dots\}$ vagy $\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{\dots\}$ is elképzelhető. Sőt minden kvantorsorrend melyben $\forall x$ megelőzi $\forall y$-t és $\exists v_1$ megelőzi $\forall v_2$-t. Ez a sorrend azonban biztos, mert a kvantorkihúzásokkal nem lehet az egyik kvantorral a másikat „átugrani”.

5. Skolemizáció

Az egzisztenciálisan lekötött változók **az előttük univerzálisan kvantifikáltak** új úgynevezett Skolem-függvényével helyettesítendők.

Az egységesítés kedvéért a Skolem-függvények szimbólumai legyenek a következők (de újak!):

- nulla változósok (konstansok): $c_1, c_2, \ldots$
- egy változósok: $e_1, e_2, \ldots$
- két változósok: $k_1, k_2, \ldots$
- három változósok: $h_1, h_2, \ldots$
- négy változósok: $n_1, n_2, \ldots$

$F \equiv_s \forall x\, \forall y \boxed{\exists v_1} \forall v_2 \{[\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\}.$

Az egyetlen egzisztenciális kvantor $\exists v_1$ melyet $\forall x$ és $\forall y$ univerzális kvantifikációk előznek meg.

Ezért v_1 helyére $k_1(x,y)$-t kell bevezetnünk.

$F \equiv_s \forall x\, \forall y \forall v_2 \{[\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge [r(v_2,k_1(x,y)) \vee q(c_3,k_1(x,y))]\}.$

6. A Skolem-függvények változóktól való függéségsei szükségességének vizsgálata

Magyarul: szükséges-e, hogy a példában $k_1(x, y)$ mind az x, mind az y változótól függjön?
Válasz: most nem, mert ha a

$$\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{\dots\}$$

prenex alakon végeznénk a skolemizációt, v_1-et nem előzné meg sem x sem y.
Ezért a példában, $k_1(x, y)$ helyett egy k_1 konstans (vagy ha valakinek jobban tetszik c_4) is írható lenne.
Szabály: Egy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Skolem-függvény x_i-től való függése pontosan akkor hagyható el, ha a skolemizáció előtti formulában nincs olyan **atomi formula**, melyben x_i és az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$-nel helyettesített változó együtt előfordulna.
Házi feladat: **FZ2 II/5** és **7**.