

Logika és informatikai alkalmazásai

7. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Skolem normálformák, Herbrand elmélet, alaprezolúció

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Két megjegyzés a Skolemizációshoz

1) $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ kifejezése elronthatja a kiigazítottságot. Ilyen esetben azt újra el kell végezni. (Vagy előbb kell kifejezni a műveleteket és csak utána kiigazítani a formulát.)

2) Prenex normálalakra hozásnál lehetőség van a kvantorok lépésenkénti kihúzása helyett előbb a negációk De-Morgan azonosságokkal történő bevitelére a kvantorok mögé, majd ezután a kvantorok „gondolkodás nélkül” húzhatók ki a formula legelejére (a sorrend megtartásával). Ugyanis ha nincs implikáció és negáció, amin a kvantort át kell húzni, akkor az nem fog megváltozni.

FZ2 II/5b

$$\begin{aligned}
 F = \exists x r(x, \boxed{y}) \leftrightarrow \forall y p(\boxed{x}, y) &\equiv_s \exists x r(x, c_1) \leftrightarrow \forall y p(c_2, y) \equiv \\
 &\equiv (\neg \exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg \forall y p(c_2, y) \vee \exists x r(x, c_1)) \equiv \\
 &\equiv (\neg \exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg \forall v_1 p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv \\
 &\equiv (\forall x \neg r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\exists v_1 \neg p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv \\
 &\equiv \forall x \forall y \exists v_1 \exists v_2 [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, v_1) \vee r(v_2, c_1))] \equiv_s \\
 &\equiv_s \forall x \forall y [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, k_1(x, y)) \vee r(k_2(x, y), c_1))]
 \end{aligned}$$

$k_1(x, y)$ helyére k_1 , $k_2(x, y)$ helyére pedig k_2 konstans írható lenne, mert v_1 , illetve v_2 sem x -szel, sem y -nal nem szerepelt közös atomi formulában.

c) $\forall x \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 [(q(x, e_1(x)) \vee p(e_2(x), v_2)) \wedge \neg p(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_2(x)$ helyett e_2 alkalmazható, de $e_1(x)$ helyett e_1
nem!!!

d) $\forall x \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 [p(x, e_1(x)) \wedge \neg r(v_1, v_2) \wedge \neg q(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_1(x)$ -nek x -től való függése lényeges!

A III/7 példa megoldását, lásd a 2007-es log. gyak weblapomon,
a gyakorló példák a második ZH-ra részben.

Csak a biztonság kedvéért ...

- predikátum szimbólumok: $p, q, r, P, Q, R \dots$
- változók: x, y, z, s, t, u, v, w
- konstansok (nulla változós függvénytípus-szimbólumok): c, d, e
- függvénytípus-szimbólumok: $f, g, h, i, j, k, l, m, n$

Minden predikátum szimbólumnak van egy rangja (más szóval aritása), ami nem más mint a változóinak a száma.

A **termék** definíciója:

- Minden változó term.
- Ha f függvénytípus-szimbólum, mely n változós és $t_1, t_2, \dots, t_n$ termék, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is term.

A második pontban $n = 0$ esetén kapjuk, hogy minden konstans term.

Mindig csak változók helyére szabad helyettesíteni konstansok helyére nem!

Az **alaptermek** a változómentes termek, másképpen:

- Minden konstans alapterm.
- Ha f függvénytípus, mely n változós és $t_1, t_2, \dots, t_n$ alaptermek, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is alapterm.

Például, ha $Fgv = \{c, f(\cdot), g(\cdot, \cdot)\}$, akkor $g(x, f(c, g(y, c)))$ term, $f(g(c, f(c)))$ pedig alapterm.

Az Fgv feletti alaptermek halmaza

$$T_0 = \{c, f(c), g(c, c), f(f(c)), g(f(c), c), g(c, f(c)), \\ g(f(c), f(c)), f(g(c, c)), \dots\}$$

Az Fgv -ről csak annyit fogunk feltenni, hogy a vizsgált formulák minden függvénytípusát tartalmazza, hogy T_0 ne legyen üres. Ezért, ha a formulákban nem lenne konstans, akkor vegyünk be egy c konstansot Fgv -be.

Herbrand kiterjesztés

Ha $F = \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F^*$ egy zárt Skolem normálforma, akkor F Herbrand kiterjesztése a következő:

$$E(F) := \{F^*[x_1/t_1][x_2/t_2] \dots [x_n/t_n] \mid t_i \in T_0, i = 1 \dots n\}$$

azaz F^* változóit alaptermekkel kell helyettesíteni minden lehetséges módon.

Egy Σ zárt Skolem normálformákat tartalmazó formulahalmaz Herbrand kiterjesztése:

$$E(\Sigma) = \bigcup_{F \in \Sigma} E(F)$$

Tétel. Σ akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $E(\Sigma)$ kielégíthető.

Végül legyen $E'(\Sigma)$ az $E(\Sigma)$ konjunktív normálformáinak klózhalmaza. Ennek kielégíthetősége zérusrendű rezolúcióval vizsgálható, hiszen már csak alapkózekből áll, amikben nincsenek változók.

Írjuk fel a következő formulák, illetve formula halmazok Herbrand kiterjesztését, majd vizsgáljuk annak kielégíthetőségét alaprezolúcióval. Természetesen, ha szükséges, akkor előbb végezzük el a Skolemizációt.

a) $\Sigma = \{ \exists z \forall x p(x, y, z), \forall x \exists z \neg p(z, y, x) \}$

b) $F = \forall x (p(x) \rightarrow \exists y q(y))$

c) $F = \forall x \forall y (\exists z p(z) \wedge \exists u (q(x, u) \rightarrow \exists v q(y, v)))$

d) $F = \exists x (\neg \exists y p(y) \rightarrow \exists z (q(z) \rightarrow r(x)))$

e) $F = \forall x ((p(f(x)) \vee q) \wedge \neg p(f(f(x))) \wedge \neg q)$

f) $F =$
 $\forall x \forall y ((\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y)) \wedge p(y) \wedge (\neg p(g(b, x)) \vee \neg q(b)))$

a) saját, b)-d) FZ2 IV/1, e)-f) Muzalel Loránd 2007. 8. gyak.

a)

$$\Sigma = \{ \exists z \forall x p(x, \boxed{y}, z), \forall x \exists z \neg p(z, \boxed{y}, x) \}$$

Lezárás (az egész halmazra **együtt**)

Az y szabadváltozó új, mondjuk a konstanssal helyettesítésével:

$$\Sigma' = \{ \exists z \forall x p(x, a, z), \forall x \exists z \neg p(z, a, x) \}$$

Skolemizáció (**formulánként**)

Az első formulában $\exists z$ miatt z helyére b , a másodikban $\exists z$ helyére $f(x)$ új Skolemfüggvények bevezetésével:

$$\Sigma'' = \{ \forall x p(x, a, b), \forall x \neg p(f(x), a, x) \}$$

Ez már zárt Skolem normálformák halmaza.

A

$$\Sigma'' = \{ \forall x p(x, a, b), \forall x \neg p(f(x), a, x) \}$$

halmazban szereplő függvénszimbólumok:

$$Fgv = \{ a, b, f(.) \}$$

Szerencsére most van benne konstans, nem kell hozzávenni.

Így

$$T_0 = \{ a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots \}$$

Ezért Σ'' Herbrand kiterjesztése:

$$E(\Sigma'') = \{ p(\boxed{a}, a, b), p(\boxed{b}, a, b), p(\boxed{f(a)}, a, b), p(\boxed{f(b)}, a, b), \dots \\ \neg p(f(\boxed{a}), a, \boxed{a}), \neg p(f(\boxed{b}), a, \boxed{b}), \neg p(f(\boxed{f(a)}), a, \boxed{f(a)}), \dots \}$$

És a befejezés.

Most $E'(\Sigma'')$ az $E(\Sigma'')$ elemeit tartalmazó egyelemű klózok:

$$E'(\Sigma'') = \{ \{p(\boxed{a}, a, b)\}, \{p(\boxed{b}, a, b)\}, \dots$$

Így $E(\Sigma'')$ és ezzel Σ kielégíthetetlensége alaprezolúcióval így bizonyítható:

1. $\{p(f(b), a, b)\} \in E'(\Sigma'')$, mert a $\{p(x, a, b)\}$ klózból kapható $[x/f(b)]$ alaphelyettesítéssel.
2. $\{\neg p(f(b), a, b)\} \in E'(\Sigma'')$, mert a $\{\neg p(f(x), a, x)\}$ klózból kapható $[x/b]$ alaphelyettesítéssel.
3. $\square$ Res 1,2

Még két példa (táblán)

$$\mathbf{b)} \ F = \forall x(p(x) \rightarrow \exists yq(y))$$

és

$$\mathbf{c)} \ F = \forall x((p(f(x)) \vee q) \wedge \neg p(f(f(x)))) \wedge \neg q$$

HF a többi példa.

Egy további kidolgozott rezolúciós példa Iván Szabolcs weblapján:

`www.inf.u-szeged.hu/~szabivan
/download/logika/resolution_sample.pdf`