

Logika és informatikai alkalmazásai

9. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

Egy HF múlt hétről

HF1.

- a) Egyesíthető: $s = [y/f(x, g(x, a))][x/b][w/g(b, a)]$ vagy $s = [y/f(b, w)][x/b][w/g(b, a)]$.
- b) Nem egyesíthető.
- c) Nem egyesíthető. $s_2 = [z/h(x)][x/f(y, y)]$ után **a** és **h** van az első eltérő pozíción.

És még egy ...

FZ2 V/11 c)

$C_1 = \{ p(x, y), \neg p(x, x), q(x, f(x), z) \}$ és

$C_2 = \{ \neg q(f(x), x, z), p(x, z) \}$ összes rezolvense:

$s_1 = []$ és $s_2 = [x/t][z/u]$ változóátnevezések után:

$C_1 s_1 = \{ p(x, y), \neg p(x, x), q(x, f(x), z) \},$

$C_2 s_2 = \{ \neg q(f(t), t, u), p(t, u) \}$

$\neg p(x, x)$ és $\neg p(t, u)$ egyesíthető $s = [t/x][u/x]$ -szel, így

$R = \{ p(x, y), q(x, f(x), z), \neg q(f(x), x, x) \}$ rezolvens.

Viszont $q(x, f(x), z)$ és $q(f(t), t, u)$ nem egyesíthető, mert $s_1 = [x/f(t)]$ után a $[t/f(f(t))]$ helyettesítés nem megengedett. Ezért nincs más rezolvens.

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Elsőrendű rezolúció (#177–#182), a lineáris rezolúció (#190–#192 első két pontja) és az SLD rezolúció: (#201–#203) definíciója és alaptétele.

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Miért kell rezolvens képzés előtt az egyesítendő klózek változóit átnevezni?

Legyen $C_1 = \{p(x, b)\}$ és $C_2 = \{\neg p(a, x)\}$. Ekkor változó átnevezés nélkül $p(x, b)$ és $p(a, x)$ nem egyesíthetők (hiszen $[x/a]$ helyettesítés után a $p(a, b)$ és $p(a, a)$ literálokat kapjuk). De ha végrehajtjuk a változó átnevezést. Mondjuk legyen $s_1 := []$ és $s_2 := [x/y]$, akkor a $p(x, b)s_1 = p(x, b)$ és $p(a, x)s_2 = p(a, y)$ klózek már egyesíthetők, mégpedig $s = [x/a][y/b]$ -vel így az üres klózt kapjuk rezolvensként. Azaz

1. $\{p(x, b)\}$ a C_1 klóz
2. $\{\neg p(a, x)\}$ a C_2 klóz
3. $\square$ Res 1,2, az $s_1 = []$, $s_2 = [x/y]$ vált. átnevezések és $s = [x/a][y/b]$ helyettesítés után.

HF. Mutassuk meg, hogy az $F = \forall x \forall y [p(x, g(y)) \wedge \neg p(f(y), x)]$ formula klózainak szintén nem képezhető rezolvense a klózek változóinak előzetes átnevezése nélkül.

FZ2 V/9 Formalizáljuk az alábbi állításokat:

F1: Minden sárkány boldog, ha az összes gyereke tud repülni.

F2: A zöld sárkányok tudnak repülni.

F3: Egy sárkány zöld, ha legalább egy zöld sárkánynak a gyereke. **Biz. be, hogy a ezekből következik:**

F4: Minden zöld sárkány boldog.

Megoldás. $B(x)$ – x boldog, $Gy(x, y)$ – x -nek gyereke y ,
 $R(x)$ – x tud repülni, $Z(x)$ – x zöld.

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x (\forall y [Gy(x, y) \rightarrow R(y)] \rightarrow B(x)) \equiv \\ &\forall x (\neg \forall y [Gy(x, y) \rightarrow R(y)] \vee B(x)) \equiv \\ &\forall x \exists y ([Gy(x, y) \wedge \neg R(y)] \vee B(x)) \equiv \\ &\forall x \exists y [(Gy(x, y) \vee B(x)) \wedge (\neg R(y) \vee B(x))] \equiv_s \\ &\forall x [(Gy(x, f(x)) \vee B(x)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee B(x))] \end{aligned}$$

$$F_2 = \forall x (Z(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x (\neg Z(x) \vee R(x))$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \forall x [\exists t (Gy(t, x) \wedge Z(t)) \rightarrow Z(x)] \equiv \\ &\forall x \forall t [\neg Gy(t, x) \vee \neg Z(t) \vee Z(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg F_4 &= \neg \forall x (Z(x) \rightarrow B(x)) \equiv \exists x \neg (Z(x) \rightarrow B(x)) \equiv \\ &\exists x (Z(x) \wedge \neg B(x)) \equiv_s Z(a) \wedge \neg B(a) \end{aligned}$$

Folytatás ...

$\{F_1, F_2, F_3\} \models F_4 \Leftrightarrow \Sigma := \{F_1, F_2, F_3, \neg F_4\}$ kielégíthetetlen.

A Σ formuláit már zárt Skolemnormálformára hoztuk ezek magjai a következő klózthalmazt adják: $\Sigma' := \{$

1. $\{Gy(x, f(x)), B(x)\},$
 2. $\{\neg R(f(x)), B(x)\},$
 3. $\{\neg Z(x), R(x)\},$
 4. $\{\neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x)\},$
 5. $\{Z(a)\},$
 6. $\{\neg B(a)\},$
- }

Befejezés: bizonyítás elsőrendű rezolúcióval.

1. $\{Z(a)\}$ 5. klóz;
2. $\{\neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x)\}$ 4. klóz;
3. $\{\neg Gy(a, x), Z(x)\}$ Res 1,2, $s = [t/a]$ hely;
4. $\{Gy(x, f(x)), B(x)\}$ 1. klóz;
5. $\{Z(f(a)), B(a)\}$ Res 3,4, $s_1 = [x/y]$, $s_2 = []$ vált. átnev.,
 $s = [x/a][y/f(a)]$ hely;
6. $\{\neg Z(x), R(x)\}$ 3. klóz;
7. $\{B(a), R(f(a))\}$ Res 5,6, $s = [x/f(a)]$ hely;
8. $\{\neg R(f(x)), B(x)\}$ 2. klóz;
9. $\{B(a)\}$ Res 7,8, $s = [x/a]$ hely;
10. $\{\neg B(a)\}$ 6. klóz;
11. $\square$ Res 9,10.

Ezért Σ' kielégíthetetlen, a log. következmény **igaz**.

Lineáris és SLD rezolúció

Lineáris rezolúció: Olyan rezolúció, melyben **mindig az előző rezolvenst használjuk** egyik klózként a következő rezolúciós lépésben.

Példa a táblán: $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\} \mid \{\neg p, \neg q\}\}$.

Tétel. Ha az üres klóz levezethető egy klózhalmazból, akkor mindig van lineáris rezolúcióval történő levezetése is.

SLD-rezolúció: **Horn klózik körében** (azaz amikben klózonként legfeljebb egy pozitív literál engedélyezett) olyan **lineáris** rezolúció, mely **negatív klózból** (azaz csupa negatív literált tartalmazó klózból) **indul**.

Tétel. Horn-klózik egy halmaza, akkor és csak akkor kielégíthetetlen ha SLD rezolúcióval levezető belőle az üres klóz.

Megjegyzések

- ▶ A lineáris illetve SLD rezolúció minden olyan klózzal/negatív klózzal kezdhető, mely a klózhalmoz egy minimális kielégíthetetlen részalmazának eleme.
- ▶ Lineáris és így SLD rezolúció esetén is, a levezetésbe nem írjuk be azt a klózt, amivel az előző klózt rezolváljuk.
- ▶ Viszont az indoklásban ezt meg kell említeni (vagy legalább vonallal oda kell húzni) a szokásos változóátnevezésekkel és az egyesítővel együtt.
- ▶ SLD rezolúciónál minden a levezetésben szereplő klóz negatív klóz lesz, mert az egyetlen pozitív literálok (hiszen Horn-klózkodról van szó) a rezolúció során mindig kiesnek.

V/15 a) Biz. be lineáris rezolúcióval, hogy

$\tilde{F} = \forall x(F \rightarrow G) \rightarrow (\forall x F \rightarrow \forall x G)$ tautológia!

Feltehetjük, hogy F -ben és G -ben csak az x változó fordul elő szabadon, és a jelölés egyszerűsítése végett így F helyett $F(x)$ -et, $F[x/y]$ helyett $F(y)$ -t írunk. Továbbá $F(x)$ -et és $G(x)$ -et atomi formulának tekintjük.

$$\neg \tilde{F} = \neg [\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x))] \equiv$$

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \neg(\forall y F(y) \rightarrow \forall z G(z)) \equiv$$

$$\forall x((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge \forall y F(y) \wedge \neg \forall z(G(z)) \equiv$$

$$\forall x \forall y \exists z((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(z)) \equiv_s$$

$$\forall x \forall y((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(f(x, y)))$$

$$F^* = \{ \{ \neg F(x), G(x) \}, \{ F(y) \}, \{ \neg G(f(x, y)) \} \}$$

Lineáris rezolúcióval:

1. $\{ \neg F(x), G(x) \}$ F^* 1. klóza

2. $\{ G(x) \}$ Res a 2. klózzal $[y/x]$ hely. után

3. $\square$ Res a 3. klózzal $s_2 = [x/u]$ vált. átn.
és $s = [x/f(u, y)]$ hely. után

SLD rezolúció

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózalmaz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

1. $\{ \neg p(a, c) \}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{ \neg p(a, z), \neg p(z, c) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}$ klózzal $s = [x/a][y/c]$ helyettesítéssel;
3. $\{ \neg p(b, c) \}$ Res a $\{ p(a, b) \}$ klózzal $s = [z/b]$ hely.
4. $\{ \neg p(c, b) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(y, x) \}$ klózzal, $s = [x/b][y/c]$ hely.
5. $\square$ Res a $\{ p(c, b) \}$ klózzal.

Házi feladat

- ▶ **FZ2 V/12, 15, 8*, 10***
- ▶ Dr. Fülöp Zoltán jegyzetéből a 2.69 és 2.70-es kidolgozott rezolúciós példát átnézni.
- ▶ Iván Szabolcs: kidolgozott rezolúciós feladat (2007) szintén átnézni.
- ▶ Csináljuk meg a sárkányos példát lineáris rezolúcióval is.
- ▶ Még lineáris rezolúcióra: **FZ2 V/16 b, c.** (A $\exists$ kvantorok után persze x áll.)
- ▶ SLD rezolúcióra:
Igazoljuk SLD rezolúcióval, hogy

$$\forall x \forall y [(\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \wedge \\ \wedge \neg R(f(x), f^3(x)) \wedge R(x, f(x))]$$

kielégíthetetlen /ahol persze $f^3(x) = f(f(f(x)))$ /.

Követelmények a 2. ZH-ra

1. Definíciók, tételek az előadás első 203 fóliájáról (előről az SLD rezolúcióig).
2. (zárt) Skolem normálformára hozás
3. Herbrand kiterjesztés felírása és alaprezolúció
4. az egyesítési algoritmus és elsőrendű rezolvensképzés
5. elsőrendű, lineáris és SLD rezolúció

A rezolúciót továbbra is tudni kell alkalmazni, az alapvető eldöntési kérdések (tautológia, log. következmény, ekvivalencia) megválaszolására.

Április 30-án (szerdán) 12h és 15h (táblás) gyakorló óra (I219).
A szerdaiaknak kötelező, a csütörtökieknek szabadon látogatható.

Május 7-én (szerdán) 12h, 15h (I219) és 8-án 8h, 9h (I221) nem kötelező konzultáció (bárkinek).

Május 8-án, ZH 17h és 18h (Riesz-terem). Mindenkinek, amikor az első ZH-t írta, akinek nem jó, kérjen engedélyt e-mailben május 5-ig.