

Logika és informatikai alkalmazásai

9. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2008 tavasz

HF1.

- a) Egyesíthető: $s = [y/f(x, g(x, a))][x/b][w/g(b, a)]$ vagy $s = [y/f(b, w)][x/b][w/g(b, a)]$.
- b) Nem egyesíthető.
- c) Nem egyesíthető. $s_2 = [z/h(x)][x/f(y, y)]$ után **a** és **h** van az első eltérő pozíción.

FZ2 V/11 c)

$C_1 = \{ p(x, y), \neg p(x, x), q(x, f(x), z) \}$ és

$C_2 = \{ \neg q(f(x), x, z), p(x, z) \}$ összes rezolvense:

$s_1 = []$ és $s_2 = [x/t][z/u]$ változóátnevezések után:

$C_1 s_1 = \{ p(x, y), \neg p(x, x), q(x, f(x), z) \},$

$C_2 s_2 = \{ \neg q(f(t), t, u), p(t, u) \}$

$\neg p(x, x)$ és $\neg p(t, u)$ egyesíthető $s = [t/x][u/x]$ -szel, így

$R = \{ p(x, y), q(x, f(x), z), \neg q(f(x), x, x) \}$ rezolvens.

Viszont $q(x, f(x), z)$ és $q(f(t), t, u)$ nem egyesíthető, mert $s_1 = [x/f(t)]$ után a $[t/f(f(t))]$ helyettesítés nem megengedett. Ezért nincs más rezolvens.

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Elsőrendű rezolúció (#177–#182), a lineáris rezolúció (#190–#192 első két pontja) és az SLD rezolúció: (#201–#203) definíciója és alaptétele.

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Miért kell rezolvens képzés előtt az egyesítendő klózek változóit átnevezni?

Legyen $C_1 = \{p(x, b)\}$ és $C_2 = \{\neg p(a, x)\}$. Ekkor változó átnevezés nélkül $p(x, b)$ és $p(a, x)$ nem egyesíthetők (hiszen $[x/a]$ helyettesítés után a $p(a, b)$ és $p(a, a)$ literálokat kapjuk). De ha végrehajtjuk a változó átnevezést. Mondjuk legyen $s_1 := []$ és $s_2 := [x/y]$, akkor a $p(x, b)s_1 = p(x, b)$ és $p(a, x)s_2 = p(a, y)$ klózek már egyesíthetők, mégpedig $s = [x/a][y/b]$ -vel így az üres klózt kapjuk rezolvensként. Azaz

1. $\{p(x, b)\}$ a C_1 klóz
2. $\{\neg p(a, x)\}$ a C_2 klóz
3. $\square$ Res 1,2, az $s_1 = []$, $s_2 = [x/y]$ vált. átnevezések és $s = [x/a][y/b]$ helyettesítés után.

HF. Mutassuk meg, hogy az $F = \forall x \forall y [p(x, g(y)) \wedge \neg p(f(y), x)]$ formula klózainak szintén nem képezhető rezolvens a klózek változóinak előzetes átnevezése nélkül.

FZ2 V/9 Formalizáljuk az alábbi állításokat:

F1: Minden sárkány boldog, ha az összes gyereke tud repülni.

F2: A zöld sárkányok tudnak repülni.

F3: Egy sárkány zöld, ha legalább egy zöld sárkánynak a gyereke. **Biz. be, hogy a ezekből következik:**

F4: Minden zöld sárkány boldog.

Megoldás. $B(x)$ – x boldog, $Gy(x, y)$ – x -nek gyereke y ,
 $R(x)$ – x tud repülni, $Z(x)$ – x zöld.

$$\begin{aligned} F_1 &= \forall x (\forall y [Gy(x, y) \rightarrow R(y)] \rightarrow B(x)) \equiv \\ &\forall x (\neg \forall y [Gy(x, y) \rightarrow R(y)] \vee B(x)) \equiv \\ &\forall x \exists y ([Gy(x, y) \wedge \neg R(y)] \vee B(x)) \equiv \\ &\forall x \exists y [(Gy(x, y) \vee B(x)) \wedge (\neg R(y) \vee B(x))] \equiv_s \\ &\forall x [(Gy(x, f(x)) \vee B(x)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee B(x))] \end{aligned}$$

$$F_2 = \forall x (Z(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x (\neg Z(x) \vee R(x))$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \forall x [\exists t (Gy(t, x) \wedge Z(t)) \rightarrow Z(x)] \equiv \\ &\forall x \forall t [\neg Gy(t, x) \vee \neg Z(t) \vee Z(x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \neg F_4 &= \neg \forall x (Z(x) \rightarrow B(x)) \equiv \exists x \neg (Z(x) \rightarrow B(x)) \equiv \\ &\exists x (Z(x) \wedge \neg B(x)) \equiv_s Z(a) \wedge \neg B(a) \end{aligned}$$

$\{F_1, F_2, F_3\} \models F_4 \Leftrightarrow \Sigma := \{F_1, F_2, F_3, \neg F_4\}$ kielégíthetetlen.

A Σ formuláit már zárt Skolemnormálformára hoztuk ezek magjai a következő klózthalmazt adják: $\Sigma' := \{$

1. $\{Gy(x, f(x)), B(x)\},$
2. $\{\neg R(f(x)), B(x)\},$
3. $\{\neg Z(x), R(x)\},$
4. $\{\neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x)\},$
5. $\{Z(a)\},$
6. $\{\neg B(a)\},$
- }

Lineáris rezolúció: Olyan rezolúció, melyben **mindig az előző rezolvenst használjuk** egyik klózként a következő rezolúciós lépésben.

Példa a táblán: $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\} \mid \{\neg p, \neg q\}\}$.

Tétel. Ha az üres klóz levezethető egy klózhalmazból, akkor mindig van lineáris rezolúcióval történő levezetése is.

SLD-rezolúció: **Horn klózek körében** (azaz amikben klózonként legfeljebb egy pozitív literál engedélyezett) olyan **lineáris** rezolúció, mely **negatív klózból** (azaz csupa negatív literált tartalmazó klózból) **indul**.

Tétel. Horn-klózek egy halmaza, akkor és csak akkor kielégíthetetlen ha SLD rezolúcióval levezető belőle az üres klóz.

- A lineáris illetve SLD rezolúció minden olyan klózzal/negatív klózzal kezdhető, mely a klózalmaz egy minimális kielégíthetetlen részalmazának eleme.
- Lineáris és így SLD rezolúció esetén is, a levezetésbe nem írjuk be azt a klózt, amivel az előző klózt rezolváljuk.
- Viszont az indoklásban ezt meg kell említeni (vagy legalább vonallal oda kell húzni) a szokásos változóátnevezésekkel és az egyesítővel együtt.
- SLD rezolúciónál minden a levezetésben szereplő klóz negatív klóz lesz, mert az egyetlen pozitív literálok (hiszen Horn-klózkodról van szó) a rezolúció során mindig kiesnek.

V/15 a) Biz. be lineáris rezolúcióval, hogy

$\tilde{F} = \forall x(F \rightarrow G) \rightarrow (\forall x F \rightarrow \forall x G)$ tautológia!

Feltehetjük, hogy F -ben és G -ben csak az x változó fordul elő szabadon, és a jelölés egyszerűsítése végett így F helyett $F(x)$ -et, $F[x/y]$ helyett $F(y)$ -t írunk. Továbbá $F(x)$ -et és $G(x)$ -et atomi formulának tekintjük.

$$\neg \tilde{F} = \neg [\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \rightarrow (\forall x F(x) \rightarrow \forall x G(x))] \equiv$$

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)) \wedge \neg(\forall y F(y) \rightarrow \forall z G(z)) \equiv$$

$$\forall x((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge \forall y F(y) \wedge \neg \forall z(G(z))) \equiv$$

$$\forall x \forall y \exists z((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(z)) \equiv_s$$

$$\forall x \forall y((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(f(x, y)))$$

$$F^* = \{ \{ \neg F(x), G(x) \}, \{ F(y) \}, \{ \neg G(f(x, y)) \} \}$$

Lineáris rezolúcióval:

1. $\{ \neg F(x), G(x) \}$ F^* 1. klóza

2. $\{ G(x) \}$ Res a 2. klózzal $[y/x]$ hely. után

3. $\square$ Res a 3. klózzal $s_2 = [x/u]$ vált. átn.
és $s = [x/f(u, y)]$ hely. után

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózhalmoz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózalmaz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

1. $\{ \neg p(a, c) \}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózalmaz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

1. $\{ \neg p(a, c) \}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{ \neg p(a, z), \neg p(z, c) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}$ klózzal $s = [x/a][y/c]$ helyettesítéssel;

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózhalmaz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

1. $\{ \neg p(a, c) \}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{ \neg p(a, z), \neg p(z, c) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}$ klózzal $s = [x/a][y/c]$ helyettesítéssel;
3. $\{ \neg p(b, c) \}$ Res a $\{ p(a, b) \}$ klózzal $s = [z/b]$ hely.

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózalmaz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

1. $\{ \neg p(a, c) \}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{ \neg p(a, z), \neg p(z, c) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}$ klózzal $s = [x/a][y/c]$ helyettesítéssel;
3. $\{ \neg p(b, c) \}$ Res a $\{ p(a, b) \}$ klózzal $s = [z/b]$ hely.
4. $\{ \neg p(c, b) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(y, x) \}$ klózzal, $s = [x/b][y/c]$ hely.

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózhalmaz kielégíthetetlen:

$$\{ \{ \neg p(a, c) \}, \{ p(a, b) \}, \{ p(c, b) \}, \{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}, \\ \{ p(x, y), \neg p(y, x) \} \}$$

1. $\{ \neg p(a, c) \}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{ \neg p(a, z), \neg p(z, c) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(x, z), \neg p(z, y) \}$ klózzal $s = [x/a][y/c]$ helyettesítéssel;
3. $\{ \neg p(b, c) \}$ Res a $\{ p(a, b) \}$ klózzal $s = [z/b]$ hely.
4. $\{ \neg p(c, b) \}$ Res a $\{ p(x, y), \neg p(y, x) \}$ klózzal, $s = [x/b][y/c]$ hely.
5. $\square$ Res a $\{ p(c, b) \}$ klózzal.

- **FZ2 V/12, 15, 8*, 10***
- Dr. Fülöp Zoltán jegyzetéből a 2.69 és 2.70-es kidolgozott rezolúciós példát átnézni.
- Iván Szabolcs: kidolgozott rezolúciós feladat (2007) szintén átnézni.
- Csináljuk meg a sárkányos példát lineáris rezolúcióval is.
- Még lineáris rezolúcióra: **FZ2 V/16 b, c.** (A $\exists$ kvantorok után persze x áll.)
- SLD rezolúcióra:
Igazoljuk SLD rezolúcióval, hogy

$$\forall x \forall y [(\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \wedge \neg R(f(x), f^3(x)) \wedge R(x, f(x))]$$

kielégíthetetlen /ahol persze $f^3(x) = f(f(f(x)))$ /.

Követlemények a 2. ZH-ra

- 1 Definíciók, tételek az előadás első 203 fóliájáról (előről az SLD rezolúcióig).
- 2 (zárt) Skolem normálformára hozás
- 3 Herbrand kiterjesztés felírása és alaprezolúció
- 4 az egyesítési algoritmus és elsőrendű rezolvensképzés
- 5 elsőrendű, lineáris és SLD rezolúció

A rezolúciót továbbra is tudni kell alkalmazni, az alapvető eldöntési kérdések (tautológia, log. következmény, ekvivalencia) megválaszolására.

Április 30-án (szerdán) 12h és 15h (táblás) gyakorló óra (I219).
A szerdaiaknak kötelező, a csütörtökieknek szabadon látogatható.

Május 7-én (szerdán) 12h, 15h (I219) és 8-án 8h, 9h (I221) nem kötelező konzultáció (bárkinek).

Május 8-án, ZH 17h és 18h (Riesz-terem). Mindenkinek, amikor az első ZH-t írta, akinek nem jó, kérjen engedélyt e-mailben május 5-ig.