Logika és informatikai alkalmazásai

1. levelezős gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Követelmények

A tárgy (ea+gyak) teljesítésének követlményeit mindenki olvassa el, itt van link az előadás fóliáira is:

`www.inf.u-szeged.hu/oktatas/kurzusleirasok/I604.xml`

Az én gyakorlaimhoz kiadott segédanyagok, információk pedig a gyakorlat weblapján (lesznek) találhatók:

`www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth/logika2009/`

1. gyak anyaga

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

- Előadás fóliák: #12-#21
- Szendrei Ágnes: Diszkrét Matematika, Polygon, Szeged 2004, I. fejezet (1-28. oldal) /ezt ugye mindenki tanulta?/

Feladatgyűjtemények

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps`

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

KKK Kalmárné Németh Márta, Katonáné Horváth Eszter, Kámán Tamás: Diszkrét matemetikai feladatok. Szeged, Polygon, 2003.

LZ Lengyel Zoltán: Logikai feladatgyűjtemény (megoldásokkal!)
`www.inf.unideb.hu/~lengyelz/docs/logika-0519.pdf`

SGY2 Serény György: Matematikai logika jegyzet, 2. rész: Predikátum logika
`www.math.bme.hu/~sereny/LINKEK/pred_calculus.ps.gz`

Zérusrendű logika más néven **ítéletkalkulus**

- változók: $p, q, r, \ldots$
- logikai jelek: $\uparrow, \downarrow, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$.

A formulák interpretációjakor (értelmezésekor) a **változók mindig logikai igaz vagy hamis** (0 vagy 1) **értéket vesznek** fel. A logikai jelek értelmezése mindig a szokásos.
Pl. Az $F = p \rightarrow (q \wedge r)$ formula értéke

- igaz, ha $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$ és
- hamis, ha $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$.

Az ítéletkalkulus csak a logikai műveletek törvényszerűségeiről tud beszélni. Például mindig igaz, az ún. „kontrapozíció elve”:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

„Ha fúj, akkor esik” ugyanaz, mint a „ha nem esik, akkor nem is fúj”.

Elsőrendű logika más néven **predikátumkalkulus**

- változók: $x, y, z, \ldots$
- függvény szimbólumok:
  - konstansok: $c, d, \ldots$
  - többváltozósak: $f, g, h, \ldots$
- predikátum szimbólumok: $P, Q, R, \ldots$
- logikai jelek: $\uparrow, \downarrow, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$.

A formulák interpretációjakor (értelmezésekor) a változók egy **tetszőleges** A **objektumhalmazból veszik fel értékeiket**. A logikai jelek értelmezése mindig a szokásos, a predikátum szimbólumok és a függvény szimbólumok értelmezése szintén tetszőleges.
Például ugyanaz az f kétváltozós függvény szimbólum az egyik modellben jelentheti az egész számok összeadását egy másik modellben pedig két halmaz metszetét. Természetesen az objektumok halmaza az első modellben az egész számok, a másodikban pedig a halmazok.

Az elsőrendű logika modelljei I

A modell, amelyben a formulákat értelmezzük adja meg

- az objektumok halmazát
- a függvény szimbólumok és a predikátum szimbólumok jelentését, azaz, hogy az objektumok halmaza felett milyen konkrét függvényt vagy predikátumot kell kiszámítani, a formula kiértékelésekor
- a változók értékét (csak a formula szabad változóinak az értéke szükséges a kiértékeléshez.)

Az elsőrendű logika a a modellek (számok, halmazok, pontok, stb.) tulajdonságairól, törvényszerűségeiről is tud beszélni, benne a matematika jórésze formalizálható. Például:

$$\text{prím}(x) \leftrightarrow \forall y(\text{osztja}(y, x) \rightarrow (y = 1 \vee y = x)),$$

Ha a modell objektumai a természetes számok és a prím és osztja predikátumok értelmezése a szokásos.

Az elsőrendű logika formálisan

Minden logikai rendszer definiálásakor két dolgot kell megadnunk:
Szintaxis: Melyek a szabályos formulák?
Ennek nem tulajdonítható jelentés, csak formális szabályok.
Szemantika: Mikor igaz egy formula egy adott modellben?
Ez határozza meg a formulák jelentését, az igazság, logikai következtetés fogalmát.

Az elsőrendű logika szintaxisa I.

I. **Jelkészlet** más szóval **logikai nyelv** v. elsőrendű nyelv:

- változók: $x, y, z, \ldots$
- függvény szimbólumok:
  - konstansok: $c, d, \ldots$
  - többváltozósak: $f, g, h, \ldots$
- predikátum szimbólumok: $P, Q, R, \ldots$
- logikai jelek: $\uparrow, \downarrow, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists$
- egyéb jelek: zárójelek, vessző.

Az elsőrendű logika szintaxisa II.

II. **Termek** más szóval kifejezések:

1. Minden változó term.
2. Minden konstans term.
3. Termekből függvény szimbólumok alkalmazásával újabb termek képezhetők. Természetesen a függvény szimbólum aritásának (a változói számának) a tiszteletben tartásával.

Pl: $f(x, g(g(c)))$ term, ha x változó, c konstans, f kétváltozós, g pedig egyváltozós függvény szimbólum.

IIb. **Alaptermek** más szóval ground termek:
Olyan termek, melyekben változó nem fordul elő. Azaz csak konstansokból és függvény jelekből épülnek fel.
Pl: $g(f(c, c))$ alapterm az előbbi feltételek mellett.

Az elsőrendű logika szintaxisa III.

III. **Atomi formulák**:
A predikátum szimbólumokba termeket beírásával kapott kifejezés. Pl: $P(x, g(c), c)$,
ha P háromváltozós predikátum szimbólum, g egyváltozós függvény szimbólum, x változó, c pedig konstans.
IV. **Formulák**:

1. Minden atomi formula formula.
2. Formulákból a $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ logikai műveletekkel újabb formulák képezhetők.

Természetesen a kvantorok alkalmazásához változó is kell. Pl: $\forall y(P(x, g(c), c) \vee \neg P(c, c, c))$ formula, a fenti feltételek melett, ha y is változó.
Az nem szükséges, hogy a kvantor y változója elő is forduljon a részformulában, amire a kvantort alkalmazzuk.

Feladatok

Alap feladattípusok I.

- elsőrendű nyelvek jelkészlete (pl. predikátumok és fgv-ek különbsége)
- a term és alapterm fogalma, termek különböző jelölései (normál, lengyel, fordított lengyel, fa)
- atomi formulák és formulák, műveletek precedencia szabályai
- kvantorok, kvantorok hatásköre, szabad és kötött változó előfordulások, szabad és kötött változók
- természetes nyelvi mondatok formalizálása elsőrendű formulákkal

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \dots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R NEM, R predikátum szimbólum

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R NEM, R predikátum szimbólum

f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R NEM, R predikátum szimbólum

f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvator a formulák képzéséhez kell.

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R NEM, R predikátum szimbólum

f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvator a formulák képzéséhez kell.

g) $f(x_1) + g(x_1, x_2)$

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN

b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!

c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN

d) c IGEN

e) R NEM, R predikátum szimbólum

f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvator a formulák képzéséhez kell.

g) $f(x_1) + g(x_1, x_2)$ NEM, $+$ nem szerepel a jelkészletben.

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN
b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!
c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN
d) c IGEN
e) R NEM, R predikátum szimbólum
f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvator a formulák képzéséhez kell.
g) $f(x_1) + g(x_1, x_2)$ NEM, $+$ nem szerepel a jelkészletben.
h) $g(x_1, Q(R, R), f(x_2))$

Feladatok I

1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol f ragngja 1, g rangja 2, h rangja 3, c rangaja 0 (azaz c konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol P rangja 1, Q-é 2, R-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN
b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, f egyváltozós, g pedig 2!
c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN
d) c IGEN
e) R NEM, R predikátum szimbólum
f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvator a formulák képzéséhez kell.
g) $f(x_1) + g(x_1, x_2)$ NEM, $+$ nem szerepel a jelkészletben.
h) $g(x_1, Q(R, R), f(x_2))$ NEM, Q(R,R) nem term, még csak nem is formula.

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3 (P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \rightarrow \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \rightarrow \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \rightarrow \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists ! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists !$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \rightarrow \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists ! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists !$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor

h) $\forall x_1 (\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor

h) $\forall x_1(\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, x_2 szabad változó!

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor

h) $\forall x_1 (\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, x_2 szabad változó!

i) $\neg P(x_1) \to \forall c P(g(c, x_1))$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor

h) $\forall x_1(\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, x_2 szabad változó!

i) $\neg P(x_1) \to \forall c P(g(c, x_1))$ NEM, c nem változó

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula
b) $P(c) \rightarrow \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula
c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term
d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term
e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor
f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg
g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor
h) $\forall x_1(\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, x_2 szabad változó!
i) $\neg P(x_1) \rightarrow \forall c P(g(c, x_1))$ NEM, c nem változó
j) $\exists n(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n) \vee \neg P(x_{n-1}))$

Feladatok II

2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula

b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula

c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term

d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term

e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, Q nem kvantor

f) $\exists! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists!$ rövidítést nem engedtük meg

g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor

h) $\forall x_1 (\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, x_2 szabad változó!

i) $\neg P(x_1) \to \forall c P(g(c, x_1))$ NEM, c nem változó

j) $\exists n(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n) \vee \neg P(x_{n-1}))$ NEM, n nem változó, és $\ldots$ sem megengedett.

Logikai műveletek precedencia sorrendje

Balról jobbra csökkenő erősség szerint:

$$\begin{array}{ccccc} \neg & & & & \\ \forall & \wedge & \vee & \rightarrow & \leftrightarrow \\ \exists & & & & \end{array}$$

Az unáris műveletek ($\neg, \forall, \exists$) egyforma erősen kötnek, hiszen két unáris művelet esetén, értelemszerűen a jobbralevő eredményére alkalmazzuk a balra levőt. Pl.
$\forall x \neg \exists y P(x) = \forall x[\neg(\exists y P(x))]$
Bár nem kötelező, én azért $\vee$ és $\wedge$ esetén ki szoktam rakni a rárójelet, azaz pl. $A \vee B \wedge C$ esetén, $A \vee (B \wedge C)$-t írok, hogy félreérthetetlenül megkülönböztessem $(A \vee B) \wedge C$-től, ahol a zárójel nem hagyható el.
Azonos bináris műveletek esetén:

- $\wedge$, $\vee$ és $\leftrightarrow$ asszociatív, köztük a zárójelezés tetszőleges, így elhagyható
- $\rightarrow$ **nem asszociatív**, itt a megállapodás, a jobbról zárójelezés, azaz $A \rightarrow B \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x, y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x\forall yQ(x, y)) \to \neg\forall zQ(x, y)$

c) $Q(f(x), g(y, x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x, y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x\forall yQ(x, y)) \to \neg\forall zQ(x, y)$

c) $Q(f(x), g(y, x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$
d) megoldása (a többi HF!)

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x,y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x \forall y Q(x,y)) \to \neg\forall z Q(x,y)$

c) $Q(f(x), g(y,x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x,y)$, $Q(y,x)$, $R(x)$ atomi formulák.

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x, y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x \forall y Q(x, y)) \to \neg\forall z Q(x, y)$

c) $Q(f(x), g(y, x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x, y)$, $Q(y, x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \to Q(x, y)$, $\exists x(P(x) \to Q(x, y))$, $Q(y, x) \to R(x)$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x,y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x \forall y Q(x,y)) \to \neg\forall z Q(x,y)$

c) $Q(f(x), g(y,x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x,y)$, $Q(y,x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \to Q(x,y)$, $\exists x(P(x) \to Q(x,y))$, $Q(y,x) \to R(x)$
- $\exists x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \to R(x))$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x, y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x \forall y Q(x, y)) \to \neg\forall z Q(x, y)$

c) $Q(f(x), g(y, x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \land (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x, y)$, $Q(y, x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \to Q(x, y)$, $\exists x(P(x) \to Q(x, y))$, $Q(y, x) \to R(x)$
- $\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \land (Q(y, x) \to R(x))$
- $\neg P(x)$ és $\forall x(\neg P(x))$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x, y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x\forall yQ(x, y)) \to \neg\forall zQ(x, y)$

c) $Q(f(x), g(y, x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x, y)$, $Q(y, x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \to Q(x, y)$, $\exists x(P(x) \to Q(x, y))$, $Q(y, x) \to R(x)$
- $\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))$
- $\neg P(x)$ és $\forall x(\neg P(x))$
- $(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))$

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x, y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x\forall yQ(x, y)) \to \neg\forall zQ(x, y)$

c) $Q(f(x), g(y, x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x, y)$, $Q(y, x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \to Q(x, y)$, $\exists x(P(x) \to Q(x, y))$, $Q(y, x) \to R(x)$
- $\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))$
- $\neg P(x)$ és $\forall x(\neg P(x))$
- $(\exists x(P(x) \to Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))$ **k!**

Feladatok III

3. LZ 2.7. Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* c, d, e, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \to Q(x,y))$

b) $(P(x) \to \neg\exists x \forall y Q(x,y)) \to \neg\forall z Q(x,y)$

c) $Q(f(x), g(y,x))$

d) $\neg[(\exists x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))]$

d) megoldása (a többi HF!)

- $P(x)$, $Q(x,y)$, $Q(y,x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \to Q(x,y)$, $\exists x(P(x) \to Q(x,y))$, $Q(y,x) \to R(x)$
- $\exists x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \to R(x))$
- $\neg P(x)$ és $\forall x(\neg P(x))$
- $(\exists x(P(x) \to Q(x,y)) \wedge (Q(y,x) \to R(x))) \to \forall x(\neg P(x))$ **k!**
- és az egész formula.

Feladatok IV

4. LZ 2.8.

Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y, x, z)) \to P(x))$

b) $\forall x(P(x) \vee \neg\exists x Q(x, g(x, x))) \wedge \exists x P(f(f(x)))$

c) $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))$

d) $\exists x \forall y P(x) \vee \neg P(x)$

Feladatok IV

4. LZ 2.8.

Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y, x, z)) \to P(x))$

b) $\forall x(P(x) \vee \neg\exists x Q(x, g(x, x))) \wedge \exists x P(f(f(x)))$

c) $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))$

d) $\exists x \forall y P(x) \vee \neg P(x)$

d) megoldása

Feladatok IV

4. LZ 2.8.

Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y, x, z)) \rightarrow P(x))$

b) $\forall x(P(x) \vee \neg\exists x Q(x, g(x, x))) \wedge \exists x P(f(f(x)))$

c) $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))$

d) $\exists x \forall y P(x) \vee \neg P(x)$

d) megoldása

$\exists x \boxed{\forall y \boxed{P(x)}} \vee \neg P(x)$, így x szabad változó (paraméter).

Feladatok IV

5. LZ 2.9. alapján

Jelöljük be az alábbi formulákban, hogy mely kvantor melyik változót köti, és határozzuk meg a formula paramétereinek (=benne szabadon (is) előforduló változók) halmazát.

a) $\exists x \forall y Q(x, y) \vee P(x)$

b) $\forall x Q(z) \leftrightarrow \forall y \exists y Q(x, y) \wedge Q(y, x)$

c) $(\forall x P(x, y) \rightarrow \forall y R(x, y)) \wedge P(c)$

d) $\neg \exists z (Q(z, z) \wedge R(f(y, z)))$

e) $\forall x (\forall y P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y))$

f) $\forall y \exists z (P(x, y, z) \rightarrow \exists x \forall x Q(z, x))$

g) $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$

Feladatok IV

g) megoldása

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \to \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \to \forall y \boxed{Q(x, y)}$

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \rightarrow \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- az első $\forall y$ az y változó első előfordulását köti

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \rightarrow \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- az első $\forall y$ az y változó első előfordulását köti
- az első $\exists x$ az x változó első és második előfordulását köti

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \lor Q(x, f(y))) \to \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \lor Q(x, f(y)))}} \to \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- az első $\forall y$ az y változó első előfordulását köti
- az első $\exists x$ az x változó első és második előfordulását köti
- a második $\forall y$ az y változó második előfordulását köti

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \rightarrow \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- az első $\forall y$ az y változó első előfordulását köti
- az első $\exists x$ az x változó első és második előfordulását köti
- a második $\forall y$ az y változó második előfordulását köti
- x utolsó előfordulása szabad, így x az egyetlen paraméter.

Feladatok IV

g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \rightarrow \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- az első $\forall y$ az y változó első előfordulását köti
- az első $\exists x$ az x változó első és második előfordulását köti
- a második $\forall y$ az y változó második előfordulását köti
- x utolsó előfordulása szabad, így x az egyetlen paraméter.
- A kötési viszonyok jelölését lásd a táblán.

Házi feladat

HF, a kimaradt példák.

Következő gyakorlatra:
Az új előadás anyaga.
A Dr. Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus" c. feladatsorból: I/1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 12.
Letölthető:
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;
- I az **interpretáció**, mely

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;
- I az **interpretáció**, mely
  - minden $f \in \mathcal{F}gv$ függvény *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(f) : U^n \to U$ *valódi függvényt* rendel, és

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;
- I az **interpretáció**, mely
  - minden $f \in \mathcal{F}gv$ függvény *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(f) : U^n \to U$ *valódi függvényt* rendel, és
  - minden $P \in \mathcal{P}red$ predikátum *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(P) : U^n \to \{0, 1\}$ *valódi predikátumot* rendel;

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;
- I az **interpretáció**, mely
  - minden $f \in \mathcal{F}gv$ függvény *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(f) : U^n \to U$ *valódi függvényt* rendel, és
  - minden $P \in \mathcal{P}red$ predikátum *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(P) : U^n \to \{0, 1\}$ *valódi predikátumot* rendel;
- $\varphi : \mathcal{V}ar \to U$ pedig a **változó hozzárendelés** vagy **változó kiértékelés**, mely minden x változónak egy U-beli $\varphi(x)$ értéket ad.

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;
- I az **interpretáció**, mely
  - minden $f \in \mathcal{F}gv$ függvény *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(f) : U^n \to U$ *valódi függvényt* rendel, és
  - minden $P \in \mathcal{P}red$ predikátum *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(P) : U^n \to \{0, 1\}$ *valódi predikátumot* rendel;
- $\varphi : \mathcal{V}ar \to U$ pedig a **változó hozzárendelés** vagy **változó kiértékelés**, mely minden x változónak egy U-beli $\varphi(x)$ értéket ad.

Ha nincsenek szabad változók egy formula kiértékelésekor, akkor a harmadik, φ komponens elhagyható a modellből.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \ldots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \dots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \ldots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

b) $U = \mathbb{N}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z(p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \ldots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

b) $U = \mathbb{N}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$.

NEM. $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$ egyszerre nem teljesülhet.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \ldots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

b) $U = \mathbb{N}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$.

NEM. $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$ egyszerre nem teljesülhet.

c) $U = 2^{\mathbb{N}}$, minden $A, B \subseteq \mathbb{N}$-re $I(p)(A, B) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z(p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \ldots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

b) $U = \mathbb{N}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$.

NEM. $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$ egyszerre nem teljesülhet.

c) $U = 2^{\mathbb{N}}$, minden $A, B \subseteq \mathbb{N}$-re $I(p)(A, B) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto \{1\}, y \mapsto \{1,2,3\}, z \mapsto \{1,2\}]}$ modellje a formula magjának.

Feladatok II

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a) $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Feladatok II

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a) $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen mondjuk $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$, ahol

$$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \to \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_+$-re)

$I(f) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1$, $(\forall t \in \mathbb{N}_+$-re)

$\varphi(z) = 1$, különben φ tetszőleges.

Feladatok II

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a) $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen mondjuk $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$, ahol

$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \to \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

($\forall a, b, c \in \mathbb{N}_+$-re)

$I(f) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1$, ($\forall t \in \mathbb{N}_+$-re)

$\varphi(z) = 1$, különben φ tetszőleges.

Ekkor $\forall x \forall y P(x, y, f(z)) =$ „$\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+$-re $x + y \geq 1 + 1$” **igaz**, azaz $\mathcal{A}_1 \models F$.

Feladatok II

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a) $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen mondjuk $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$, ahol

$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \to \{0, 1\}, \quad I(P)(a, b, c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a + b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_+$-re)

$I(f) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1$, $(\forall t \in \mathbb{N}_+$-re)

$\varphi(z) = 1$, különben φ tetszőleges.

Ekkor $\forall x \forall y P(x, y, f(z)) =$ „$\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+$-re $x + y \geq 1 + 1$" **igaz**, azaz $\mathcal{A}_1 \models F$.

De ha $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi')$ ugyanaz a modell kivéve, hogy $\varphi'(z) = 13$, akkor „$\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+$-ra $x + y \geq 13 + 1$" **nem igaz**, azaz $\mathcal{A}_2 \not\models F$, $\mathcal{A}_2$ nem modellje F-nek.

Feladatok III

(HF megoldással)

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b) $F = \forall x \forall y((p(x, y) \wedge p(y, x)) \rightarrow x = y)$

Feladatok III

(HF megoldással)

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b) $F = \forall x \forall y((p(x,y) \wedge p(y,x)) \rightarrow x = y)$

A formula a p reláció antiszimmetrikus tulajdonságát fejezi ki.

$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, I, \varphi)$,

ahol $I(p) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0,1\}$, $\quad I(p)(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ ha } a \leq b \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$ modellje a formulának, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$-re, φ tetszőleges.

Feladatok III
(HF megoldással)

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b) $F = \forall x \forall y ((p(x,y) \wedge p(y,x)) \rightarrow x = y)$
A formula a p reláció antiszimmetrikus tulajdonságát fejezi ki.
$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, I, \varphi)$,
ahol $I(p) : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \{0,1\}$, $\quad I(p)(a,b) = \begin{cases} 1 \text{ ha } a \leq b \\ 0 \text{ különben} \end{cases}$ modellje a formulának, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$-re, φ tetszőleges.
De $\mathcal{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, I, \varphi)$, ahol $I(p) : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \{0,1\}$,

$$I(p)(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben ,} \end{cases} \quad \forall A, B \in 2^{\mathbb{N}}\text{-re, } \varphi \text{ tetszőleges.}$$

Nem modellje a formulának.

Feladatok IV

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

c) $F = \forall x \exists y (f(y) = x \wedge \neg \exists z (f(z) = x \wedge \neg (y = z)))$

Feladatok IV

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

c) $F = \forall x \exists y (f(y) = x \wedge \neg \exists z (f(z) = x \wedge \neg (y = z)))$

A formula azt fejezik ki, hogy az f függvény bijektív függvény, azaz szürjektív (= minden elem képpé válik) és injektív (=különböző elemek képe is különböző).
Ezért egy modell akkor és csak akkor elégíti ki az F formulát, ha benne az f függvényt bijektív függvénynek interpretáljuk.
Részletesen HF.

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátum szimbólumok használhatók:

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátum szimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z(\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátum szimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z(P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

FZ2 I/3. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű**! Az $=$ reláció használható.

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátum szimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

FZ2 I/3. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű**! Az $=$ reláció használható.

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$$

Vagy

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!
Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg(x = y) \wedge \neg(x = z) \wedge \neg(y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátum szimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \wedge \neg P(y) \wedge \neg P(z) \wedge Q(y) \wedge \neg Q(z))$$

FZ2 I/3. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű**! Az $=$ reláció használható.

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \vee (x = z) \vee (y = z))$$

Vagy

$$\forall x ((x = c) \vee (x = d)).$$

Feladatok VI

(Nem kötelező)

FZ2 I/9. Legyen $\mathcal{A} = (U, I)$,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és $\mathcal{A} \models F$.
Tartalmazhat-e az $I(p)$ reláció gráfja az U halmazon kört? A választ indokoljuk!
(Az $I(p)$ reláció gráfjában a szögpontok U elemei és tetszőleges u_1, $u_2 \in U$ esetén u_1-ből u_2-be pontosan akkor vezet él, ha $I(p)(u_1, u_2)$ igaz.)

Feladatok VI

(Nem kötelező)

FZ2 I/9. Legyen $\mathcal{A} = (U, I)$,

$$F = \forall x \neg p(x,x) \wedge \forall x \forall y \forall z((p(x,y) \wedge p(y,z)) \to p(x,z))$$

és $\mathcal{A} \models F$.
Tartalmazhat-e az $I(p)$ reláció gráfja az U halmazon kört? A választ indokoljuk!
(Az $I(p)$ reláció gráfjában a szögpontok U elemei és tetszőleges u_1, $u_2 \in U$ esetén u_1-ből u_2-be pontosan akkor vezet él, ha $I(p)(u_1, u_2)$ igaz.)
Indirekt módom igazolható.

Feladatok VI

(Nem kötelező)

FZ2 I/9. Legyen $\mathcal{A} = (U, I)$,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és $\mathcal{A} \models F$.
Tartalmazhat-e az $I(p)$ reláció gráfja az U halmazon kört? A választ indokoljuk!
(Az $I(p)$ reláció gráfjában a szögpontok U elemei és tetszőleges u_1, $u_2 \in U$ esetén u_1-ből u_2-be pontosan akkor vezet él, ha $I(p)(u_1, u_2)$ igaz.)
Indirekt módom igazolható. Ha $u_1, u_2, \ldots, u_n = u_1$ kör lenne $I(p)$ gráfjában, akkor a tranzitivitás többszöri felhasználásával azt kapnánk, hogy $I(p)(u_1, u_1)$ is teljesül, ellentmondva F-nek.

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!

Néhány lehetséges megoldás:

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!

Néhány lehetséges megoldás:

- A modellben szerepel egy f egyváltozós függvény, mely injektív, de nem szürjektív, ilyen függvény ugyanis véges halmaz felett nem létezhet. (Miért?) Formulával kifejezve:

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!

Néhány lehetséges megoldás:

- A modellben szerepel egy f egyváltozós függvény, mely injektív, de nem szürjektív, ilyen függvény ugyanis véges halmaz felett nem létezhet. (Miért?) Formulával kifejezve:

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \neg \forall y \exists x (f(x) = y)$$

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!
Néhány lehetséges megoldás:

- A modellben szerepel egy f egyváltozós függvény, mely injektív, de nem szürjektív, ilyen függvény ugyanis véges halmaz felett nem létezhet. (Miért?) Formulával kifejezve:

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \neg \forall y \exists x (f(x) = y)$$

- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\wedge \forall x \exists y p(x, y)$

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!

Néhány lehetséges megoldás:

- A modellben szerepel egy f egyváltozós függvény, mely injektív, de nem szürjektív, ilyen függvény ugyanis véges halmaz felett nem létezhet. (Miért?) Formulával kifejezve:

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \land \neg \forall y \exists x (f(x) = y)$$

- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\land \forall x \exists y p(x, y)$
- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\land \forall x p(x, f(x))$

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!

Néhány lehetséges megoldás:

- A modellben szerepel egy f egyváltozós függvény, mely injektív, de nem szürjektív, ilyen függvény ugyanis véges halmaz felett nem létezhet. (Miért?) Formulával kifejezve:

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \to x = y) \land \neg \forall y \exists x (f(x) = y)$$

- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\land \forall x \exists y p(x, y)$
- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\land \forall x p(x, f(x))$
- Ld. Iván Szabolcs: Elsőrendű szemantika (gyakorlat) VI. feladat.
  `www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/feladatok1.pdf`

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x,y,z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$
$$I(P)(x,y,z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$
\begin{aligned}
I(S)(x,y,z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x + y = z \\
I(P)(x,y,z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \cdot y = z
\end{aligned}
$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$;

b) $x = 1$;

c) $x = 2$;

d) x páros;

e) x páratlan;

f) x prím;

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x,y,z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$
$$I(P)(x,y,z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $\quad N(x) := \forall y S(x,y,y)$;

b) $x = 1$;

c) $x = 2$;

d) x páros;

e) x páratlan;

f) x prím;

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$
\begin{aligned}
I(S)(x, y, z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x + y = z \\
I(P)(x, y, z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \cdot y = z
\end{aligned}
$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $\qquad N(x) := \forall y S(x, y, y)$;

b) $x = 1$; $\qquad E(x) := \forall y P(x, y, y)$;

c) $x = 2$;

d) x páros;

e) $x$páratlan;

f) x prím;

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$
$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $\quad N(x) := \forall y S(x, y, y)$;

b) $x = 1$; $\quad E(x) := \forall y P(x, y, y)$;

c) $x = 2$; $\quad K(x) := \exists z(E(z) \wedge S(z, z, x))$;

d) x páros;

e) x páratlan;

f) x prím;

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$
$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $\quad N(x) := \forall y S(x, y, y)$;

b) $x = 1$; $\quad E(x) := \forall y P(x, y, y)$;

c) $x = 2$; $\quad K(x) := \exists z(E(z) \wedge S(z, z, x)$;

d) x páros; $\quad Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$;

e) x páratlan;

f) x prím;

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$
$$I(P)(x, y, z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $\quad N(x) := \forall y S(x, y, y)$;

b) $x = 1$; $\quad E(x) := \forall y P(x, y, y)$;

c) $x = 2$; $\quad K(x) := \exists z(E(z) \wedge S(z, z, x))$;

d) x páros; $\quad Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$;

e) x páratlan; $\quad Ptl(x) := \neg Ps(x)$;

f) x prím;

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$
\begin{aligned}
I(S)(x, y, z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x + y = z \\
I(P)(x, y, z) = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad x \cdot y = z
\end{aligned}
$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $\quad N(x) := \forall y S(x, y, y)$;

b) $x = 1$; $\quad E(x) := \forall y P(x, y, y)$;

c) $x = 2$; $\quad K(x) := \exists z(E(z) \wedge S(z, z, x))$;

d) x páros; $\quad Ps(x) := \exists y S(y, y, x)$;

e) x páratlan; $\quad Ptl(x) := \neg Ps(x)$;

f) x prím; $\quad R(x) := \neg E(x) \wedge \forall y \forall z(P(y, z, x) \rightarrow E(y) \vee E(z))$;

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

a) $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$;

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

a) $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \to S(y, z, u))$;

b) $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$;

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

a) $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \rightarrow S(y, z, u))$;

b) $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$;

c) $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$;

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

a) $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \to S(y, z, u))$;

b) $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$;

c) $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$;

d) $O(x, y) := \exists z P(x, z, y)$;

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

a) $x = y := \forall z \forall u (S(x, z, u) \to S(y, z, u))$;

b) $x \leq y := \exists z S(x, z, y)$;

c) $x < y := \exists z (\neg N(z) \wedge S(x, z, y))$;

d) $O(x, y) := \exists z P(x, z, y)$;

e) $I(x, y) := R(x) \wedge R(y) \wedge \exists z [K(z) \wedge (S(x, z, y) \vee S(y, z, x))]$.

Feladatok X

LM II.4/11. Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója x, y és z, és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) z az x és y legkisebb közös többszöröse;

b) z az x és y legnagyobb közös osztója.

Feladatok X

LM II.4/11. Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója x, y és z, és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) z az x és y legkisebb közös többszöröse;

b) z az x és y legnagyobb közös osztója.

a) megoldása

$$\exists u P(x,u,z) \wedge \exists v P(y,v,z) \wedge \forall t [\exists u P(x,u,t) \wedge \exists v P(y,v,t) \to (z \leq t)]$$

Feladatok X

LM II.4/11. Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója x, y és z, és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) z az x és y legkisebb közös többszöröse;

b) z az x és y legnagyobb közös osztója.

a) megoldása

$$\exists u P(x,u,z) \wedge \exists v P(y,v,z) \wedge \forall t[\exists u P(x,u,t) \wedge \exists v P(y,v,t) \rightarrow (z \leq t)]$$

b) HF.

Feladatok XI

LM II.4/12. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az összeadás kommutatív;

b) az összeadás asszociatív;

c) a szorzás kommutatív;

d) a szorzás asszociatív;

e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;

f) a prímszámok halmaza végtelen;

g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a négy-négyzetszám-tétel);

h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.

Feladatok XI

LM II.4/12. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az összeadás kommutatív;

b) az összeadás asszociatív;

c) a szorzás kommutatív;

d) a szorzás asszociatív;

e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;

f) a prímszámok halmaza végtelen;

g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a négy-négyzetszám-tétel);

h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.

d) $\forall x \forall y \forall z \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 (P(x, y, u_1) \wedge P(u_1, z, u_2) \wedge P(y, z, v_1) \wedge P(x, v_1, v_2) \rightarrow u_2 = v_2)$

Feladatok XI

LM II.4/12. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az összeadás kommutatív;

b) az összeadás asszociatív;

c) a szorzás kommutatív;

d) a szorzás asszociatív;

e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;

f) a prímszámok halmaza végtelen;

g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a négy-négyzetszám-tétel);

h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.

d) $\forall x \forall y \forall z \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 (P(x, y, u_1) \wedge P(u_1, z, u_2) \wedge P(y, z, v_1) \wedge P(x, v_1, v_2) \rightarrow u_2 = v_2)$

f) $\forall x \exists y (x \leq y \wedge R(y))$

Feladatok XII (HF)

LM II.4/13. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;

b) a prímszámok halmaza véges;

c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;

d) minden számnál van kisebb szám;

e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok $\mathcal{A}$-ban?

Feladatok XII (HF)

LM II.4/13. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;

b) a prímszámok halmaza véges;

c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;

d) minden számnál van kisebb szám;

e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok $\mathcal{A}$-ban?

LM II.4/14. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az ikerprímek halmaza végtelen;

b) minden kettőnél nagyobb páros szám két prímszám összege.

Feladatok XII (HF)

LM II.4/13. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;

b) a prímszámok halmaza véges;

c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;

d) minden számnál van kisebb szám;

e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok $\mathcal{A}$-ban?

LM II.4/14. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az ikerprímek halmaza végtelen;

b) minden kettőnél nagyobb páros szám két prímszám összege.

Megjegyzés. A fenti két állítás a számelmélet két híres a maig napig bizonyítatlan sejtése az ikerprím-sejtés és a (páros) Goldbach-sejtés.

Feladatok XIII (HF)

LM II.4/15. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van

Feladatok XIII (HF)

LM II.4/15. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van

LM II.4/16. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a következő egyenletrendszernek nincs megoldása:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 0, \\ x + y &= 2. \end{aligned}$$

Formalizáslás (levelezősöknek nem kötelező)

SGY2 2.3.(ii)

Formalizáljuk az alábbi következtetéseket és állapítsuk meg, melyik helyes, melyik nem! Válaszunkat indokoljuk meg!

Formalizáslás (levelezősöknek nem kötelező)

SGY2 2.3.(ii)

Formalizáljuk az alábbi következtetéseket és állapítsuk meg, melyik helyes, melyik nem! Válaszunkat indokoljuk meg!
Az ilyen alakú következtetéseket **kategórikus szillogizmusoknak** nevezzük, a feltételek neve: **premissza**, a következményé: **konklúzió.**
Ezeket egy vízszintes vonallal szoktuk elválasztani egymástól.

Formalizáslás (levelezősöknek nem kötelező)

SGY2 2.3.(ii)

Formalizáljuk az alábbi következtetéseket és állapítsuk meg, melyik helyes, melyik nem! Válaszunkat indokoljuk meg!
Az ilyen alakú következtetéseket **kategórikus szillogizmusoknak** nevezzük, a feltételek neve: **premissza**, a következményé: **konklúzió.**
Ezeket egy vízszintes vonallal szoktuk elválasztani egymástól.
Például:
(1) Minden ember halandó
(2) Szokratész ember

---

(3) Tehát Szokratész halandó.

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó:

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$
(2) Szokratész ember:

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$
(2) Szokratész ember: $E(s)$

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$
(2) Szokratész ember: $E(s)$

---

(3) Tehát Szokratész halandó:

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \to H(x))$
(2) Szokratész ember: $E(s)$

---

(3) Tehát Szokratész halandó: $H(s)$

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$
(2) Szokratész ember: $E(s)$

---

(3) Tehát Szokratész halandó: $H(s)$

Igaz-ez a következtetés?

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \rightarrow H(x))$
(2) Szokratész ember: $E(s)$

---

(3) Tehát Szokratész halandó: $H(s)$

Igaz-ez a következtetés?

Könnyen látható, hogy a következtetés **helyes**.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
(2) Én nem csinálom meg.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \to B(x))$
(2) Én nem csinálom meg. $\neg M(e)$

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \to B(x))$

(2) Én nem csinálom meg. $\neg M(e)$

---

(3) Nem vagyok bolond:

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
(2) Én nem csinálom meg. $\neg M(e)$

---

(3) Nem vagyok bolond: $\neg B(e)$

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \to B(x))$
(2) Én nem csinálom meg. $\neg M(e)$

---

(3) Nem vagyok bolond: $\neg B(e)$
A következtetés **nem helyes.** Ha én bolond vagyok és nem csinálom meg, attól még az első mondat igaz marad. Hiszen az első mondat csak azokról beszélt, akik megcsinálják.

További példák (HF)

SGY2 2.3.(ii)

- Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.
- Nincs tökéletes ember. Minden görög ember. Tehát nincsen olyan görög, aki tökéletes.
- Van olyan férfi, akinek minden nő teszik. Tehát minden nő tetszik valakinek.
- Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.
- Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden férfi tetszik valakinek.
- Minden gazdag nő csúnya. Tehát minden szegény nő szép. (Itt szegény és gazdag, szép és csúnya legyen egymás ellentéte.)
- További példák a Serény jegyzetben ...

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete.

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \to F(x))$

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$\neg F(c)$

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \to F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete. $\neg F(c)$

---

(3) Ez a kréta nem holló:

Néhány megoldás

SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \to F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$\neg F(c)$

---

(3) Ez a kréta nem holló:	$\neg H(c)$

Néhány megoldás
SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$

(2) Ez a kréta nem fekete. $\neg F(c)$

---

(3) Ez a kréta nem holló: $\neg H(c)$

A következtetés **helyes**.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$

(2) Ez a kréta nem fekete.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete. $\forall x(H(x) \to F(x))$

(2) Ez a kréta nem fekete. $K(c) \land \neg F(c)$

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \to F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$K(c) \wedge \neg F(c)$

---

(3) Ez a kréta nem holló:

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \to F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$K(c) \wedge \neg F(c)$
(3) Ez a kréta nem holló:	$K(c) \wedge \neg H(c)$

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$K(c) \wedge \neg F(c)$
(3) Ez a kréta nem holló:	$K(c) \wedge \neg H(c)$

A következtetés így is **helyes**.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$K(c) \wedge \neg F(c)$
(3) Ez a kréta nem holló:	$K(c) \wedge \neg H(c)$

A következtetés így is **helyes**.

Majd később tanuljuk, hogyan lehet ilyen következtetéseket rezolúcióval be is bizonyítani ...

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

Na még egyet ...
SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

---

(2) Tehát minden nőnek teszik valaki.

Na még egyet ...
SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

---

(2) Tehát minden nőnek teszik valaki.
$\forall y(N(y) \rightarrow \exists x T(y, x))$

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

---

(2) Tehát minden nőnek teszik valaki.
$\forall y(N(y) \rightarrow \exists x T(y, x))$
Igaz?

Na még egyet ...
SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

---

(2) Tehát minden nőnek teszik valaki.
$\forall y(N(y) \rightarrow \exists x T(y, x))$
Igaz? A következtetés **nem helyes**, például elképzelhető, hogy egyáltalán nincsenek férfiak, de nők vannak, és senki nem tetszik senkinek ...

Na még egyet ...
SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

---

(2) Tehát minden nőnek teszik valaki.
$\forall y(N(y) \rightarrow \exists x T(y, x))$
Igaz? A következtetés **nem helyes**, például elképzelhető, hogy egyáltalán nincsenek férfiak, de nők vannak, és senki nem tetszik senkinek ... Vagy csak két nő van, az egyiknek minden férfi tetszik, a másiknak senki sem.

Házi feladat

- HF, a kimaradt példák és még **FZ2 I/7, 8, 13**.
- A formalizálás gyakorlásához mindenkinek ajánlott még megoldani a **KKK I. 18** példát. A feladatgyűjteményben ott a megoldás. Még később is szükség lesz rá.
- HF, a természetes számokra vonatkozó formulák felírása, **az előadáson bevezetett jelkészlettel** (amikor a műveletek $+$ és $\cdot$ függvény szimbólumként és nem az S és P predikátum szimbólumokkal vannak kifejezve. Ugye mennyivel könnyebb pl. **LM II.4/15.** és **LM II.4/16.**?
- HF* (nehezebb példák): **FZ2 I/6, 14** és mutassuk meg, hogy **FZ2 I/14** nem igaz, ha $F = \exists x_1 \ldots \exists x_n F^*$ alakú, vagy ha F^* tartalmaz függvény szimbólumot.
- Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a kielégíthetőség, tautológia, logikai következmény forgalma.
- Az **FZ1** "Ítéletkalkulus" c. feladatsor is kell majd: `www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps`

A szemantika alapfogalmai I.

Egy F elsőrendű formula

- **tautológia** (azonosan igaz), ha **bármely modellben igaz**, azaz $\forall\mathcal{A}$ struktúrára $\mathcal{A} \models F$;
- **kielégíthető**, ha **létezik modellje**, azaz $\exists\mathcal{A}$ struktúra, melyre $\mathcal{A} \models F$;
- **kielégíthetetlen** (azonosan hamis), ha **nem létezik modellje**, azaz $\forall\mathcal{A}$ struktúrára $\mathcal{A} \not\models F$.

Állítás

1. F kielégíthető $\Leftrightarrow$ $\neg F$ nem tautológia;
2. F tautológia $\Leftrightarrow$ $\neg F$ kielégíthetetlen.

Összefoglaló ábra és példák a táblán.

Az itéletkalkulus a predikátumkalkulus speciális esete

Az *ítéletkalkulus* vagy *zérusrendű logika*, az elsőrendű logikának (a predikátum kalkulusnak) azzal a speciális esetével (is) azonosítható, amelyben nincsenek függvényszimbólumok és a predikátum szimbólumok is mind 0 változósak, azaz logikai konstansok.
Ekkor nincs szükségünk változókra és kvantorokra, a modell fogalma, pedig a konstans predikátumszimbólumokhoz rendelt 0 vagy 1 logikai érték megadására egyszerűsödik:

$$\mathcal{A} : \mathcal{P}red \to \{0, 1\}.$$

Ezért zérusrendű logikában a konstans pedikátumszimbólumokat ítéletváltozóknak a modellt pedig az itéletváltozók kiértékelésének, vagy változóhozzárendelésnek is hívjuk. Jelölése: $\mathcal{A}(p)$, a p ítéletváltozó értéke az $\mathcal{A}$ modellben.

FZ1 I/3.

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák, bármely F és G formulák esetén!

a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$;

b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G)$;

c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G))$;

d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F))$.

FZ1 I/3.

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák, bármely F és G formulák esetén!

a) $(F \to G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$;

b) $(F \to G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G)$;

c) $(F \to G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G))$;

d) $(F \to G) \leftrightarrow ((\neg G) \to (\neg F))$.

c) megoldása. Igazságtábla módszerrel:

A sorokban F-nek és G-nek minden lehetséges igazságértéke fel van sorolva.

FZ1 I/3.

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák, bármely F és G formulák esetén!

a) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$;

b) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G)$;

c) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G))$;

d) $(F \rightarrow G) \leftrightarrow ((\neg G) \rightarrow (\neg F))$.

c) megoldása. Igazságtábla módszerrel:

A sorokban F-nek és G-nek minden lehetséges igazságértéke fel van sorolva.

$(F$	$\rightarrow$	$G)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	F	$\vee$	$(F$	$\wedge$	$G))$
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

FZ1 I/3.

Mutassuk meg, hogy az alábbi formulák tautológiák, bármely F és G formulák esetén!

a) $(F \to G) \leftrightarrow (\neg F \vee G)$;
b) $(F \to G) \leftrightarrow \neg(F \wedge \neg G)$;
c) $(F \to G) \leftrightarrow (\neg F \vee (F \wedge G))$;
d) $(F \to G) \leftrightarrow ((\neg G) \to (\neg F))$.

c) megoldása. Igazságtábla módszerrel:
A sorokban F-nek és G-nek minden lehetséges igazságértéke fel van sorolva.

$(F$	$\to$	$G)$	$\leftrightarrow$	$(\neg$	F	$\vee$	$(F$	$\wedge$	$G))$
0	1	0	1	1	0	1	0	0	0
0	1	1	1	1	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	1	1	1	1	1

Ha a kimenetben (amit a legkülső műveleti jel alatt van)

- mindig 1 szerepel $\Leftrightarrow$ a formula tautológia;
- van 1-es $\Leftrightarrow$ kielégíthető;
- mindig 0 szerepel $\Leftrightarrow$ kielégíthetetlen;

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg\exists x p(x)$
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$
3. $\forall x p(x) \to \neg\exists x p(x)$
4. $\forall x p(x) \to \neg\exists x \neg p(x)$
5. $\forall x \exists y r(x, y) \to \exists x \forall y r(x, y)$
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \to \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \to (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \to q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \to q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \to q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$ B
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$ B
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$ A
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$
6. $\exists x (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
7. $\forall x (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x (p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x [p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y [r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y [r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y (p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ — A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ — B
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$ — B
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$ — A
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$ — B!
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$ B
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$ A
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$ B!
6. $\exists x (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ A
7. $\forall x (p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$
8. $\neg[\forall x (p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x [p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y [r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y [r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y (p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$ B
4. $\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$ A
5. $\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$ B!
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ A
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$ B
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$
9. $\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg\exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \to \neg\exists x p(x)$ B
4. $\forall x p(x) \to \neg\exists x \neg p(x)$ A
5. $\forall x \exists y r(x, y) \to \exists x \forall y r(x, y)$ B!
6. $\exists x(p(x) \vee q(x)) \to \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ A
7. $\forall x(p(x) \vee q(x)) \to \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$ B
8. $\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \to (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$ C
9. $\forall x p(x) \to q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \to q(y)]$
10. $\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
11. $\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \to q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1.	$\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$	A
2.	$p(x) \wedge \neg p(y)$	B
3.	$\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$	B
4.	$\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$	A
5.	$\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$	B!
6.	$\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$	A
7.	$\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$	B
8.	$\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$	C
9.	$\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$	B
10.	$\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$	
11.	$\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$	
12.	$\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$	

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$ — A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ — B
3. $\forall x p(x) \to \neg \exists x p(x)$ — B
4. $\forall x p(x) \to \neg \exists x \neg p(x)$ — A
5. $\forall x \exists y r(x, y) \to \exists x \forall y r(x, y)$ — B!
6. $\exists x (p(x) \vee q(x)) \to \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ — A
7. $\forall x (p(x) \vee q(x)) \to \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$ — B
8. $\neg[\forall x (p(x) \wedge q(x)) \to (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$ — C
9. $\forall x p(x) \to q(y) \leftrightarrow \forall x [p(x) \to q(y)]$ — B
10. $\exists x \forall y [r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$ — C
11. $\forall x \exists y [r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y (p(f(y)) \to q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1. $\exists x p(x) \vee \neg\exists x p(x)$ A
2. $p(x) \wedge \neg p(y)$ B
3. $\forall x p(x) \to \neg\exists x p(x)$ B
4. $\forall x p(x) \to \neg\exists x \neg p(x)$ A
5. $\forall x \exists y r(x,y) \to \exists x \forall y r(x,y)$ B!
6. $\exists x (p(x) \vee q(x)) \to \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$ A
7. $\forall x (p(x) \vee q(x)) \to \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$ B
8. $\neg[\forall x (p(x) \wedge q(x)) \to (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$ C
9. $\forall x p(x) \to q(y) \leftrightarrow \forall x [p(x) \to q(y)]$ B
10. $\exists x \forall y [r(x,y) \leftrightarrow \neg r(y,y)]$ C
11. $\forall x \exists y [r(x,y) \leftrightarrow \neg r(y,y)]$ B
12. $\forall x p(x) \wedge \forall y (p(f(y)) \to q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$

Példák elsőrendű logikában

Döntsük el, hogy az alábbi formulák melyik kategóriába esnek:
A) tautológiák, B) nem taut., de kielégíthetők, C) kielégíthetetlenek.

1.	$\exists x p(x) \vee \neg \exists x p(x)$	A
2.	$p(x) \wedge \neg p(y)$	B
3.	$\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x p(x)$	B
4.	$\forall x p(x) \rightarrow \neg \exists x \neg p(x)$	A
5.	$\forall x \exists y r(x, y) \rightarrow \exists x \forall y r(x, y)$	B!
6.	$\exists x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \exists x p(x) \vee \exists x q(x)$	A
7.	$\forall x(p(x) \vee q(x)) \rightarrow \forall y p(y) \vee \forall z q(z)$	B
8.	$\neg[\forall x(p(x) \wedge q(x)) \rightarrow (\forall x p(x) \wedge \forall x q(x))]$	C
9.	$\forall x p(x) \rightarrow q(y) \leftrightarrow \forall x[p(x) \rightarrow q(y)]$	B
10.	$\exists x \forall y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$	C
11.	$\forall x \exists y[r(x, y) \leftrightarrow \neg r(y, y)]$	B
12.	$\forall x p(x) \wedge \forall y(p(f(y)) \rightarrow q(y)) \wedge \exists z \neg q(z)$	C

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \to G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \to G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \rightarrow G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \rightarrow G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt)

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \to G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \to G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt)
Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ modell: $\mathcal{A}(G) = 0$

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \to G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \to G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt)
Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists\mathcal{A}$ modell: $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow \mathcal{A}(F \to G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0$

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \rightarrow G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \rightarrow G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt)
Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ modell: $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow$ de ez ellentmond annak, hogy $\models F \rightarrow G$.

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \to G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \to G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt)
Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ modell: $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow \mathcal{A}(F \to G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow$ de ez ellentmond annak, hogy $\models F \to G$.

b) **NEM IGAZ.**

FZ1 I/10. Bizonyítsuk be, vagy adjunk ellenpéldát!

a) Ha $\models (F \to G)$ és $\models F$, akkor $\models G$;

b) Ha $F \to G$ kielégíthető és F kielégíthető, akkor G is kielégíthető.

Megoldások:

a) **IGAZ.** <ID>(ID=indirekt)
Ha G nem tautológia $\Rightarrow \exists \mathcal{A}$ modell: $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow \mathcal{A}(F \to G) = 0$, mert $\mathcal{A}(F) = 1$, $\mathcal{A}(G) = 0$
$\Rightarrow$ de ez ellentmond annak, hogy $\models F \to G$.

b) **NEM IGAZ.**
Pl: $F = p$, $G = \downarrow$ esetén.

Egy kicsit komolyabb feladat (HF)

FZ1 I/6. Legyenek F és G az **ítéletkalkulus** formulái. Tegyük fel, hogy $\models (F \to G)$, továbbá, hogy F-nek és G-nek **nincs közös ítéletváltozója.** Mutassuk, meg, hogy ekkor F kielégíthetetlen vagy G tautológia. Mutassuk meg, hogy a bizonyításhoz szükséges feltenni, hogy ne legyen F-nek és G-nek közös ítéletváltozója.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$\models F \to G \overset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \forall \mathcal{A} : \mathit{Var} \to \{0, 1\}$ kiértékelésre $\mathcal{A}(F \to G) = 1$
$\Leftrightarrow \forall \mathcal{A}$ kiértékelésre ($\mathcal{A}(F) = 0$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1$)

I. Ha most $\forall \mathcal{A}$ kiértékelésre $\mathcal{A}(F) = 0$ akkor F kielégíthetetlen.
II. Ha van olyan $\mathcal{A}'$ kiértékelés, hogy $\mathcal{A}'(F) \neq 0$ akkor meg kell mutatnunk, hogy G tautológia.

A bizonyítás folytatása

II. igazolásához, vegyünk egy tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelést.
Mivel F-nek és G-nek nincs közös ítéletváltozója, készíthetünk egy olyan $\mathcal{B}$ kiértékelés melyre

$$\mathcal{B}(p_i) = \begin{cases} \mathcal{A}'(p_i) & \text{ha } p_i \in \mathrm{Var}(F) \\ \tilde{\mathcal{A}}(p_i) & \text{ha } p_i \in \mathrm{Var}(G) \end{cases}$$

Ekkor $\mathcal{B}(F \to G) = 1$ mert $F \to G$ tautológia, de $\mathcal{B}(F) = \mathcal{A}'(F) = 1$ ezért $\mathcal{B}(G) = 1$. Mivel $\tilde{\mathcal{A}}(G) = \mathcal{B}(G) = 1$ teljesül tetszőleges $\tilde{\mathcal{A}}$ kiértékelésre, ezért $\models G$.

A nincs közös ítéletváltozójuk feltétel valóban szükséges. Pl. $F = p \wedge q$, $G = p$ esetén $\models F \to G$ teljesül de F kielégíthető és G nem tautológia.

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza kiekielégíthető ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazzá teszi, azaz $\exists\mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$-ra $\mathcal{A} \models F$.

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza kiekielégíthető ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazzá teszi, azaz $\exists \mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$-ra $\mathcal{A} \models F$.

FZ1 I/8. Kielégíthetők-e a következő formulahalmazok?

a) $\{p, q, p \to r, \neg r\}$

b) $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \ldots\}$

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza kiekielégíthető ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazzá teszi, azaz $\exists\mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$-ra $\mathcal{A} \models F$.

FZ1 I/8. Kielégíthetők-e a következő formulahalmazok?

a) $\{p, q, p \to r, \neg r\}$

b) $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \ldots\}$

a) NEM. Ha az első kettő és az utolsó formula igaz egy $\mathcal{A}$ modellben, akkor szükségképpen $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(q) = 1$ és $A(r) = 0$, de ekkor az implikáció definíciója miatt $\mathcal{A} \not\models p \to r$.

Formulahalmazok kielégíthetősége

Formulák egy Σ halmaza kiekielégíthető ha létezik olyan modell, mely egyszerre minden elemét igazzá teszi, azaz $\exists\mathcal{A}$ modell, hogy minden $F \in \Sigma$-ra $\mathcal{A} \models F$.

FZ1 I/8. Kielégíthetők-e a következő formulahalmazok?

a) $\{p, q, p \to r, \neg r\}$

b) $\{p_1 \vee p_2, \neg p_2 \vee \neg p_3, p_3 \vee p_4, \neg p_4 \vee \neg p_5, \ldots\}$

a) NEM. Ha az első kettő és az utolsó formula igaz egy $\mathcal{A}$ modellben, akkor szükségképpen $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(q) = 1$ és $A(r) = 0$, de ekkor az implikáció definíciója miatt $\mathcal{A} \not\models p \to r$.

b) IGEN.

Legyen például $\mathcal{A}(p_i) = \begin{cases} 1 & \text{ha i páratlan} \\ 0 & \text{ha i páros} \end{cases}$ (vagy fordítva)

FZ1 I/9. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.

FZ1 I/9. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.

Megoldás:

$$\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_2 \leftrightarrow p_3, p_3 \leftrightarrow \neg p_1\}$$

FZ1 I/9. Adjunk példát olyan három elemű Γ formulahalmazra amely kielégíthetetlen, de minden két elemű részhalmaza kielégíthető. Általánosítsuk a példát n elemű halmazra is.

Megoldás:

$$\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_2 \leftrightarrow p_3, p_3 \leftrightarrow \neg p_1\}$$

Általánosítása:

$$\{p_1 \leftrightarrow p_2, p_2 \leftrightarrow p_3, \ldots, p_{n-1} \leftrightarrow p_n, p_n \leftrightarrow \neg p_1\}$$

Logikai következmény és ekvivalencia

Legyen Σ egy formulahalmaz, ekkor Σ modelljeinek a halmaza legyen

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) := \{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \models \Sigma\}.$$

Egy Σ formulahalmaznak logikai következménye egy F formula, ha Σ minden modellje modellje F-nek is. Jelölése: $\Sigma \models F$.

Röviden: $\Sigma \models F \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Mod}(\Sigma) \subseteq \mathrm{Mod}(F)$.

Azt mondjuk, hogy az F és G formula ekvivalens, ha F pontosan ugyanazokban a modellekben igaz, mint G. Jele: $F \equiv G$.

Röviden: $F \equiv G \;\Leftrightarrow\; \mathrm{Mod}(F) = \mathrm{Mod}(G)$.

Alapvető összefüggések

Az ítéletkalkulusban

- két formula ekvivalens $\Leftrightarrow$ igazságtáblázatuk eredmény oszlopa megegyezik;
- $\Sigma \models F \Leftrightarrow$ ha az igazságtáblázatokban ha Σ minden formulájának eredmény oszlopa 1, akkor ott F eredméynoszlopában is 1 van.

Alapvető összefüggések

Az ítéletkalkulusban

- két formula ekvivalens $\Leftrightarrow$ igazságtáblázatuk eredmény oszlopa megegyezik;
- $\Sigma \models F \Leftrightarrow$ ha az igazságtáblázatokban ha Σ minden formulájának eredmény oszlopa 1, akkor ott F eredméynoszlopában is 1 van.

Állítás.

- $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.;
- $\Sigma \models F \Leftrightarrow \Sigma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen.

FZ1 I/11. első rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;

b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \to G$.

c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

FZ1 I/11. első rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;

b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \to G$.

c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ-é is.

FZ1 I/11. első rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;

b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \to G$.

c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ-é is.

b) $\forall \mathcal{A}$ modellre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor

FZ1 I/11. első rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;

b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.

c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ-é is.

b) $\forall \mathcal{A}$ modellre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$

FZ1 I/11. első rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;

b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \rightarrow G$.

c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ-é is.

b) $\forall \mathcal{A}$ modellre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$

II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F\}$, így $\Gamma \cup \{F\} \models G$ miatt $\mathcal{A}(G) = 1$. Ezért $\mathcal{A}(F \rightarrow G) = 1$

FZ1 I/11. első rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

a) Ha $\Gamma \models F$ és $\Gamma \subseteq \Delta$, akkor $\Delta \models F$;

b) $\Gamma \cup \{F\} \models G$ akkor és csak akkor, ha $\Gamma \models F \to G$.

c) Ha $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ és $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$, akkor $\Gamma \models F$;

Megoldások:

a) triviális, ha Δ minden formulája igaz, akkor Γ-é is.

b) $\forall \mathcal{A}$ modellre, ha $\mathcal{A} \models \Gamma$ akkor

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}(F \to G) = 1$

II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F\}$, így $\Gamma \cup \{F\} \models G$ miatt $\mathcal{A}(G) = 1$. Ezért $\mathcal{A}(F \to G) = 1$

c) $\Gamma \models F \Leftrightarrow \Gamma \cup \{\neg F\}$ kielégíthetetlen. Ez indirekt bizható:
Tfh. $\Gamma \cup \{\neg F\}$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A}$ modell, melyre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{\neg F\}$.
Ha most $\mathcal{A}(G) = 0$, akkor $\Gamma \cup \{\neg F\} \models G$ nem teljesül.
Ha viszont $\mathcal{A}(G) = 1$, akkor $\Gamma \cup \{\neg F\} \models \neg G$ nem teljesül.
ELLENTMONDÁS!

FZ1 I/11. második rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;

e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

FZ1 I/11. második rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;

e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

FZ1 I/11. második rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;

e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

d) $\forall \mathcal{A}$ modellre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\}$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1)$
$\Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$.
Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.

FZ1 I/11. második rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;

e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

d) $\forall \mathcal{A}$ modellre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\}$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1)$
$\Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$.
Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.

e) ID Tfh. $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \Delta$.

FZ1 I/11. második rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;

e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

d) $\forall \mathcal{A}$ modellre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\}$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1)$
$\Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$.
Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.

e) ID Tfh. $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \Delta$.

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0$, akkor $\Gamma \models F$ nem teljesül.

FZ1 I/11. második rész (nem kötelező)

FZ1 I/11. Legyen Γ és Δ két formulahalmaz, és F és G legyenek formulák. Bizonyítsuk be a következőket!

d) Ha $\Gamma \cup \{F\} \models H$ és $\Gamma \cup \{G\} \models H$, akkor $\Gamma \cup \{F \vee G\} \models H$;

e) Ha $\Gamma \models F$ és $\Delta \models \neg F$, akkor $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthetetlen.

Megoldások:

d) $\forall \mathcal{A}$ modellre $\mathcal{A} \models \Gamma \cup \{F \vee G\}$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F \vee G) = 1$
$\Rightarrow \mathcal{A} \models \Gamma$ és $(\mathcal{A}(F) = 1$ vagy $\mathcal{A}(G) = 1)$
$\Rightarrow (\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(F) = 1)$ vagy $(\mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A}(G) = 1)$.
Mindkét esetben a feltételek miatt $\mathcal{A}(H) = 1$.

e) ID Tfh. $\Gamma \cup \Delta$ kielégíthető $\Leftrightarrow \exists \mathcal{A} : \mathcal{A} \models \Gamma$ és $\mathcal{A} \models \Delta$.

I.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 0$, akkor $\Gamma \models F$ nem teljesül.
II.eset Ha $\mathcal{A}(F) = 1$, akkor $\Delta \models \neg F$ nem teljesül.
ELLENTMONDÁS!!!

Konjunktív és diszjunktív normálformára hozás

FZ1 II/3. c Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

Konjunktív és diszjunktív normálformára hozás

FZ1 II/3. c Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

1.lépés: $F \rightarrow G$ helyett $\neg F \vee G$

$F \leftrightarrow G$ helyett $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s) \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \vee s) \equiv$

$\neg \Big((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \Big) \vee (r \vee s) \equiv$

Konjunktív és diszjunktív normálformára hozás

FZ1 II/3. c Hozzuk DNF-ra és KNF-re következő formulát:

$$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s)$$

1.lépés: $F \rightarrow G$ helyett $\neg F \vee G$

$F \leftrightarrow G$ helyett $(F \rightarrow G) \wedge (G \rightarrow F) \equiv (\neg F \vee G) \wedge (\neg G \vee F)$

$(p \leftrightarrow q) \rightarrow (r \vee s) \equiv \neg(p \leftrightarrow q) \vee (r \vee s) \equiv$

$\neg \Big((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p) \Big) \vee (r \vee s) \equiv$

2.lépés: $\neg$ bevitele

$\neg(F \vee G) \equiv \neg F \wedge \neg G$, $\neg(F \wedge G) \equiv \neg F \vee \neg G$, és $\neg\neg F \equiv F$ alapján.

$\equiv \Big(\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p) \Big) \vee (r \vee s) \equiv \Big((\neg\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg\neg q \wedge \neg p) \Big) \vee r \vee s \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p) \vee r \vee s.$

Ez már DNF, a harmadik lépésre most nincs szükség.

Folytatás

A KNF-hez szükséges még a

Folytatás

A KNF-hez szükséges még a

3. lépés: a disztributivitás használata

Folytatás

A KNF-hez szükséges még a

3. lépés: a disztributivitás használata
KNF-nál a $\wedge$ kivitele: $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$ alapján.

Folytatás

A KNF-hez szükséges még a

3. lépés: a disztributivitás használata

KNF-nál a $\wedge$ kivitele: $(F \wedge G) \vee H \equiv (F \vee H) \wedge (G \vee H)$ alapján.

DNF-nál a $\vee$ kivitele: $(F \vee G) \wedge H \equiv (F \wedge H) \vee (G \wedge H)$ alapján.

$$\Big((p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)\Big) \vee r \vee s \equiv$$

$$\Big((p \vee q) \wedge (p \vee \neg p) \wedge (\neg q \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)\Big) \vee r \vee s \equiv$$

$$\equiv \Big((p \vee q) \wedge (\neg q \vee \neg p)\Big) \vee r \vee s \equiv$$

$(p \vee q \vee r \vee s) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r \vee s)$ Ez már KNF!

Gyakorláshoz

A **FZ1 II/3.** feladat megoldásai:

a) $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
$(\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

b) $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
$\neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (r \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg r)$

c) $(\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s)$
$(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee r \vee s$

d) $\uparrow$ (tautológia) (üres KNF)
pl: $p \vee \neg p$ VIGYÁZAT <u>az üres DNF azonosan HAMIS!</u>

e) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Gyakorláshoz

A **FZ1 II/3.** feladat megoldásai:

a) $(\neg p \vee q \vee r) \wedge (\neg r \vee p) \wedge (\neg r \vee \neg q)$
$(\neg r \wedge \neg p) \vee (\neg r \wedge q) \vee (p \wedge \neg q \wedge r)$

b) $(\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee r)$
$\neg p \vee (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \equiv \neg p \vee (r \wedge q) \vee (\neg q \wedge \neg r)$

c) $(\neg p \vee \neg q \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s)$
$(\neg p \wedge q) \vee (\neg q \wedge p) \vee r \vee s$

d) $\uparrow$ (tautológia) (üres KNF)
pl: $p \vee \neg p$ VIGYÁZAT az üres DNF azonosan HAMIS!

e) $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee q \vee \neg r) \wedge (p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (p \vee q \vee r)$
$(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge q \wedge r)$

Konjunktív és diszjunktív normálformák ellenőrzéséhez (és még sok minden máshoz) ajánlom még a következő linket:
`logik.phl.univie.ac.at/~chris/formular-uk.html`

Házi feladat

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 I/1, 2, 4, 5, 12**.
- **FZ2 I/4**.
- HF* (nehezebb példa): **FZ1 I/7**.