Logika és informatikai alkalmazásai

2. levelezős gyakorlat

Németh L. Zoltán

`http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth`

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Horn-formulák

Az alábbi itéletkalkulusbeli formulákat hozzuk konjunktív normálformára, majd írjuk őket „implikációs alakba" (a tagokra a $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \ldots \vee \neg q_n \equiv q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n \rightarrow p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$ azonosságot használva, üres konjunkció: $\uparrow$, üres diszjunkció: $\downarrow$).
Írjuk fel a formulákat a rezolúciónál használt halmazos formátumban is. Melyek közülük Horn-formulák? A Horn-formulák kielégíthetőségét vizsgáljuk meg a tanult algoritmussal.

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$

b) $p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge (\neg s \vee r))$

c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

d) $(p \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

e) $\downarrow$

f) $\uparrow$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$
Konjunktív normálformára kell hozni:
$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$
Konjunktív normálformára kell hozni:
$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv$
$(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \equiv$
$(p \rightarrow r) \wedge (p \wedge q \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow q \vee r) \equiv$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$
Konjunktív normálformára kell hozni:
$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv$
$(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \equiv$
$(p \rightarrow r) \wedge (p \wedge q \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow q \vee r) \equiv$
$\{\{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{q, r\}\}$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$
Konjunktív normálformára kell hozni:
$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv$
$(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \equiv$
$(p \to r) \wedge (p \wedge q \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to q \vee r) \equiv$
$\{\{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{q, r\}\}$
Nem Horn-formula, mert a harmadik tag nem Horn-tag (mivel egynél több pozitív literált tartalmaz).

b) $p \to ((q \to r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv$
$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee r) \equiv$
$\equiv (p \wedge q \to r) \wedge (p \wedge s \to r) \equiv \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg s, r\}\}$,
ebben az alakban Horn-formula. Kielégíthető, legyen minden változó hamis.

Megoldások II

c)
$(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r) \equiv q \wedge (p \vee \neg r) \equiv (\uparrow \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \equiv \{\{q\}, \{p, \neg r\}\}$
A második (hosszú) formula nem Horn-formula, de a harmadik (egyszerűsített) már igen. Kielégíthető $\mathcal{A}(q) = 1$, $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(r) = 0$.
e) $\downarrow \equiv \uparrow \rightarrow \downarrow \equiv \{\square\}$ (csak az üres klózt tartalmazó KNF), Horn-formula. Kielégíthetetlen.
f) $\uparrow \equiv p \vee \neg p \equiv p \rightarrow p \equiv \{\{p, \neg p\}\}$, Horn-formula, kielégíthető. (Másik megoldás: $\emptyset$: üres, azaz egyetlen klózt sem tartalmazó KNF.)

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli:

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s,

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \to \downarrow) \wedge (s \wedge v \to p) \wedge (t \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to s)$$
$$\wedge (\uparrow \to q) \wedge (u \to v) \wedge (\uparrow \to u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q,

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u,

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v,

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v, p.

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v, p. Azaz

$$(\boxed{p} \wedge \boxed{q} \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{v} \rightarrow \boxed{p}) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{u} \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{u})$$

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v, p. Azaz

$$(\boxed{p} \wedge \boxed{q} \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{v} \rightarrow \boxed{p}) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{u} \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{u})$$

Mivel nincs olyan $(q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \rightarrow \downarrow)$ tag, melynek a baloldalán **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthető, és

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \to \downarrow) \wedge (s \wedge v \to p) \wedge (t \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to s) \\ \wedge (\uparrow \to q) \wedge (u \to v) \wedge (\uparrow \to u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v, p. Azaz

$$(\boxed{p} \wedge \boxed{q} \wedge r \to \downarrow) \wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{v} \to \boxed{p}) \wedge (t \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to \boxed{s}) \\ \wedge (\uparrow \to \boxed{q}) \wedge (\boxed{u} \to \boxed{v}) \wedge (\uparrow \to \boxed{u})$$

Mivel nincs olyan $(q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \to \downarrow)$ tag, melynek a baloldalán **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthető, és $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(p) = 1$, $\mathcal{A}(r) = \mathcal{A}(t) = 0$ igazzá teszi.

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg:

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v,

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s,

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \to \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \to r) \wedge (t \to t) \wedge (\uparrow \to \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \to \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \to \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \to \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \to \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \to \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \to \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p,

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p, q,

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \to \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \to r) \wedge (t \to t) \wedge (\uparrow \to \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \to \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \to \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \to \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \to \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \to \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \to \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p, q, u,

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p, q, u, w.

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p, q, u, w.
Mivel a $(\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow)$ a tagban a baloldalon **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthetetlen.

Házi feladat

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 II/3, 4, 5, III/1, 2.**
- Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a Horn-formulák és a rezolúció alapfogalmai és algoritmusa.

Rezolúció I

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$;

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$;

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$.

Rezolúció I

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$;

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$;

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$.

b) megoldása.

Rezolúció I

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$;

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$;

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$.

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:
$F = \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \wedge q \equiv$
$(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q$

Rezolúció I

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r));$

b) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q);$

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \to \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s).$

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:

$F = \neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q) \equiv ((p \to q) \to \neg q) \ \wedge q \ \ \equiv$
$(\neg(p \to q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q$

F mint klózok halmaza:

Rezolúció I

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \to r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$;

b) $\neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q)$;

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \to \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$.

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:

$F = \neg(((p \to q) \to \neg q) \to \neg q) \equiv ((p \to q) \to \neg q) \wedge q \equiv$
$(\neg(p \to q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q$

F mint klózok halmaza: $F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\}$ $\in F$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \quad \in F$
2. $\{\neg q\} \quad \in F$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\} \quad \in F$
2. $\{\neg q\} \quad \in F$
3. $\{q\} \quad \in F$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\}$ $\in F$
2. $\{\neg q\}$ $\in F$
3. $\{q\}$ $\in F$
4. $\{\Box\}$ Res 2,3

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\}$ $\in F$
2. $\{\neg q\}$ $\in F$
3. $\{q\}$ $\in F$
4. $\{\square\}$ Res 2,3

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\square$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\}$ $\in F$
2. $\{\neg q\}$ $\in F$
3. $\{q\}$ $\in F$
4. $\{\Box\}$ Res 2,3

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\Box$
Ezért F **kielégíthetetlen.**

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \square \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\}$ $\in F$
2. $\{\neg q\}$ $\in F$
3. $\{q\}$ $\in F$
4. $\{\square\}$ Res 2,3

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\square$
Ezért F **kielégíthetetlen**.
Ha az üres klóz nem lenne levezethető (ezt észrevesszük, mert egy idő után nem tudunk rezolúcióval újabb klózokat képezni, amikor már előállítottuk $Res^*(\Sigma)$ miden elemét), akkor F kielégíthető lenne.

Rezolúció II.

FZI. V/5.

Adjuk meg a $Res^2(F)$ klózhalmazt!

a) $F = \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{p\}, \{q, r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\}$;

b) $F = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{\neg r\}\}$.

b) megoldása.

b) megoldása.

1.	$\neg p, \neg q, r$	$\in F$	
2.	p, r	$\in F$	
3.	q, r	$\in F$	
4.	$\neg r$	$\in F$	1-4.=Res^0(F)
5.	$\neg q, r$	Res 1,2	
6.	$\neg p, r$	Res 1,3	
7.	$\neg p, \neg q$	Res 1,4	
8.	p	Res 2,4	
9.	q	Res 3,4	1-9.=Res^1(F)
10.	r	Res 2,6	
11.	$\neg q$	Res 4,5	
12.	$\neg p$	Res 4,6	1-12.=Res^2(F)
13.	$\square$	Res 4,10	1-13.=Res^3(F)

Így Res^2(F)-nek **nem eleme** $\square$.
Különben Res^4(F)=$Res^3(F)$, így Res^*(F)=Res^3(F), és
$\square \in Res^*$(F), ezért F kielégíthetetlen.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \to q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \to q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

d) $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow$ $\neg F$ kielégíthetetlen.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow \neg F$ kielégíthetetlen.

Megoldások.

a) $\neg F = (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q = \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$.

1.	$\neg p, q$	$\in F$
2.	p	$\in F$
3.	$\neg q$	$\in F$
4.	q	Res 1,2
5.	$\square$	Res 3,4

Így $\neg F$ kielégíthetetlen, ezért F tautológia.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \rightarrow q) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r))$

d) $(p \rightarrow r) \rightarrow ((q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow \neg F$ kielégíthetetlen.

Megoldások.

a) $\neg F = (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q = \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$.

1.	$\neg p, q$	$\in F$
2.	p	$\in F$
3.	$\neg q$	$\in F$
4.	q	Res 1,2
5.	$\square$	Res 3,4

Így $\neg F$ kielégíthetetlen, ezért F tautológia.

b) nem tautológia. c) tautológia. d) tautológia.

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \rightarrow \neg q$ és $q \rightarrow \neg p$

b) $(p \vee q \rightarrow r)$ és $(\neg r \rightarrow \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

$$
\begin{array}{ll}
1.\ \neg p, \neg q & \in \Sigma \\
2.\ p, q & \in \Sigma \\
3.\ \neg r & \in \Sigma
\end{array}
$$

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1.	$\neg p, \neg q$	$\in \Sigma$
2.	p, q	$\in \Sigma$
3.	$\neg r$	$\in \Sigma$

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1. $\neg p, \neg q$	$\in \Sigma$
2. p, q	$\in \Sigma$
3. $\neg r$	$\in \Sigma$
4. $\neg q, q$	$\mathrm{Res}\, 1, 2$
5. $\neg p, p$	$\mathrm{Res}\, 1, 2$

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1. $\neg p, \neg q$	$\in \Sigma$
2. p, q	$\in \Sigma$
3. $\neg r$	$\in \Sigma$
4. $\neg q, q$	$\mathrm{Res}\, 1, 2$
5. $\neg p, p$	$\mathrm{Res}\, 1, 2$

1-5. $= \mathrm{Res}^1(\Sigma) = \mathrm{Res}^2(\Sigma) = \mathrm{Res}^*(\Sigma)$.

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.

a) ekvivalensek, HF!

b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)

$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

1. $\neg p, \neg q$	$\in \Sigma$
2. p, q	$\in \Sigma$
3. $\neg r$	$\in \Sigma$
4. $\neg q, q$	$\mathrm{Res} 1, 2$
5. $\neg p, p$	$\mathrm{Res} 1, 2$

1-5. $= \mathrm{Res}^1(\Sigma) = \mathrm{Res}^2(\Sigma) = \mathrm{Res}^*(\Sigma)$. Mivel $\square \notin \mathrm{Res}^*(\Sigma)$, ezért Σ kielégíthető, így F és G **nem ekvivalensek**.

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p),\} \models r \rightarrow p$

b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p),\} \models r \rightarrow p$

b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \to (q \to p),\} \models r \to p$

b) $\{F \to K, K \to A, F \vee R, R \to (H \to A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \to K, K \to A, F \vee R, R \to (H \to A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \to M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

Megoldások

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \rightarrow (q \rightarrow p), \} \models r \rightarrow p$

b) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \rightarrow K, K \rightarrow A, F \vee R, R \rightarrow (H \rightarrow A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \rightarrow M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

Megoldások a) Igaz b) Igaz. c) Nem igaz. d) Igaz.

a) megoldása

a) $F_1 = \underbrace{q}$, $F_2 = r \to (q \to p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}$, $G = r \to p$ és

$\neg G = \neg(r \to p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$

a) megoldása

a) $F_1 = \underbrace{q}$, $F_2 = r \rightarrow (q \rightarrow p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}$, $G = r \rightarrow p$ és

$\neg G = \neg(r \rightarrow p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

a) megoldása

a) $F_1 = \underbrace{q}$, $F_2 = r \to (q \to p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}$, $G = r \to p$ és

$\neg G = \neg(r \to p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

1. q	$\in \Sigma$
2. $\neg r, \neg q, p$	$\in \Sigma$
3. r	$\in \Sigma$
4. $\neg p$	$\in \Sigma$

a) megoldása

a) $F_1 = \underbrace{q}$, $F_2 = r \to (q \to p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}$, $G = r \to p$ és

$\neg G = \neg(r \to p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

1. q	$\in \Sigma$
2. $\neg r, \neg q, p$	$\in \Sigma$
3. r	$\in \Sigma$
4. $\neg p$	$\in \Sigma$
5. $\neg r, p$	$\mathrm{Res} 1, 2$
6. p	$\mathrm{Res} 3, 5$
7. $\square$	$\mathrm{Res} 4, 6$

a) megoldása

a) $F_1 = \underbrace{q}_{}$, $F_2 = r \to (q \to p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}_{}$, $G = r \to p$ és

$\neg G = \neg(r \to p) \equiv \underbrace{r}_{} \wedge \underbrace{\neg p}_{}$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

1. q	$\in \Sigma$
2. $\neg r, \neg q, p$	$\in \Sigma$
3. r	$\in \Sigma$
4. $\neg p$	$\in \Sigma$
5. $\neg r, p$	$\mathrm{Res}\,1, 2$
6. p	$\mathrm{Res}\,3, 5$
7. $\square$	$\mathrm{Res}\,4, 6$

Ezért Σ kielégíthetetlen, ami azt mutatja, hogy **a logikai következtetés fennáll.**

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval II.

6. Formalizálja az alábbi mondatokat és döntse el rezolúcióval, hogy az első két mondatnak logikai következménye-e a harmadik.

F_1: Ha Peti busszal utazik és a busz késik, akkor Peti nem ér oda a találkozóra.

F_2: Petinek nem kell hazamennie, ha nem ér oda a találkozóra és ha rosszkedvű.

F_3: Ha Petinek haza kell mennie, és Peti busszal utazik, akkor Peti nem lesz rosszkedvű, ha késik a busz.

Megoldás

- B = „ Peti busszal utazik.”
- K = „ A busz késik.”
- O = „ Peti odaér a találkozóra.”
- H = „ Petinek haza kell mennie.”
- R = „ Peti rosszkedvű (lesz).”

- $F_1 = B \wedge K \rightarrow \neg O \equiv \neg B \vee \neg K \vee \neg O$;
- $F_2 = \neg O \wedge R \rightarrow \neg H \equiv O \vee \neg R \vee \neg H$;
- $F_3 = (H \wedge B) \rightarrow (K \rightarrow \neg R)$;
- $\neg F_3 = H \wedge B \wedge K \wedge R$;

A $\Sigma = \{\{\neg B, \neg K, \neg O\}, \{O, \neg R, \neg H\}, \{H\}, \{B\}, \{K\}, \{R\}\}$
halmazból pedig levezethető az üres klóz (HF!)
Így **a logikai következtetés fennáll.**

Házi feladat

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 V/3, 6, 7, 8.**
- HF* (nehezebb példák): **FZ1 V/1, 2.**

Zárt Skolem normálformára hozás

Alapfogalmak

Egy formula

- zárt: ha nincs benne szabad változó;
- kiigazított: ha különböző kvantorok különböző változókat kötnek le és a kötött változók a szabad változóktól is különböznek.
- prenex alakú: ha a kvantorok a formula legelején vannak és az egész kvantormentes részre (azaz a formula magjára) vonatkoznak. Pl: $\forall x p(x) \to q(y)$ nem prenex alakú, de $\exists x (p(x) \to q(y))$ igen.
- Skolem normálformájú: ha $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F^*$ alakú, ahol F^* kvantormentes, $n \geq 0$. Azaz olyan prenex alak, melyben **csak univerzális kvantor szerepel**.

Ekvivalens, s-ekvivalens

Két formula, F és G

- ekvivalens, ha pontosan ugyanazokban a modellekben igazak, azaz $\mathrm{Mod(F)} = \mathrm{Mod(G)}$. Jele: $F \equiv G$.
- s-ekvivalens, ha pontosan ugyanakkor kielégíthetők, azaz $\mathrm{Mod(F)} \neq \emptyset \iff \mathrm{Mod(G)} \neq \emptyset$ Jele: $F \equiv_s G$.

Pl. $\forall x p(x) \equiv \neg\exists x \neg p(x)$.
De $\exists x(x \cdot x = x) \not\equiv (c \cdot c = c)$, csak $\exists x(x \cdot x = x) \equiv_s (c \cdot c = c)$.
Valóban, ha a természetes számok modelljét úgy bővítjük, hogy a c konstans interpretációja 2 legyen, akkor az első formula igaz, a második nem.
De bármely modellt, melyben $\exists x(x \cdot x = x)$ igaz, tudunk úgy módosítani, hogy módosított modellben $(c \cdot c = c)$ igaz legyen, ehhez csak a c interpretációját kell alkalmas objektumra megváltoztatnunk, ilyen objektum pedig létezni fog.
Megjegyzés. Minden F formulára vagy $F \equiv_s \uparrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthető) vagy pedig $F \equiv_s \downarrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthetetlen).

A Skolem normálformára hozás ajánlott lépései

1. lezárás
2. $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ kifejezése $\neg$, $\vee$ és $\wedge$-sel
3. kiigazítás
4. prenex alakra hozás
5. (szűkebb értelemben vett) Skolemizáció
6. a formula magjának konjunktív normálformára hozása, ha azt is kérik (pl. rezolúciónál szükség lesz rá.)
7. a Skolem-függvények változóktól való függése szükségességének vizsgálata, ha én kérem :)

Megjegyzés. 2, 3, 4 és 6 ekvivalens átalakítások, 1 és 5 csak s-ekvivalensek.
FZ2 II/5a Adjunk meg a következő formulával s-ekvivalens zárt Skolem normálformájú formulát.

$$\forall x\,[\exists y\, p(x,y) \rightarrow q(y,z)] \wedge \exists y\,[\forall x\, r(x,y) \vee q(x,y)]$$

1. Lezárás

$$F = \forall x\,[\exists y\; p(x,y) \to q(y,z)] \wedge \exists y\,[\forall x\; r(x,y) \vee q(x,y)]$$

Meg kell határoznunk a szabad változó előfordulásokat. Ehhez ki kell számítanunk a kvantorok hatáskörét. Minden kvantor a következő binér (kétváltozós) műveletei jelig vagy a formula végéig köt, kivéve, ha a zárójelek mást követelnek. Most a bekeretezett változó előfordulások a szabad előfordulások:

$$F = \forall x\left[\exists y\; p(x,y) \to q(\boxed{y},\boxed{z})\right] \wedge \exists y\left[\forall x\; r(x,y) \vee q(\boxed{x},y)\right]$$

Helyettesítsünk minden szabad változót egy-egy új, a formulában még nem szereplő konstanssal. Ugyanannak a változónak az előfordulásait természetesen ugyanazzal a konstanssal helyettesítsük. A példákban az ellenőrzés megkönnyítéséhez válasszuk mondjuk a konstansoknak mindig a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ szimbólumok közül.

Így

$$F = \forall x \left[\exists y\, p(x,y) \to q(\boxed{y}, \boxed{z}) \right] \wedge \exists y \left[\forall x\, r(x,y) \vee q(\boxed{x}, y) \right] \equiv_s$$
$$\equiv_s \forall x \left[\exists y\, p(x,y) \to q(c_1, c_2) \right] \wedge \exists y \left[\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3, y) \right].$$

Megjegyzés. A lezárást elvégezhetnénk úgy is, hogy a formula elején egzisztenciális kvantorral kötnénk le a szabad változókat. A példánkban $F \equiv_s \exists x \exists y \exists z F$, de a Skolemizáció az egzisztenciálisan kvantifikált változókból úgy is konstansokat fog csinálni.
Ha nem egyetlen F formulánk van, hanem formuláknak egy Σ halmazával dolgozunk, akkor az egész halmazban **ugyanazokat a konstansokat használjuk** az azonos szabad változók lekötésére. Ebben az esetben a formulánként egzisztenciális kvantorokkal való lekötés nem működik. Ha $\Sigma = \{F_1, F_2\}$ akkor általában $\exists x (F_1 \wedge F_2) \not\equiv_s \exists x F_1 \wedge \exists x F_2$.

2. $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ kifejezése

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$,
- $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$,
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
- $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

alkamazásával (izlés szerint).
Igazából a két tagadás nélküli azonosságot elég tudni, de ha úgy is KNF-ban kell a mag, akkor a többi azonossággal lehet némi időt spórolni.
Haladóknak: az implikációt nem muszáj kifejezni, de az implikációra vonatkozó kvantorkihúzási törvények egy kicsit bonyolultabbak. Az ekvivalenciát mindenképpen ki kell fejezni, mert nincs rá vonatkozó kvantorkihúzási törvény.

$$F \equiv_s \forall x\, [\exists y\, p(x,y) \boxed{\rightarrow} q(c_1,c_2)] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3,y)] \equiv$$
$$\equiv \forall x\, [\neg\exists y\, p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3,y)] \equiv$$

3. Kiigazítás

A kötött változók átnevezésével érjük el, hogy minden kvantornak saját változója legyen. Mivel az előző lépésben a szabad változóktól már megszabadultunk, azokra nem kell figyelni. (Különben a szabad változóktól is különböző kötött változókat kellene bevezetni).
Fontos észben tartani: a kötött változók átnevezése ekvivalens átalakítás, de a szabad változók nem nevezhetők át vagy cserélhetők konstansokra az ekvivalencia megtartásával.
Példáinkban az új változókat válasszuk $v_1, v_2, \ldots$ közül!

$$F \equiv_s \forall x\, [\neg \exists y\, p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x, y) \vee q(c_3, y)] \equiv$$
$$\equiv_s \forall x\, [\neg \exists y\, p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists v_1\, [\forall v_2\, r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)]\,.$$

4. Prenex alakra hozás

"Kvantorkihúzási" törvények:

- $\neg\forall xF(x) \equiv \exists x\neg F(x)$
- $\neg\exists xF(x) \equiv \forall x\neg F(x)$
- $F \vee QxG(x) \equiv Qx(F \vee G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $QxG(x) \vee F \equiv Qx(G(x) \vee F)$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $F \wedge QxG(x) \equiv Qx(F \wedge G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $QxG(x) \wedge F \equiv Qx(G(x) \wedge F)$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$

Szerencsére a kiigazítottság miatt az $x \notin FreeVar(F)$ (azaz, hogy x nem fordul elő szabadon F-ben) mindig teljesülni fog, arra külön nem kell figyelni.

A példa folytatása

$$F \equiv_s$$

$$\equiv_s \forall x \left[\neg \boxed{\exists y} \, p(x,y) \vee q(c_1,c_2) \right] \wedge \exists v_1 [\boxed{\forall v_2} \, r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$$

$$\equiv \forall x [\boxed{\forall y} \neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$$

$$\equiv \forall x \, \boxed{\forall y} [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$$

$$\equiv \{ \boxed{\forall x \, \forall y} [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \} \equiv$$

$$\equiv \forall x \, \forall y \{ [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \boxed{\exists v_1 \forall v_2} \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \} \equiv$$

$$\equiv \forall x \, \forall y \exists v_1 \forall v_2 \{ [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \}$$

Nem ez az egyetlen jó megoldás! Pl. $\exists v_1 \forall v_2 \forall x \, \forall y \{\ldots\}$ vagy $\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{\ldots\}$ is elképzelhető. Sőt minden kvantorsorrend melyben $\forall x$ megelőzi $\forall y$-t és $\exists v_1$ megelőzi $\forall v_2$-t. Ez a sorrend azonban biztos, mert a kvantorkihúzásokkal nem lehet az egyik kvantorral a másikat „átugrani”.

5. Skolemizáció

Az egzisztenciálisan lekötött változók **az előttük univerzálisan kvantifikáltak** új úgynevezett Skolem-függvényével helyettesítendők.
Az egységesítés kedvéért a Skolem-függvények szimbólumai legyenek a következők (de újak!):

- nulla változósok (konstansok): $c_1, c_2, \ldots$
- egy változósok: $e_1, e_2, \ldots$
- két változósok: $k_1, k_2, \ldots$
- három változósok: $h_1, h_2, \ldots$
- négy változósok: $n_1, n_2, \ldots$
- négynél több változósok: $f_1, f_2, \ldots$

$$F \equiv_s \forall x \, \forall y \boxed{\exists v_1} \forall v_2 \{[\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)]\}.$$

Az egyetlen egzisztenciális kvantor $\exists v_1$ melyet $\forall x$ és $\forall y$ univerzális kvantifikációk előznek meg.
Ezért v_1 helyére $k_1(x, y)$-t kell bevezetnünk.

$$F \equiv_s \forall x \, \forall y \forall v_2 \{[\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, k_1(x, y)) \vee q(c_3, k_1(x, y))]\}.$$

6. A Skolem-függvények változóktól való függéségsei szükségességének vizsgálata

Magyarul: szükséges-e, hogy a példában $k_1(x, y)$ mind az x, mind az y változótól függjön?
Válasz: most nem, mert ha a

$$\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{\dots\}$$

prenex alakon végeznénk a skolemizációt, v_1-et nem előzné meg sem x sem y.
Ezért a példában, $k_1(x, y)$ helyett egy k_1 konstans (vagy ha valakinek jobban tetszik c_4) is írható lenne.
Szabály: Egy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Skolem-függvény x_i-től való függése pontosan akkor hagyható el, ha a skolemizáció előtti formulában nincs olyan **atomi formula**, melyben x_i és az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$-nel helyettesített változó együtt előfordulna.
Házi feladat: **FZ2 II/5** és **7**.
Szintén hozzuk Skolem normálformára az 1. gyak szöveges pédáinak formuláit, (illetve a konkluzió tagadását).

Két megjegyzés a Skolemizációhoz

1) A $\leftrightarrow$ műveletek kifejezését azért kell a kiigazítás előtt végezni, mert az $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ kifejezése elronthatja a kiigazítottságot.

2) Prenex normálalakra hozásnál lehetőség van a kvantorok lépésenkénti kihúzása helyett előbb a negációk De-Morgan azonosságokkal történő bevitelére a kvantorok mögé, majd ezután a kvantorok „gondolkodás nélkül” húzhatók ki a formula legelejére (a sorrend megtartásával). Ugyanis ha nincs implikáció és negáció, amin a kvantort át kell húzni, akkor az nem fog megváltozni.

Néhány házi feladat megoldása:

FZ2 II/5

b)

$$F = \exists x r(x, \boxed{y}) \leftrightarrow \forall y p(\boxed{x}, y) \equiv_s \exists x r(x, c_1) \leftrightarrow \forall y p(c_2, y) \equiv$$
$$\equiv (\neg\exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg\forall y p(c_2, y) \vee \exists x r(x, c_1)) \equiv$$
$$\equiv (\neg\exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg\forall v_1 p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv$$
$$\equiv (\forall x \neg r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\exists v_1 \neg p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv$$
$$\equiv \forall x \forall y \exists v_1 \exists v_2 [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, v_1) \vee r(v_2, c_1))] \equiv_s$$
$$\equiv_s \forall x \forall y [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, k_1(x, y)) \vee r(k_2(x, y), c_1))]$$

$k_1(x, y)$ helyére k_1, $k_2(x, y)$ helyére pedig k_2 konstans írható lenne, mert v_1, illetve v_2 sem x-szel, sem y-nal nem szerepelt közös atomi formulában.

c) $\forall x \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4\, [(q(x, e_1(x)) \vee p(e_2(x), v_2)) \wedge \neg p(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_2(x)$ helyett e_2 alkalmazható, de $e_1(x)$ helyett e_1 nem!!!

d) $\forall x \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4\, [p(x, e_1(x)) \wedge \neg r(v_1, v_2) \wedge \neg q(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_1(x)$-nek x-től való függése lényeges!

FZ2 II/7 megoldása

a) $\exists x \forall y\, p(x,y) \to \forall y \exists x\, p(x,y) \equiv$
$\neg\exists x \forall y\, p(x,y) \vee \forall v_1 \exists v_2\, p(v_2, v_1) \equiv$
$\forall x \exists y \neg p(x,y) \vee \forall v_1 \exists v_2\, p(v_2, v_1) \equiv$
$\forall x \exists y \forall v_1 \exists v_2\, [\neg p(x,y) \vee p(v_2, v_1)] \equiv_s$
y helyére $e_1(x)$
v_2 helyére $k_1(x, v_1)$
$\forall x \forall v_1\, [\neg p(x, e_1(x)) \vee p(k_1(x, v_1), v_1)]$
Mj.: $k_1(x, v_1)$ helyett $k_1(v_1)$ használható, de k_1 nem!

b) $\forall x (p(x) \to q(y)) \equiv_s \forall x (p(x) \to q(c_1))$

FZ2 II/7 megoldása II.

c) $\forall x \forall y [p(z) \wedge (q(x,u) \rightarrow \exists v\, q(y,v))] \equiv_s$
$\forall x \forall y\, [p(c_1) \wedge (\neg q(x,c_2) \vee \exists v\, q(y,v))] \equiv$
$\forall x \forall y \exists v\, [p(c_1) \wedge (\neg q(x,c_2) \vee q(y,v))] \equiv_s$
v helyére $k_1(x,y)$ helyettesítéssel:
$\equiv_s \forall x \forall y\, [p(c_1) \wedge (\neg q(x,c_2) \vee q(y,k_1(x,y)))]$
$k_1(x,y)$ y-tól való függése lényeges, x-től való függése azonban nem, azaz helyére $k_1(y)$ írható lenne.

d) $\neg \exists y\, p(y) \rightarrow \exists z(q(z) \rightarrow r(x)) \equiv_s$
$\exists y\, p(y) \vee \exists z(q(z) \rightarrow r(c_1)) \equiv$
$\exists y\, p(y) \vee \exists z(\neg q(z) \vee r(c_1)) \equiv$
$\exists y \exists z\, [p(y) \vee (\neg q(z) \vee r(c_1))] \equiv_s$
y helyére c_2,
z helyére c_3 helyettesítéssel:
$p(c_2) \vee \neg q(c_3) \vee r(c_1)$.

Csak a biztonság kedvéért ...

- predikátum szimbólumok: $p, q, r, P, Q, R \ldots$
- változók: x, y, z, s, t, u, v, w
- konstanok (nulla változós függvényszimbólumok): a, b, c, d, e
- függvényszimbólumok: $f, g, h, i, j, k, l, m, n$

Minden predikátum szimbólumnak van egy rangja (más szóval aritása), ami nem más mint a változóinak a száma.
A **termek** definíciója:

- Minden változó term.
- Ha f függvényszimbólum, mely n változós és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is term.

A második pontban $n = 0$ esetén kapjuk, hogy minden konstans term.
Mindig csak változók helyére szabad helyettesíteni konstansok helyére nem!

Az egyesítési algoritmus dióhéjban

1. Meg kell keresni az egyesítendő (kettő vagy több) formulában a balról jobbra az **első olyan betűt, ahol nem egyeznek meg**. Ha ilyen nincs kész az egyesítés.
2. A formulákban ezen a pozíción legfeljebb egy fajta f **függvényszimbólum** fordulhat elő a többi helyen **változó** kell, hogy álljon, különben nem egyesíthetők.
3. Keressük egy olyan t **termet**, amely az eltérő pozíción az f **függvényszimbólummal kezdődik**, ha mindenütt változó áll, akkor t-nek vegyünk közülük egyet tetszőlegesen.
   Pl. a $\neg P(g(x), f(g(x), c), g(g(x)))$ *formulában* f*-fel az* $f(g(x), c)$ *term;* c*-vel maga a* c *konstans term kezdődik.*
4. Ha t nem változó és a többi eltérő pozíció változójának csak egyike is szerepel t-ben, akkor nem egyesíthetők.
5. Különben az eltérő pozíciók változóinak minden előfordulását minden formulában helyettesítsük a t-vel. Majd ismételjük az algoritmust 1-től.

FZ2 V/1a

a) $F_1 = p(x, f(y), z)$,
$F_2 = p(\boxed{g(a)}, f(w), u)$,
$F_3 = p(v, f(b), c)$
$s_0 = [\,]$, $s_1 = [x/g(a)]\,[v/g(a)]$
$F_1 s_1 = p(g(a), f(y), z)$
$F_2 s_1 = p(g(a), f(w), u)$
$F_3 s_1 = p(g(a), f(\boxed{b}), c)$
$s_2 = s_1\,[y/b]\,[w/b]$
$F_1 s_2 = p(g(a), f(b), z)$
$F_2 s_2 = p(g(a), f(b), u)$
$F_3 s_2 = p(g(a), f(b), \boxed{c})$
$s_3 = s_2\,[z/c]\,[u/c] =$
$[x/g(a)]\,[v/g(a)]\,[y/b]\,[w/b]\,[z/c]\,[u/c]$
Ekkor $F_1 s_3 = F_2 s_3 = F_3 s_3 = p(g(a), f(b), c)$

b) Hf. Megoldás: $s =$
$[x/g(v)]\,[y/a]\,[w/f(v)]\,[v/b]$ vagy $[x/g(v)]\,[y/a]\,[w/f(b)]\,[v/b]$

FZ2 V/2

Magyarázzuk meg miért nem egyesíthetőek a következő $\{ F_1, F_2 \}$ halmazok.

a) $F_1 = p(x, a)$
$F_2 = p(\boxed{b}, c)$
$s_1 := [x/b]$

$F_1 s_1 = p(b, a)$
$F_2 s_1 = p(b, c)$
mivel itt **két különböző függvényszimbólum** van (a és c) ezért nem egyesíthetők! Csak változó helyére szabad helyettesíteni, konstans helyére nem!!!

b) $F_1 = p(f(x), x)$
$F_2 = p(a, w)$
Ez sem egyesíthető, mert itt **két különböző függvényszimbólum** van (a és f).

FZ2 V/5

Alkalmazzuk az egyesítési algoritmust a következő halmazokra, és adjuk meg egy legáltalánosabb egyesítőt, ha létezik.

c) $\{ F_1, F_2 \}$, ahol

$$F_1 = p(x, g(x))$$
$$F_2 = p(y, y)$$

$$s_0 = [\,]$$

$s_1 = [y/x]$ (vagy $[x/y]$ is jó)
mindkét formulában minden y helyére helyettesíteni kell!!!

$$F_1 s_1 = p(x, \boxed{g(x)})$$
$$F_2 s_1 = p(x, x)$$

x helyére olyan termet, $g(x)$-et kellene helyettesíteni, amelyben x előfordul $\Rightarrow$ <u>nem egyesíthetők.</u>

Az egyesítéssel kapott formula exponenciálisan hosszabb lehet az eredetieknél

$$F_1 = p(y, z, w)$$

$$F_2 = p(\boxed{g(x, x)}, g(y, y), g(z, z))$$

$$s_0 := [], \qquad s_1 := s_0[y/g(x, x)]$$

$$F_1 s_1 = p(g(x, x), z, w)$$

$$F_2 s_1 = p(g(x, x), \boxed{g(g(x, x), g(x, x))}, g(z, z))$$

$$s_2 := s_1[z/g(g(x, x), g(x, x))]$$

$$F_1 s_2 = p(g(x, x), g(g(x, x), g(x, x)), w)$$

$$F_2 s_s = p(g(x, x), g(g(x, x), g(x, x)), \boxed{g(g(g(x, x), g(x, x)), g(g(x, x), g(x, x)))})$$

$$s_3 := s_2[w/g(g(g(x, x), g(x, x)), g(g(x, x), g(x, x)))]$$

Házi feladat

HF1

Hajtsa végre az egyesítési algoritmust az alábbi halmazokon! Az algoritmus szerint döntse el, hogy egyesíthetők-e a megadott halmazok (külön-külön!) És ha igen, adjon is meg egy legáltalánosabb egyesítőt és az egyesítés utáni formulát!

a) $\{\, Q(f(x, g(x, a)), z), Q(y, z), Q(f(b, w), z) \,\}$

b) $\{\, \neg P(f(h(x), g(x, a))), Q(f(z, g(f(y, y), z))) \,\}$

c) $\{\, \neg P(f(h(x), g(x, a))), \neg P(f(z, g(f(y, y), z))) \,\}$

És még: **FZ2 V/5 a,b, 6, 7**

Az elsőrendű rezolúció rezolvens képzése

A C_1 és C_2 elsőrendű klózoknak a következőképpen képezhetjük az R rezolvenseit.

1. Ha C_1-ben és C_2-ben van közös változó, akkor alkalmazzunk olyan s_1 és s_2 változó átnevezéseket, hogy $C_1 s_1$-ben és $C_2 s_2$-ben már ne legyenek közös változók.
2. Válasszunk olyan
   $l_1, l_2, \ldots, l_m$, $m \geq 1$ literálokat $C_1 s_1$-ből és
   $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$, $n \geq 1$ literálokat $C_2 s_2$-ből, hogy az

   $$\{\, l_1, l_2, \ldots, l_m, \bar{l}'_1, \bar{l}'_2, \ldots, \bar{l}'_n \,\}$$

   literálhalmaz egyesíthető legyen. Ha ez sikerült, az (egyik) legáltalánosabb egyesítő legyen s. Ekkor nyilván
   $\{\, l_1, l_2, \ldots, l_m \,\}s = \{l_*\}$ és $\{\, l'_1, l'_2, \ldots, l'_m \,\}s = \{\bar{l}_*\}$
   valamely l_* literálra.
3. Végül

   $$R := [(C_1 s_1 - \{l_1, \ldots, l_m\}) \cup (C_2 s_2 - \{l'_1, \ldots, l'_n\})]s$$

   C_1 és C_2-nek egy rezolvense.

Elsőrendű rezolvensképzésre példa

FZ2 V/11 Képettük az alábbi klózok **összes** lehetséges rezolvensét!

b) $C_1 = \{p(x,x), \neg r(x, f(x))\}$ és $C_2 = \{r(\underline{x}, y), q(y,z)\}$ **c) HF!**

Az aláhúzott x-et át kell nevezni, mert a másik klózban is szerepel (nevezzük át u-ra) azaz $s_1 := []$ és $s_2 := [x/u]$.

$C_1 s_1 = \{p(x,x), \neg r(x, f(x))\}$ és $C_2 s_2 := \{r(u,y), q(y,z)\}$.

Most $l_1 := \neg r(x, f(x))$ és $\overline{l_1'} := \neg r(u,y)$ egyesíthetők:

$s = [x/u]\,[y/f(u)]$-val: $\{l_1, \overline{l_1'}\}s = \{\neg r(u, f(u))\}$. Ezért

$$\begin{aligned} R :=& [(C_1 s_1 - \{l_1\}) \cup C_2 s_2 - \{l_1'\}]s = \\ =& [\{p(x,x)\} \cup \{q(y,z)\}]s = \{p(u,u), q(f(u), z)\}. \end{aligned}$$

Megj. Kényelmesebb R-et a $C_1 s_1 s = \{p(u,u), \neg r(u, f(u))\}$ és $C_2 s_2 s = \{r(u, f(u)), q(f(u), z)\}$ klózokból az ellentétes (piros) literálok kiejtésével származtatni.

Az a) rész megoldása

a) $C_1 = \{p(x,y), p(y,z)\}$ és $C_2 = \{\neg p(u, f(u)\}$.
Változót átnevezni nem kell $s_1 := s_2 := []$.
α) $p(x,y)$ és $p(u, f(u))$ egyesíthető:
Az egyesítési algoritmus szerint: $s' = [u/x]$
$\Rightarrow p(x,y)$és $p(x, f(x))$ majd $s = s'\,[y/f(x)]$-szel
$\Rightarrow$ mindkettő: $p(x, f(x))$ lesz.
Ezért $s = [u/x][y/f(x)]$ egy (legáltalánosabb) egyesítő.
$C_1 s_1 s = \{p(x,y), p(y,z)\}s = \{p(x, f(x)), p(f(x), z)\}$, és
$C_2 s_2 s = \{\neg p(u, f(u)\}s = \{\neg p(x, f(x))\}$, ezért
$R_1 = \{p(f(x), z)\}$ egy rezolvens.

β) De a $C_1 = \{p(x,y), p(y,z)\}$ és $C_2 = \{\neg p(u, f(u))\}$ klózokból
$p(y,z)$ és $p(u, f(u))$ is egyesíthető:
$s = [y/u]\,[z/f(u)]$-val
$\Rightarrow C_1 s_1 s = \{p(x,u), p(u, f(u))\}, C_2 s_2 s = \{\neg p(u, f(u))\}$
Így $R_2 = \{p(x,u)\}$ is rezolvens.
γ) Viszont mindhárom literál, azaz $\{\, p(x,y), p(y,z), p(u, f(u))\,\}$
egyszerre nem egyesíthető (HF!), így $\Box$ nem lesz rezolvens!

Házi feladat

Képezzük az alábbi klózok összes rezolvensét!

a) $C_1 = \{\, p(x, f(x), z),\ p(u, w, w)\,\}$, és
$C_2 = \{\, \neg p(x, y, z),\ \neg p(z, z, z)\,\}$;

b) $C_1 = \{\, p(z, f(z)),\ p(z, a)\,\}$ és
$C_2 = \{\, \neg p(z, a),\ \neg p(z, x), \neg p(x, z)\,\}$. (Hosszú!)

Lustábbaknak: Csak azokat a rezolvenseket írjuk le, ahol az $\{l_1, \ldots, l_m\}$ illetve az $\{l'_1, \ldots, l'_n\}$ literálhalmazok tovább nem bővíthetőek úgy, hogy még egyesíthető halmazt kapjunk.

Egy HF megoldása

HF1.

a) Egyesíthető: $s = [y/f(x, g(x, a))][x/b][w/g(b, a)]$ vagy $s = [y/f(b, w)][x/b][w/g(b, a)]$.

b) Nem egyesíthető.

c) Nem egyesíthető. $s_2 = [z/h(x)][x/f(y, y)]$ után a és h van az első eltérő pozíción.

És még egy ...

FZ2 V/11 c)
$C_1 = \{\, p(x,y),\ \neg p(x,x),\ q(x,f(x),z)\,\}$ és
$C_2 = \{\, \neg q(f(x),x,z),\ p(x,z)\,\}$ összes rezolvense:

$s_1 = []$ és $s_2 = [x/t][z/u]$ változóátnevezések után:

$C_1 s_1 = \{\, p(x,y),\ \neg p(x,x),\ q(x,f(x),z)\,\}$,
$C_2 s_2 = \{\, \neg q(f(t),t,u),\ p(t,u)\,\}$

$\neg p(x,x)$ és $\neg p(t,u)$ egyesíthető $s = [t/x][u/x]$-szel, így

$R = \{\, p(x,y),\ q(x,f(x),z),\ \neg q(f(x),x,x)\,\}$ rezolvens.

Viszont $q(x,f(x),z)$ és $q(f(t),t,u)$ nem egyesíthető, mert
$s_1 = [x/f(t)]$ után a $[t/f(f(t))]$ helyettesítés nem megengedett.
Ezért nincs más rezolvens.

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Elsőrendű rezolúció (#177–#182),

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Nov Gordon S. Novak Jr. (University of Texas at Austin): Resolution Examples and Exercises
`http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`
Hints for Solving Logic Problems
`http://www.cs.utexas.edu/users/novak/storyp.html`

Miért kell rezolvens képzés előtt az egyesítendő klózok változóit átnevezni? (nem kötelező)

Legyen $C_1 = \{p(x,b)\}$ és $C_2 = \{\neg p(a,x)\}$. Ekkor változó átnevezés nélkül $p(x,b)$ és $p(a,x)$ nem egyesíthetők (hiszen $[x/a]$ helyettesítés után a $p(a,b)$ és $p(a,a)$ literálokat kapjuk). De ha végrehajtjuk a változó átnevezést. Mondjuk legyen
$s_1 := []$ és $s_2 := [x/y]$, akkor a
$p(x,b)s_1 = p(x,b)$ és
$p(a,x)s_2 = p(a,y)$ literálok már egyesíthetők, mégpedig
$s = [x/a][y/b]$-vel így az üres klózt kapjuk rezolvensként. Azaz

1. $\{p(x,b\}$ a C_1 klóz
2. $\{\neg p(a,x)\}$ a C_2 klóz
3. $\square$ Res 1,2, az $s_1 = []$, $s_2 = [x/y]$ vált. átnevezések és $s = [x/a][y/b]$ helyettesítés után.

HF. Mutassuk meg, hogy az $F = \forall x \forall y[p(x,g(y)) \wedge \neg p(f(y),x)]$ formula klózainak szintén nem képezhető rezolvense a klózok változóinak előzetes átnevezése nélkül.

Egy kidolgozott példa (**Nov.**)

Formalizáljuk az alábbi állításokat és lássuk be elsőrendű rezolúcióval a következtetés helyességét!

*F*1: Éjjel minden kutya vonít.

*F*2: Akinek macskája van, annak nincs egere (a házban).

*F*3: Aki rossz alvó, annak nincs semmije a házban, ami éjjel vonít.

*F*4: Janinak van kutyája vagy macskája. (Esetleg mindkettő.)
Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha Jani rossz alvó, akkor nincsenek nála egerek.

Segítség: Használjuk az alábbi predikátumokat:
$K(x)$ – x kutya; $V(x)$ – x éjjel vonít; $B(x, y)$ – (birtokol) x-nek van y a házában ; $M(x)$ – x macska; $E(x)$ – x egér; $R(x)$ – x rossz alvó; *Jani* – Jani (konstans).

Formalizálás

Éjjel minden kutya vonít:

$F_1 = \forall x(K(x) \rightarrow V(x));$

Akinek macskája van, annak nincs egere (a házban):

$F_2 = \forall x[\exists y(B(x,y) \wedge M(y)) \rightarrow \neg\exists z(B(x,z) \wedge E(z))];$

Aki rossz alvó, annak nincs semmije a házban, ami éjjel vonít:

$F_3 = \forall x[R(x) \rightarrow \neg\exists y(B(x,y) \wedge V(y))];$

Janinak van kutyája vagy macskája. (Esetleg mindkettő.):

$F_4 = \exists x[B(Jani,x) \wedge (K(x) \vee M(x))];$

Ha Jani rossz alvó, akkor nincsenek nála egerek:

$G = R(Jani) \rightarrow \neg\exists x(B(Jani,x) \wedge E(x));$

Skolemizáció

$$F_1 = \forall x(K(x) \rightarrow V(x)) \equiv \forall x(\underbrace{\neg K(x) \vee V(x)});$$

$$F_2 = \forall x[\exists y(B(x,y) \wedge M(y)) \rightarrow \neg\exists z(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv$$
$$\equiv \forall x[\neg\exists y(B(x,y) \wedge M(y)) \vee \forall z\neg(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv$$
$$\equiv \forall x[\forall y\neg(B(x,y) \wedge M(y)) \vee \forall z\neg(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv$$
$$\equiv \forall x\forall y\forall z[\neg(B(x,y) \wedge M(y)) \vee \neg(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv$$
$$\equiv \forall x\forall y\forall z[\underbrace{\neg B(x,y) \vee \neg M(y) \vee \neg B(x,z) \vee \neg E(z)}];$$

$$F_3 = \forall x[R(x) \rightarrow \neg\exists y(B(x,y) \wedge V(y))] \equiv$$
$$\equiv \forall x[\neg R(x) \vee \forall y\neg(B(x,y) \wedge V(y))] \equiv$$
$$\equiv \forall x\forall y[\underbrace{\neg R(x) \vee \neg B(x,y) \vee \neg V(y)}];$$

$$F_4 = \exists x[B(Jani,x) \wedge (K(x) \vee M(x))] \equiv_s \underbrace{B(Jani,a)} \wedge (\underbrace{K(a) \vee M(a)});$$

Skolemizáció II.

$\{ F_1, F_2, F_3, F_4 \} \models G \Leftrightarrow \Sigma := \{ F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G \}$ kielégíthetetlen.

Ezért $\neg G$-t kell Skolem normálalakra hozni:

$$\begin{aligned}
\neg G &= \neg[R(Jani) \rightarrow \neg\exists x(B(Jani, x) \wedge E(x))] \equiv \\
&\equiv R(Jani) \wedge \exists x(B(Jani, x) \wedge E(x))] \equiv \\
&\equiv \exists x[R(Jani) \wedge B(Jani, x) \wedge E(x)] \equiv_s \\
&\equiv_s \underbrace{R(Jani)}_{} \wedge \underbrace{B(Jani, b)}_{} \wedge \underbrace{E(b)}_{};
\end{aligned}$$

A klózhalamaz

Így

$$\begin{aligned}\Sigma = \{\, & \{\, \neg K(x), V(x) \,\},\\ & \{\, \neg B(x,y), \neg M(y), \neg B(x,z), \neg E(z) \,\},\\ & \{\, \neg R(x), \neg B(x,y), \neg V(y) \,\},\\ & \{\, B(Jani, a) \,\},\\ & \{\, K(a), M(a) \,\},\\ & \{\, R(Jani) \,\},\\ & \{\, B(Jani, b) \,\},\\ & \{\, E(b) \,\}, \,\}\end{aligned}$$

Ezen a ponton lehet a megoldást a többiekével összevetni, mert a formalizáció más-más lehet, de helyes ekvivalens formalizációk esetén a Σ halmazok megegyeznek.

Az üres klóz levezetése a honlapomon.

FZ2 V/9 Formalizáljuk az alábbi állításokat:

$F1$: Minden sárkány boldog, ha az összes gyereke tud repülni.

$F2$: A zöld sárkányok tudnak repülni.

$F3$: Egy sárkány zöld, ha legalább egy zöld sárkánynak a gyereke. Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Minden zöld sárkány boldog.

Megoldás. $B(x)$ – x boldog, $Gy(x,y)$ – x-nek gyereke y, $R(x)$ – x tud repülni, $Z(x)$ – x zöld.

$$F_1 = \forall x(\forall y\,[Gy(x,y) \to R(y)] \to B(x)) \equiv$$
$$\forall x(\neg\forall y\,[Gy(x,y) \to R(y)] \vee B(x)) \equiv$$
$$\forall x \exists y([Gy(x,y) \wedge \neg R(y)] \vee B(x)) \equiv$$
$$\forall x \exists y\,[(Gy(x,y) \vee B(x)) \wedge (\neg R(y) \vee B(x))] \equiv_s$$
$$\forall x\,[(Gy(x,f(x)) \vee B(x)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee B(x))]$$

$$F_2 = \forall x(Z(x) \to R(x)) \equiv \forall x(\neg Z(x) \vee R(x))$$

$$F_3 = \forall x\,[\exists t(Gy(t,x) \wedge Z(t)) \to Z(x)] \equiv$$
$$\forall x \forall t\,[\neg Gy(t,x) \vee \neg Z(t) \vee Z(x)]$$

$$\neg G = \neg\forall x(Z(x) \to B(x)) \equiv \exists x \neg(Z(x) \to B(x)) \equiv$$
$$\exists x(Z(x) \wedge \neg B(x)) \equiv_s Z(a) \wedge \neg B(a)$$

Folytatás ...

$\{ F_1, F_2, F_3 \} \models G \Leftrightarrow \Sigma := \{ F_1, F_2, F_3, \neg G \}$ kielégíthetetlen.

A Σ formuláit már zárt Skolem normálformára hoztuk ezek magjai a következő klózhalmazt adják: $\Sigma' := \{$

1. $\{ Gy(x, f(x)), B(x) \}$,
2. $\{ \neg R(f(x)), B(x) \}$,
3. $\{ \neg Z(x), R(x) \}$,
4. $\{ \neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x) \}$,
5. $\{ Z(a) \}$,
6. $\{ \neg B(a) \}$,

$\}$

Befejezés: bizonyítás elsőrendű rezolúcióval.

1. $\{ Z(a) \}$ 5. klóz;
2. $\{ \neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x) \}$ 4. klóz;
3. $\{ \neg Gy(a, x), Z(x) \}$ Res 1,2, $s = [t/a]$ hely;
4. $\{ Gy(x, f(x)), B(x) \}$ 1. klóz;
5. $\{Z(f(a)), B(a)\}$ Res 3,4, $s_1 = [x/y]$, $s_2 = []$ vált. átnev., $s = [x/a][y/f(a)]$ hely;
6. $\{\neg Z(x), R(x)\}$ 3. klóz;
7. $\{B(a), R(f(a))\}$ Res 5,6, $s = [x/f(a)]$ hely;
8. $\{\neg R(f(x)), B(x)\}$ 2. klóz;
9. $\{B(a)\}$ Res 7,8, $s = [x/a]$ hely;
10. $\{\neg B(a)\}$ 6. klóz;
11. $\square$ Res 9,10.

Ezért Σ' kielégíthetetlen, a log. következmény **igaz.**

Nov 5. Formalizáljuk az alábbi állításokat és lássuk be elsőrendű rezolúcióval a következtetés helyességét!

$F1$: Bárki, akibe Marika szerelmes, az futballsztár.

$F2$: Az a diák, aki nem megy át a vizsgáin, nem focizik.

$F3$: Jani diák.

$F4$: Az a diák, aki nem tanul, nem megy át a vizsgáin.

$F5$: Aki nem focizik az nem lehet furballsztár.
Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha Jani nem tanul, akkor Marika nem szerelmes Janiba.

Segítség: Használjuk például az alábbi jelöléseket:
$Jani$ – konstans, $M(y)$ – Marika szerelmes y-ba[1];
$Sz(x)$ – x futballsztár; $D(x)$ – x diák; $A'(x)$ – x átmegy a vizsgáin; $F(x)$ – x focizik; $T(x)$ – x tanul.

[1] vegyük észre, hogy $Szerelmes(x, y)$ helyett most ez is elég, mert minden ilyen mondatban $x = Marika$.

Gyakorló példa (HF)

Nov 13. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden fiú vagy lány gyermek.

F2: Mikulásra minden gyermek babát vagy vonatot vagy virgácsot kap. (Esetleg több féle ajándékot is.)

F3: Egyetlen fiú sem kap Mikulásra babát.

F4: A jó gyerekek nem kapnak Mikulásra virgácsot.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha egyetlen gyerek sem kap Mikulásra vonatot, akkor egyetlen fiú se jó.

Gyakroló példa (HF)

Nov 12. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal.

F2: Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van és csúcsos süveget visel.

F3: Minden boszorkány jó vagy rossz. *(Ez igazából kizáró vagy, de a példa kijön hagyományos vaggyal is.)*

F4: Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap.

F5: Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap.

Házi feladat

- az órán meg nem oldott feladatok
- **FZ2 V/12, 8, 10, 15** (utóbbit nem lineáris rezolúcióval.)
- Dr. Fülöp Zoltán jegyzetéből a 2.79 és 2.80-as kidolgozott rezolúciós példát átnézni.
- Iván Szabolcs: kidolgozott rezolúciós feladat (2007) szintén átnézni:

  `www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/resolution_sample.pdf`

Néhány házi feladat megoldása I.

$\{l_1 = p(x, g(y)), \bar{l}'_1 = p(f(y), x)\}$ NEM EGYESÍTHETŐ HALMAZ!
mivel
$s_1 = [x/f(y)]$
$l_1 s_1 = p(f(y), \underline{g}(y))$
$\bar{l}'_1 s_1 = p(f(y), \underline{f}(y))$

De ha az $s_1 = [\,]$, $s_2 = [x/z]\,[y/t]$ változóátnevezéseket elvégezzük akkor:
$C_1 s_1 = \{p(x, g(y)\}$
$C_2 s_1 = \{\neg p(f(t), z)\}$ rezolválhatók az $s = [x/f(t)]\,[z/g(y)]$ egyesítővel. Csak így vezethető le az üres klóz.

- $\{p(f(t), g(y))\}$ — $C_1 s_1$ klóz s helyettesítéssel
- $\{\neg p(f(t), g(y)\}$ — $C_2 s_2$ klóz s helyettesítéssel
- $\square$ — Res 1,2 s_1, s_2 v. átn, és s hely.

Néhány házi feladat megoldása II.

Nov 12. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal.

F2: Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van és csúcsos süveget visel.

F3: Minden boszorkány jó vagy rossz. *(Ez igazából kizáró vagy, de a példa kijön hagyományos vaggyal is.)*

F4: Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap.

F5: Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap.

Néhány házi feladat megoldása III.

Predikátumok:

- $Gy(x)$ – x gyerek;
- $B(x)$ – x boszorkány;
- $T(x, y)$ x találkozik y-nal;
- $F(x)$ – x-nek fekete macskája van;
- $Cs(x)$ – x-nek csúcsos süvege van;
- $J(x)$ – x jó;
- $R(x)$ – x rossz;
- $K(x)$ – x cukorkát kap.

Néhány házi feladat megoldása IV.

Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal:

$F_1 = \forall x(Gy(x) \rightarrow \exists y(T(x,y) \wedge B(y)))$;

Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van

és csúcsos süveget visel:

$F_2 = \neg\exists x(B(x) \wedge F(x) \wedge Cs(x))$;

Minden boszorkány jó vagy rossz.

$F_3 = \forall x[B(x) \rightarrow (J(x) \vee R(x))]$;

Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap:

$F_4 = \forall x[(Gy(x) \wedge \exists y(T(x,y) \wedge B(y) \wedge J(y))) \rightarrow K(x)]$;

Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van:

$F_5 = \forall x(B(x) \wedge R(x) \rightarrow F(x))$;

Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos

süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap:

$G = \forall y[B(y) \wedge \exists x(Gy(x) \wedge T(x,y)) \rightarrow Cs(y)] \rightarrow \forall x(Gy(x) \rightarrow K(x))$.

Zh követelmények levelezősöknek 2009

1. Elsőrendű formulák és modelljeik: egy struktúra egy formulának modellje-e, formulához adjon meg modelljét, nem modelljét, olyan formulák felírása, melyek minden modellje bizonyos tulajdonságú, formalizálás (kivéve szöveges példák).
2. Az ítéletkelkulus alapvető algoritmikus kérdéseinek:
   - Egy F formula, vagy véges Σ formulahalmaz **kielégíthető-e**;
   - Egy F formula **tautológia-e** ($\models F$);
   - Formulák egy véges Σ halmazának egy F formula **logikai következménye-e** ($\Sigma \models F$);
   - Egy F és egy G formula **ekvivalens-e** ($F \equiv G$);

   eldöntése az alábbi módszerekkel
   - igazságtáblázattal
   - Horn-formulák algoritmusával (persze ez csak akkor alkalmazható, ha csak Horn-klózok kielégíthetőségét kell eldönteni);
   - rezolúcióval (KNF hozás kell hozzá!).

Zh követelmények levelezősöknek 2009 II.

3. Skolemizáció (kivéve a változóktól való függés vizsgálata), a mag KNF-ra hozása kell.
4. Az egyesítési algoritmus és az elsőrendű rezolvensképzés.
5. Az elsőrendű rezolúció (és alkalmazása eldöntési problémákra). A szöveges példák formalizálását meg fogom adni, de a rezolúciót meg kell tudni rájuk csinálni.

Tehát **nem** kell a nappalisok gyakorlatából:

- Szöveges példák formalizálása.
- Indirekt igazságtáblázat módszer.
- Boole-műveletek egymással való kifejezhetősége, rendszerek teljessége és nem teljessége.
- Hilbert-féle bizonyítások.
- Herbrand kiterjesztés felírása és alaprezolúció.
- Lineáris és SLD rezolúció.

Persze a vizsgára az elmélet megértéséhez a nappalisok gyakorlatainak és ZH-jának átnézése segíthet.