

Logika és informatikai alkalmazásai

10. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Egy HF múlt hétről

HF1.

- a) Egyesíthető: $s = [y/f(x, g(x, a))][x/b][w/g(b, a)]$ vagy $s = [y/f(b, w)][x/b][w/g(b, a)]$.
- b) Nem egyesíthető.
- c) Nem egyesíthető. $s_2 = [z/h(x)][x/f(y, y)]$ után a és h van az első eltérő pozíción.

És még egy ...

FZ2 V/11 c)

$$C_1 = \{ p(x, y), \neg p(x, x), q(x, f(x), z) \} \text{ és}$$

$$C_2 = \{ \neg q(f(x), x, z), p(x, z) \} \text{ összes rezolvense:}$$

$s_1 = []$ és $s_2 = [x/t][z/u]$ változóátnevezések után:

$$C_1 s_1 = \{ p(x, y), \neg p(x, x), q(x, f(x), z) \},$$

$$C_2 s_2 = \{ \neg q(f(t), t, u), p(t, u) \}$$

$\neg p(x, x)$ és $\neg p(t, u)$ egyesíthető $s = [t/x][u/x]$ -szel, így

$$R = \{ p(x, y), q(x, f(x), z), \neg q(f(x), x, x) \} \text{ rezolvens.}$$

Viszont $q(x, f(x), z)$ és $q(f(t), t, u)$ nem egyesíthető, mert $s_1 = [x/f(t)]$ után a $[t/f(f(t))]$ helyettesítés nem megengedett. Ezért nincs más rezolvens.

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Elsőrendű rezolúció (#177–#182),

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Nov Gordon S. Novak Jr. (University of Texas at Austin):
Resolution Examples and Exercises
<http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html>
Hints for Solving Logic Problems
<http://www.cs.utexas.edu/users/novak/storyp.html>

Miért kell rezolvens képzés előtt az egyesítendő klózek változóit átnevezni?

Legyen $C_1 = \{p(x, b)\}$ és $C_2 = \{\neg p(a, x)\}$. Ekkor változó átnevezés nélkül $p(x, b)$ és $p(a, x)$ nem egyesíthetők (hiszen $[x/a]$ helyettesítés után a $p(a, b)$ és $p(a, a)$ literálokat kapjuk). De ha végrehajtjuk a változó átnevezést. Mondjuk legyen $s_1 := []$ és $s_2 := [x/y]$, akkor a $p(x, b)s_1 = p(x, b)$ és $p(a, x)s_2 = p(a, y)$ literálok már egyesíthetők, mégpedig $s = [x/a][y/b]$ -vel így az üres klózt kapjuk rezolvensként. Azaz

1. $\{p(x, b)\}$ a C_1 klóz
2. $\{\neg p(a, x)\}$ a C_2 klóz
3. \square Res 1,2, az $s_1 = []$, $s_2 = [x/y]$ vált. átnevezések és $s = [x/a][y/b]$ helyettesítés után.

HF. Mutassuk meg, hogy az $F = \forall x \forall y [p(x, g(y)) \wedge \neg p(f(y), x)]$ formula klózainak szintén nem képezhető rezolvense a klózek változóinak előzetes átnevezése nélkül.

Egy kidolgozott példa (Nov.)

Formalizáljuk az alábbi állításokat és lássuk be elsőrendű rezolúcióval a következtetés helyességét!

F1: Éjjel minden kutya vonít.

F2: Akinek macskája van, annak nincs egere (a házban).

F3: Aki rossz alvó, annak nincs semmije a házban, ami éjjel vonít.

F4: Janinak van kutyája vagy macskája. (Esetleg mindkettő.)

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha Jani rossz alvó, akkor nincsenek nála egerek.

Segítség: Használjuk az alábbi predikátumokat:

$K(x)$ – x kutya; $V(x)$ – x éjjel vonít; $B(x, y)$ – (birtokol) x -nek van y a házában ; $M(x)$ – x macska; $E(x)$ – x egér; $R(x)$ – x rossz alvó; *Jani* – Jani (konstans).

Formalizálás

Éjjel minden kutya vonít:

$$F_1 = \forall x(K(x) \rightarrow V(x));$$

Akinek macskája van, annak nincs egere (a házban):

$$F_2 = \forall x[\exists y(B(x, y) \wedge M(y)) \rightarrow \neg\exists z(B(x, z) \wedge E(z))];$$

Aki rossz alvó, annak nincs semmije a házban, ami éjjel vonít:

$$F_3 = \forall x[R(x) \rightarrow \neg\exists y(B(x, y) \wedge V(y))];$$

Janinak van kutyája vagy macskája. (Esetleg mindkettő.):

$$F_4 = \exists x[B(\text{Jani}, x) \wedge (K(x) \vee M(x))];$$

Ha Jani rossz alvó, akkor nincsenek nála egerek:

$$G = R(\text{Jani}) \rightarrow \neg\exists x(B(\text{Jani}, x) \wedge E(x));$$

Skolemizáció

$$F_1 = \forall x(K(x) \rightarrow V(x)) \equiv \forall x(\underbrace{\neg K(x) \vee V(x)});$$

$$\begin{aligned} F_2 &= \forall x[\exists y(B(x, y) \wedge M(y)) \rightarrow \neg \exists z(B(x, z) \wedge E(z))] \equiv \\ &\equiv \forall x[\neg \exists y(B(x, y) \wedge M(y)) \vee \forall z \neg (B(x, z) \wedge E(z))] \equiv \\ &\equiv \forall x[\forall y \neg (B(x, y) \wedge M(y)) \vee \forall z \neg (B(x, z) \wedge E(z))] \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y \forall z [\neg (B(x, y) \wedge M(y)) \vee \neg (B(x, z) \wedge E(z))] \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y \forall z \underbrace{[\neg B(x, y) \vee \neg M(y) \vee \neg B(x, z) \vee \neg E(z)]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_3 &= \forall x[R(x) \rightarrow \neg \exists y(B(x, y) \wedge V(y))] \equiv \\ &\equiv \forall x[\neg R(x) \vee \forall y \neg (B(x, y) \wedge V(y))] \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y \underbrace{[\neg R(x) \vee \neg B(x, y) \vee \neg V(y)]}; \end{aligned}$$

$$F_4 = \exists x[B(\text{Jani}, x) \wedge (K(x) \vee M(x))] \equiv_s \underbrace{B(\text{Jani}, a)} \wedge \underbrace{(K(a) \vee M(a))};$$

Skolemizáció II.

$\{F_1, F_2, F_3, F_4\} \models G \Leftrightarrow \Sigma := \{F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G\}$
kielégíthetetlen.

Ezért $\neg G$ -t kell Skolem normálalakra hozni:

$$\begin{aligned}\neg G &= \neg[R(\text{Jani}) \rightarrow \neg\exists x(B(\text{Jani}, x) \wedge E(x))] \equiv \\ &\equiv R(\text{Jani}) \wedge \exists x(B(\text{Jani}, x) \wedge E(x)) \equiv \\ &\equiv \exists x[R(\text{Jani}) \wedge B(\text{Jani}, x) \wedge E(x)] \equiv_s \\ &\equiv_s \underbrace{R(\text{Jani})} \wedge \underbrace{B(\text{Jani}, b)} \wedge \underbrace{E(b)};\end{aligned}$$

A klózthalmaz

Így

$$\begin{aligned} \Sigma = \{ & \{ \neg K(x), V(x) \}, \\ & \{ \neg B(x, y), \neg M(y), \neg B(x, z), \neg E(z) \}, \\ & \{ \neg R(x), \neg B(x, y), \neg V(y) \}, \\ & \{ B(\text{Jani}, a) \}, \\ & \{ K(a), M(a) \}, \\ & \{ R(\text{Jani}) \}, \\ & \{ B(\text{Jani}, b) \}, \\ & \{ E(b) \}, \} \end{aligned}$$

Ezen a ponton lehet a megoldást a többiekével összevetni, mert a formalizáció más-más lehet, de helyes ekvivalens formalizációk esetén a Σ halmazok megegyeznek.

Az üres klóz levezetése (a táblán.)

FZ2 V/9 Formalizáljuk az alábbi állításokat:

F1: Minden sárkány boldog, ha az összes gyereke tud repülni.

F2: A zöld sárkányok tudnak repülni.

F3: Egy sárkány zöld, ha legalább egy zöld sárkánynak a gyereke. **Biz. be, hogy a ezekből következik:**

G: Minden zöld sárkány boldog.

Megoldás. $B(x)$ – x boldog, $Gy(x, y)$ – x -nek gyereke y ,
 $R(x)$ – x tud repülni, $Z(x)$ – x zöld.

$$\begin{aligned}F_1 &= \forall x(\forall y [Gy(x, y) \rightarrow R(y)] \rightarrow B(x)) \equiv \\ &\forall x(\neg \forall y [Gy(x, y) \rightarrow R(y)] \vee B(x)) \equiv \\ &\forall x \exists y [(Gy(x, y) \wedge \neg R(y)) \vee B(x)] \equiv \\ &\forall x \exists y [(Gy(x, y) \vee B(x)) \wedge (\neg R(y) \vee B(x))] \equiv_s \\ &\forall x [(Gy(x, f(x)) \vee B(x)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee B(x))]\end{aligned}$$

$$F_2 = \forall x(Z(x) \rightarrow R(x)) \equiv \forall x(\neg Z(x) \vee R(x))$$

$$\begin{aligned}F_3 &= \forall x [\exists t(Gy(t, x) \wedge Z(t)) \rightarrow Z(x)] \equiv \\ &\forall x \forall t [\neg Gy(t, x) \vee \neg Z(t) \vee Z(x)]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\neg G &= \neg \forall x(Z(x) \rightarrow B(x)) \equiv \exists x \neg(Z(x) \rightarrow B(x)) \equiv \\ &\exists x(Z(x) \wedge \neg B(x)) \equiv_s Z(a) \wedge \neg B(a)\end{aligned}$$

Folytatás ...

$\{F_1, F_2, F_3\} \models G \Leftrightarrow \Sigma := \{F_1, F_2, F_3, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

A Σ formuláit már zárt Skolem normálformára hoztuk ezek magjai a következő klózthalmazt adják: $\Sigma' := \{$

1. $\{Gy(x, f(x)), B(x)\},$
 2. $\{\neg R(f(x)), B(x)\},$
 3. $\{\neg Z(x), R(x)\},$
 4. $\{\neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x)\},$
 5. $\{Z(a)\},$
 6. $\{\neg B(a)\},$
- }

Befejezés: bizonyítás elsőrendű rezolúcióval.

1. $\{ Z(a) \}$ 5. klóz;
2. $\{ \neg Gy(t, x), \neg Z(t), Z(x) \}$ 4. klóz;
3. $\{ \neg Gy(a, x), Z(x) \}$ Res 1,2, $s = [t/a]$ hely;
4. $\{ Gy(x, f(x)), B(x) \}$ 1. klóz;
5. $\{ Z(f(a)), B(a) \}$ Res 3,4, $s_1 = [x/y]$, $s_2 = []$ vált. átnev.,
 $s = [x/a][y/f(a)]$ hely;
6. $\{ \neg Z(x), R(x) \}$ 3. klóz;
7. $\{ B(a), R(f(a)) \}$ Res 5,6, $s = [x/f(a)]$ hely;
8. $\{ \neg R(f(x)), B(x) \}$ 2. klóz;
9. $\{ B(a) \}$ Res 7,8, $s = [x/a]$ hely;
10. $\{ \neg B(a) \}$ 6. klóz;
11. \square Res 9,10.

Ezért Σ' kielégíthetetlen, a log. következmény **igaz**.

Nov 5. Formalizáljuk az alábbi állításokat és lássuk be elsőrendű rezolúcióval a következtetés helyességét!

F1: Bárki, akibe Marika szerelmes, az futballsztár.

F2: Az a diák, aki nem megy át a vizsgáin, nem focizik.

F3: Jani diák.

F4: Az a diák, aki nem tanul, nem megy át a vizsgáin.

F5: Aki nem focizik az nem lehet futballsztár.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha Jani nem tanul, akkor Marika nem szerelmes Janiba.

Segítség: Használjuk például az alábbi jelöléseket:

Jani – konstans, *M(y)* – Marika szerelmes *y*-ba¹;

Sz(x) – *x* futballsztár; *D(x)* – *x* diák; *A'(x)* – *x* átmegy a vizsgáin; *F(x)* – *x* focizik; *T(x)* – *x* tanul.

¹vegyük észre, hogy *Szerelmes(x, y)* helyett most ez is elég, mert minden ilyen mondatban *x = Marika*.

Gyakorló példa (HF)

Nov 13. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden fiú vagy lány gyermek.

F2: Mikulásra minden gyermek babát vagy vonatot vagy virgácsot kap. (Esetleg több féle ajándékot is.)

F3: Egyetlen fiú sem kap Mikulásra babát.

F4: A jó gyerekek nem kapnak Mikulásra virgácsot.

Biz. be, hogy a ezekből következnek:

G: Ha egyetlen gyerek sem kap Mikulásra vonatot, akkor egyetlen fiú se jó.

Gyakroló példa (HF)

Nov 12. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal.

F2: Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van és csúcsos süveget visel.

F3: Minden boszorkány jó vagy rossz. *(Ez igazából kizáró vagy, de a példa kijön hagyományos vaggyal is.)*

F4: Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap.

F5: Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap.

Házi feladat

- ▶ az órán meg nem oldott feladatok
- ▶ **FZ2 V/12, 8, 10, 15** (utóbbi nem lineáris rezolúcióval.)
- ▶ Dr. Fülöp Zoltán jegyzetéből a 2.79 és 2.80-as kidolgozott rezolúciós példát átnézni.
- ▶ Iván Szabolcs: kidolgozott rezolúciós feladat (2007) szintén átnézni:

`www.inf.u-szeged.hu/~szabivan
/download/logika/resolution_sample.pdf`