Logika és informatikai alkalmazásai

10. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Egy HF múlt hétről

HF1.

a) Egyesíthető: $s = [y/f(x, g(x, a))][x/b][w/g(b, a)]$ vagy $s = [y/f(b, w)][x/b][w/g(b, a)]$.

b) Nem egyesíthető.

c) Nem egyesíthető. $s_2 = [z/h(x)][x/f(y, y)]$ után a és h van az első eltérő pozíción.

És még egy ...

FZ2 V/11 c)

$C_1 = \{\, p(x,y),\ \neg p(x,x),\ q(x,f(x),z) \,\}$ és
$C_2 = \{\, \neg q(f(x),x,z),\ p(x,z) \,\}$ összes rezolvense:

$s_1 = []$ és $s_2 = [x/t][z/u]$ változóátnevezések után:

$C_1 s_1 = \{\, p(x,y),\ \neg p(x,x),\ q(x,f(x),z) \,\}$,
$C_2 s_2 = \{\, \neg q(f(t),t,u),\ p(t,u) \,\}$

$\neg p(x,x)$ és $\neg p(t,u)$ egyesíthető $s = [t/x][u/x]$-szel, így

$R = \{\, p(x,y),\ q(x,f(x),z),\ \neg q(f(x),x,x) \,\}$ rezolvens.

Viszont $q(x,f(x),z)$ és $q(f(t),t,u)$ nem egyesíthető, mert
$s_1 = [x/f(t)]$ után a $[t/f(f(t))]$ helyettesítés nem megengedett.
Ezért nincs más rezolvens.

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Elsőrendű rezolúció (#177–#182),

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Nov Gordon S. Novak Jr. (University of Texas at Austin): Resolution Examples and Exercises
`http://www.cs.utexas.edu/users/novak/reso.html`
Hints for Solving Logic Problems
`http://www.cs.utexas.edu/users/novak/storyp.html`

Miért kell rezolvens képzés előtt az egyesítendő klózok változóit átnevezni?

Legyen $C_1 = \{p(x, b)\}$ és $C_2 = \{\neg p(a, x)\}$. Ekkor változó átnevezés nélkül $p(x, b)$ és $p(a, x)$ nem egyesíthetők (hiszen $[x/a]$ helyettesítés után a $p(a, b)$ és $p(a, a)$ literálokat kapjuk). De ha végrehajtjuk a változó átnevezést. Mondjuk legyen $s_1 := []$ és $s_2 := [x/y]$, akkor a
$p(x, b)s_1 = p(x, b)$ és
$p(a, x)s_2 = p(a, y)$ literálok már egyesíthetők, mégpedig $s = [x/a][y/b]$-vel így az üres klózt kapjuk rezolvensként. Azaz

1. $\{p(x, b\}$ a C_1 klóz
2. $\{\neg p(a, x)\}$ a C_2 klóz
3. $\square$ Res 1,2, az $s_1 = []$, $s_2 = [x/y]$ vált. átnevezések és $s = [x/a][y/b]$ helyettesítés után.

HF. Mutassuk meg, hogy az $F = \forall x \forall y[p(x, g(y)) \wedge \neg p(f(y), x)]$ formula klózainak szintén nem képezhető rezolvense a klózok változóinak előzetes átnevezése nélkül.

Egy kidolgozott példa (**Nov.**)

Formalizáljuk az alábbi állításokat és lássuk be elsőrendű rezolúcióval a következtetés helyességét!

$F1$: Éjjel minden kutya vonít.

$F2$: Akinek macskája van, annak nincs egere (a házban).

$F3$: Aki rossz alvó, annak nincs semmije a házban, ami éjjel vonít.

$F4$: Janinak van kutyája vagy macskája. (Esetleg mindkettő.)
Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha Jani rossz alvó, akkor nincsenek nála egerek.

Segítség: Használjuk az alábbi predikátumokat:
$K(x)$ – x kutya; $V(x)$ – x éjjel vonít; $B(x, y)$ – (birtokol) x-nek van y a házában ; $M(x)$ – x macska; $E(x)$ – x egér; $R(x)$ – x rossz alvó; $Jani$ – Jani (konstans).

Formalizálás

Éjjel minden kutya vonít:

$F_1 = \forall x(K(x) \to V(x));$

Akinek macskája van, annak nincs egere (a házban):

$F_2 = \forall x[\exists y(B(x,y) \wedge M(y)) \to \neg\exists z(B(x,z) \wedge E(z))];$

Aki rossz alvó, annak nincs semmije a házban, ami éjjel vonít:

$F_3 = \forall x[R(x) \to \neg\exists y(B(x,y) \wedge V(y))];$

Janinak van kutyája vagy macskája. (Esetleg mindkettő.):

$F_4 = \exists x[B(Jani,x) \wedge (K(x) \vee M(x))];$

Ha Jani rossz alvó, akkor nincsenek nála egerek:

$G = R(Jani) \to \neg\exists x(B(Jani,x) \wedge E(x));$

Skolemizáció

$$F_1 = \forall x(K(x) \to V(x)) \equiv \forall x(\underbrace{\neg K(x) \vee V(x)});$$

$$\begin{aligned}
F_2 &= \forall x[\exists y(B(x,y) \wedge M(y)) \to \neg\exists z(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv \\
&\equiv \forall x[\neg\exists y(B(x,y) \wedge M(y)) \vee \forall z\neg(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv \\
&\equiv \forall x[\forall y\neg(B(x,y) \wedge M(y)) \vee \forall z\neg(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv \\
&\equiv \forall x\forall y\forall z[\neg(B(x,y) \wedge M(y)) \vee \neg(B(x,z) \wedge E(z))] \equiv \\
&\equiv \forall x\forall y\forall z[\underbrace{\neg B(x,y) \vee \neg M(y) \vee \neg B(x,z) \vee \neg E(z)}];
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_3 &= \forall x[R(x) \to \neg\exists y(B(x,y) \wedge V(y))] \equiv \\
&\equiv \forall x[\neg R(x) \vee \forall y\neg(B(x,y) \wedge V(y))] \equiv \\
&\equiv \forall x\forall y[\underbrace{\neg R(x) \vee \neg B(x,y) \vee \neg V(y)}];
\end{aligned}$$

$$F_4 = \exists x[B(Jani,x) \wedge (K(x) \vee M(x))] \equiv_s \underbrace{B(Jani,a)} \wedge (\underbrace{K(a) \vee M(a)});$$

Skolemizáció II.

$\{ F_1, F_2, F_3, F_4 \} \models G \Leftrightarrow \Sigma := \{ F_1, F_2, F_3, F_4, \neg G \}$ kielégíthetetlen.

Ezért $\neg G$-t kell Skolem normálalakra hozni:

$$\begin{aligned}
\neg G = \neg[R(Jani) \to \neg\exists x(B(Jani, x) \wedge E(x))] &\equiv \\
\equiv R(Jani) \wedge \exists x(B(Jani, x) \wedge E(x))] &\equiv \\
\equiv \exists x[R(Jani) \wedge B(Jani, x) \wedge E(x)] &\equiv_s \\
\equiv_s \underbrace{R(Jani)} \wedge \underbrace{B(Jani, b)} \wedge \underbrace{E(b)};
\end{aligned}$$

A klózhalamaz

Így

$$\begin{aligned}
\Sigma = \{ & \{ \neg K(x), V(x) \}, \\
& \{ \neg B(x, y), \neg M(y), \neg B(x, z), \neg E(z) \}, \\
& \{ \neg R(x), \neg B(x, y), \neg V(y) \}, \\
& \{ B(Jani, a) \}, \\
& \{ K(a), M(a) \}, \\
& \{ R(Jani) \}, \\
& \{ B(Jani, b) \}, \\
& \{ E(b) \}, \}
\end{aligned}$$

Ezen a ponton lehet a megoldást a többiekével összevetni, mert a formalizáció más-más lehet, de helyes ekvivalens formalizációk esetén a Σ halmazok megegyeznek.

Az üres klóz levezetése (a táblán.)

FZ2 V/9 Formalizáljuk az alábbi állításokat:

$F1$: Minden sárkány boldog, ha az összes gyereke tud repülni.

$F2$: A zöld sárkányok tudnak repülni.

$F3$: Egy sárkány zöld, ha legalább egy zöld sárkánynak a gyereke. Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Minden zöld sárkány boldog.

Megoldás. $B(x)$ – x boldog, $Gy(x,y)$ – x-nek gyereke y, $R(x)$ – x tud repülni, $Z(x)$ – x zöld.

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \forall x(\forall y\,[Gy(x,y) \to R(y)] \to B(x)) \equiv \\
&\forall x(\neg\forall y\,[Gy(x,y) \to R(y)] \vee B(x)) \equiv \\
&\forall x\exists y([Gy(x,y) \wedge \neg R(y)] \vee B(x)) \equiv \\
&\forall x\exists y\,[(Gy(x,y) \vee B(x)) \wedge (\neg R(y) \vee B(x))] \equiv_s \\
&\forall x\,[(Gy(x,f(x)) \vee B(x)) \wedge (\neg R(f(x)) \vee B(x))] \\
F_2 &= \forall x(Z(x) \to R(x)) \equiv \forall x(\neg Z(x) \vee R(x)) \\
F_3 &= \forall x\,[\exists t(Gy(t,x) \wedge Z(t)) \to Z(x)] \equiv \\
&\forall x\forall t\,[\neg Gy(t,x) \vee \neg Z(t) \vee Z(x)] \\
\neg G &= \neg\forall x(Z(x) \to B(x)) \equiv \exists x\neg(Z(x) \to B(x)) \equiv \\
&\exists x(Z(x) \wedge \neg B(x)) \equiv_s Z(a) \wedge \neg B(a)
\end{aligned}
$$

Folytatás ...

$\{F_1, F_2, F_3\} \models G \Leftrightarrow \Sigma := \{F_1, F_2, F_3, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

A Σ formuláit már zárt Skolem normálformára hoztuk ezek magjai a következő klózhalmazt adják: $\Sigma' := \{$

1. $\{Gy(x, f(x)), B(x)\}$,
2. $\{\neg R(f(x)), B(x)\}$,
3. $\{\neg Z(x), R(x)\}$,
4. $\{\neg Gy(t,x), \neg Z(t), Z(x)\}$,
5. $\{Z(a)\}$,
6. $\{\neg B(a)\}$,

$\}$

Befejezés: bizonyítás elsőrendű rezolúcióval.

1. $\{ Z(a) \}$ 5. klóz;
2. $\{ \neg Gy(t,x), \neg Z(t), Z(x) \}$ 4. klóz;
3. $\{ \neg Gy(a,x), Z(x) \}$ Res 1,2, $s = [t/a]$ hely;
4. $\{ Gy(x, f(x)), B(x) \}$ 1. klóz;
5. $\{Z(f(a)), B(a)\}$ Res 3,4, $s_1 = [x/y]$, $s_2 = []$ vált. átnev., $s = [x/a][y/f(a)]$ hely;
6. $\{\neg Z(x), R(x)\}$ 3. klóz;
7. $\{B(a), R(f(a))\}$ Res 5,6, $s = [x/f(a)]$ hely;
8. $\{\neg R(f(x)), B(x)\}$ 2. klóz;
9. $\{B(a)\}$ Res 7,8, $s = [x/a]$ hely;
10. $\{\neg B(a)\}$ 6. klóz;
11. $\square$ Res 9,10.

Ezért Σ' kielégíthetetlen, a log. következmény **igaz**.

Nov 5. Formalizáljuk az alábbi állításokat és lássuk be elsőrendű rezolúcióval a következtetés helyességét!

$F1$: Bárki, akibe Marika szerelmes, az futballsztár.

$F2$: Az a diák, aki nem megy át a vizsgáin, nem focizik.

$F3$: Jani diák.

$F4$: Az a diák, aki nem tanul, nem megy át a vizsgáin.

$F5$: Aki nem focizik az nem lehet furballsztár.
Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha Jani nem tanul, akkor Marika nem szerelmes Janiba.

Segítség: Használjuk például az alábbi jelöléseket: *Jani* – konstans, $M(y)$ – Marika szerelmes y-ba[1]; $Sz(x)$ – x futballsztár; $D(x)$ – x diák; $A'(x)$ – x átmegy a vizsgáin; $F(x)$ – x focizik; $T(x)$ – x tanul.

[1] vegyük észre, hogy $Szerelmes(x, y)$ helyett most ez is elég, mert minden ilyen mondatban $x = Marika$.

Gyakorló példa (HF)

Nov 13. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden fiú vagy lány gyermek.

F2: Mikulásra minden gyermek babát vagy vonatot vagy virgácsot kap. (Esetleg több féle ajándékot is.)

F3: Egyetlen fiú sem kap Mikulásra babát.

F4: A jó gyerekek nem kapnak Mikulásra virgácsot.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha egyetlen gyerek sem kap Mikulásra vonatot, akkor egyetlen fiú se jó.

Gyakroló példa (HF)

Nov 12. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal.

F2: Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van és csúcsos süveget visel.

F3: Minden boszorkány jó vagy rossz. *(Ez igazából kizáró vagy, de a példa kijön hagyományos vaggyal is.)*

F4: Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap.

F5: Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap.

Házi feladat

- az órán meg nem oldott feladatok
- **FZ2 V/12, 8, 10, 15** (utóbbit nem lineáris rezolúcióval.)
- Dr. Fülöp Zoltán jegyzetéből a 2.79 és 2.80-as kidolgozott rezolúciós példát átnézni.
- Iván Szabolcs: kidolgozott rezolúciós feladat (2007) szintén átnézni:

`www.inf.u-szeged.hu/~szabivan`
`/download/logika/resolution_sample.pdf`