Logika és informatikai alkalmazásai

11. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Elsőrendű rezolúció (#177–#182), a lineáris rezolúció (#190–#192 első két pontja) és az SLD rezolúció: (#201-#203) definíciója és alaptétele.

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Néhány házi feladat múlt óráról I.

$\{l_1 = p(x, g(y)), \bar{l}'_1 = p(f(y), x)\}$ NEM EGYESÍTHETŐ HALMAZ!
mivel
$s_1 = [x/f(y)]$
$l_1 s_1 = p(f(y), \underline{g}(y))$
$\bar{l}'_1 s_1 = p(f(y), \underline{f}(y))$

De ha az $s_1 = [\,]$, $s_2 = [x/z]\,[y/t]$ változóátnevezéseket elvégezzük akkor:
$C_1 s_1 = \{p(x, g(y)\}$
$C_2 s_1 = \{\neg p(f(t), z)\}$ rezolválhatók az $s = [x/f(t)]\,[z/g(y)]$ egyesítővel. Csak így vezethető le az üres klóz.

1. $\{p(f(t), g(y))\}$ — $C_1 s_1$ klóz s helyettesítéssel
2. $\{\neg p(f(t), g(y)\}$ — $C_2 s_2$ klóz s helyettesítéssel
3. $\square$ — Res 1,2 s_1, s_2 v. átn, és s hely.

Néhány házi feladat múlt óráról II.

Nov 12. Lássuk be elsőrendű rezolúcióval, az alábbi következtetés helyességét!

F1: Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal.

F2: Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van és csúcsos süveget visel.

F3: Minden boszorkány jó vagy rossz. *(Ez igazából kizáró vagy, de a példa kijön hagyományos vaggyal is.)*

F4: Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap.

F5: Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van.

Biz. be, hogy a ezekből következik:

G: Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap.

Néhány házi feladat múlt óráról III.

Predikátumok:

- $Gy(x)$ – x gyerek;
- $B(x)$ – x boszorkány;
- $T(x, y)$ x találkozik y-nal;
- $F(x)$ – x-nek fekete macskája van;
- $Cs(x)$ – x-nek csúcsos süvege van;
- $J(x)$ – x jó;
- $R(x)$ – x rossz;
- $K(x)$ – x cukorkát kap.

Néhány házi feladat múlt óráról IV.

Minden gyerek találkozik (néhány) boszorkánnyal:

$F_1 = \forall x(Gy(x) \rightarrow \exists y(T(x, y) \wedge B(y)))$;

Nincs olyan boszorkány, akinek fekete macskája van
és csúcsos süveget visel:

$F_2 = \neg\exists x(B(x) \wedge F(x) \wedge Cs(x))$;

Minden boszorkány jó vagy rossz.

$F_3 = \forall x[B(x) \rightarrow (J(x) \vee R(x))]$;

Minden gyerek, aki jó boszorkánnyal találkozik cukorkát kap:

$F_4 = \forall x[(Gy(x) \wedge \exists y(T(x, y) \wedge B(y) \wedge J(y))) \rightarrow K(x)]$;

Minden rossz boszorkánynak fekete macskája van:

$F_5 = \forall x(B(x) \wedge R(x) \rightarrow F(x))$;

Ha minden boszorkány, akivel valamelyik gyerek találkozik csúcsos süveget visel, akkor minden gyerek cukorkát kap:

$G = \forall y[B(y) \wedge \exists x(Gy(x) \wedge T(x, y)) \rightarrow Cs(y)] \rightarrow \forall x(Gy(x) \rightarrow K(x))$.

Lineáris és SLD rezolúció

Lineáris rezolúció: Olyan rezolúció, melyben mindig az előző rezolvenst használjuk egyik klózként a következő rezolúciós lépésben.
Példa a táblán: $\{\{p, q\}, \{\neg p, q\}, \{p, \neg q\} \{\neg p, \neg q\}\}$.
Tétel. Ha az üres klóz levezethető egy klózhalmazból, akkor mindig van lineáris rezolúcióval történő levezetése is.

SLD-rezolúció: Horn klózok körében (azaz amikben klózonként legfeljebb egy pozitív literál engedélyezett) olyan lineáris rezolúció, mely negatív klózból (azaz csupa negatív literált tartalmazó klózból) indul.
Tétel. Horn-klózok egy halmaza, akkor és csak akkor kielégíthetetlen ha SLD rezolúcióval levezető belőle az üres klóz.

Megjegyzések

- A lineáris illetve SLD rezolúció minden olyan klózzal/negatív klózzal kezdhető, mely a klózhalmaz egy minimális kielégíthetetlen részhalmazának eleme.
- Lineáris és így SLD rezolúció esetén is, a levezetésbe nem írjuk be azt a klózt, amivel az előző klózt rezolváljuk.
- Viszont az indoklásban ezt meg kell említeni (vagy legalább vonallal oda kell húzni) a szokásos változóátnevezésekkel és az egyesítővel együtt.
- SLD rezolúciónál minden a levezetésben szereplő klóz negatív klóz lesz, mert az egyetlen pozitív literálok (hiszen Horn-klózokról van szó) a rezolúció során mindig kiesnek.

V/15 a) Biz. be lineáris rezolúcióval, hogy
$\widetilde{F} = \forall x(F \to G) \to (\forall x\, F \to \forall x\, G)$ tautológia!
Feltehetjük, hogy F-ben és G-ben csak az x változó fordul elő szabadon, és a jelölés egyszerűsítése végett így F helyett $F(x)$-et , $F\,[x/y]$ helyett $F(y)$-t írunk. Továbbá $F(x)$-et és $G(x)$-et atomi formulának tekintjük.

$\neg\widetilde{F} = \neg\,[\forall x(F(x) \to G(x)) \to (\forall x\, F(x) \to \forall x\, G(x))] \equiv$
$\forall x(F(x) \to G(x)) \wedge \neg(\forall y\, F(y) \to \forall z\, G(z)) \equiv$
$\forall x((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge \forall y\, F(y) \wedge \neg\forall z(G(z)) \equiv$
$\forall x \forall y \exists z((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(z)) \equiv_s$
$\forall x \forall y((\neg F(x) \vee G(x)) \wedge F(y) \wedge \neg G(f(x,y)))$
$F^* = \{\, \{\neg F(x), G(x)\}, \{F(y)\}, \{\neg G(f(x,y))\} \,\}$

Lineáris rezolúcióval:

1. $\{\, \neg F(x), G(x) \,\}$ F^* 1. klóza
2. $\{\, G(x) \,\}$ Res a 2. klózzal $[y/x]$ hely. után
3. $\square$ Res a 3. klózzal $s_2 = [x/u]$ vált. átn. és $s = [x/f(u,y)]$ hely. után

SLD rezolúció

FZ2 V/16. Bizonyítsuk be SLD rezolúcióval, hogy a következő klózhalmaz kielégíthetetlen:

$$\{\, \{\neg p(a,c)\}, \{p(a,b)\}, \{p(c,b)\}, \{p(x,y), \neg p(x,z), \neg p(z,y)\}, \{p(x,y), \neg p(y,x)\} \,\}$$

1. $\{\neg p(a,c)\}$ Ezzel kell kezdeni, mert ez az egyetlen negatív klóz!
2. $\{\neg p(a,z), \neg p(z,c)\}$ Res a $\{p(x,y), \neg p(x,z), \neg p(z,y)\}$ klózzal $s = [x/a][y/c]$ helyettesítéssel;
3. $\{\neg p(b,c)\}$ Res a $\{p(a,b)\}$ klózzal $s = [z/b]$ hely.
4. $\{\neg p(c,b)\}$ Res a $\{p(x,y), \neg p(y,x)\}$ klózzal, $s = [x/b][y/c]$ hely.
5. $\square$ Res a $\{p(c,b)\}$ klózzal.

SLD rezolúció II.

Mutassuk meg az alábbi logikai következtetés helyességét SLD rezolúcióval!

$$
\begin{aligned}
&\{\\
&\quad \text{Apja}(a, b),\\
&\quad \text{Anyja}(b, c),\\
&\quad \forall x \forall y(\text{Anyja}(x, y) \vee \text{Apja}(x, y) \rightarrow \text{Szülője}(x, y),\\
&\quad \forall x \forall y \forall z(\text{Szülője}(x, y) \wedge \text{Szülője}(y, z) \rightarrow \text{Nagyszülője}(x, z)\\
&\}\\
&\quad \models \exists x \text{Nagyszülője}(x, c)
\end{aligned}
$$

Házi feladat

- Csináljuk meg a múlt órai példákat lineáris rezolúcóval is.
- Még lineáris rezolúcióra: **FZ2 V/16 b, c.** (A $\exists$ kvantorok után persze x áll.)
- SLD rezolúcióra:
  Igazoljuk SLD rezolúcióval, hogy

  $$\forall x \forall y[\ (\neg R(x, y) \vee \neg R(y, z) \vee R(x, z)) \wedge$$
  $$\wedge \neg R(f(x), f^3(x)) \wedge R(x, f(x))\ ]$$

  kielégíthetetlen /ahol persze $f^3(x) = f(f(f(x)))$/.

Követlemények a 2. ZH-ra

1. Szülséges a definíciók, tételek, algoritmusok ismerete az előadás első 203 fóliájáról (előről az SLD rezolúcióig).
2. (zárt) Skolem normálformára hozás
3. Herbrand kiterjesztés felírása és alaprezolúció
4. az egyesítési algoritmus és elsőrendű rezolvensképzés
5. elsőrendű rezolúció
6. lineáris és SLD rezolúció

A rezolúciót továbbra is tudni kell alkalmazni, az alapvető eldöntési kérdések (tautológia, log. következmény, ekvivalencia) megválaszolására.

A jövő héten ...

Jövő héten az órák időpontjában konzultáció lesz:

- Hétfő 14h és 15h I219-es terem,
- Hétfő 16h I215-ös terem,
- Csütörtök 9h I219-es terem,
- Csütörtök 12h I212-es terem,
- Csütörtök 15h I221-es terem, és
- Csütörtök 16h I215-ös terem.

ZH: Mindenkinek, amikor az első ZH-t írta, esetleg más időpontban engedéllyel (újra engedélyt kérni nem kell.):

- **H14, H15, H16** és **CS12** csoportjaimnak **május 6. szerda 17h**, Kiss Árpád terem;
- **CS8, CS9, CS15** és **CS16** csoportjaimnak **május 7. csütörtök 19h**, Kiss Árpád terem.