# Logika és informatikai alkalmazásai

## 1. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

## Követelmények

A tárgy (ea+gyak) teljesítésének követlményeit mindenki olvassa el, itt van link az előadás fóliáira is:

**www.inf.u-szeged.hu/oktatas/kurzusleirasok/I604.xml**

Az én gyakorlaimhoz kiadott segédanyagok, információk pedig a gyakorlat weblapján (lesznek) találhatók:

**www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth/logika2009/**

# 1. gyak anyaga

## Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

- Előadás fóliák: #12-#21
- Szendrei Ágnes: Diszkrét Matematika, Polygon, Szeged 2004, I. fejezet (1-28. oldal) /ezt ugye mindenki tanulta?/

# Feladatgyűjtemények

**FZ1** Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Itéletkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps`

**FZ2** Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

**KKK** Kalmárné Németh Márta, Katonáné Horváth Eszter, Kámán Tamás: Diszkrét matemetikai feladatok. Szeged, Polygon, 2003.

**LZ** Lengyel Zoltán: Logikai feladatgyűjtemény (megoldásokkal!)
`www.inf.unideb.hu/~lengyelz/docs/logika-0519.pdf`

**SGY2** Serény György: Matematikai logika jegyzet, 2. rész: Predikátum logika
`www.math.bme.hu/~sereny/LINKEK/pred_calculus.ps.gz`

# Zérusrendű logika más néven **ítéletkalkulus**

- változók: $p$, $q$, $r$, $\ldots$
- logikai jelek: $\uparrow$, $\downarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$.

A formulák interpretációjakor (értelmezésekor) a **változók mindig logikai igaz vagy hamis** (0 vagy 1) **értéket vesznek** fel. A logikai jelek értelmezése mindig a szokásos.
Pl. Az $F = p \rightarrow (q \wedge r)$ formula értéke

- igaz, ha $p = 0$, $q = 1$, $r = 1$ és
- hamis, ha $p = 1$, $q = 0$, $r = 1$.

Az ítéletkalkulus csak a logikai műveletek törvényszerűségeiről tud beszélni. Például mindig igaz, az ún. „kontrapozíció elve”:

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

„Ha fúj, akkor esik” ugyanaz, mint a „ha nem esik, akkor nem is fúj”.

# Elsőrendű logika más néven **predikátumkalkulus**

- változók: $x$, $y$, $z$, $\ldots$
- függvény szimbólumok:
  - konstansok: $c$, $d$, $\ldots$
  - többváltozósak: $f$, $g$, $h$, $\ldots$
- predikátum szimbólumok: $P$, $Q$, $R$, $\ldots$
- logikai jelek: $\uparrow$, $\downarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$.

A formulák interpretációjakor (értelmezésekor) a változók egy **tetszőleges** $A$ **objektumhalmazból veszik fel értékeiket**. A logikai jelek értelmezése mindig a szokásos, a predikátum szimbólumok és a függvény szimbólumok értelmezése szintén tetszőleges.
Például ugyanaz az $f$ kétváltozós függvény szimbólum az egyik modellben jelentheti az egész számok összeadását egy másik modellben pedig két halmaz metszetét. Természetesen az objektumok halmaza az első modellben az egész számok, a másodikban pedig a halmazok.

# Az elsőrendű logika modelljei I

A modell, amelyben a formulákat értelmezzük adja meg

- az objektumok halmazát
- a függvény szimbólumok és a predikátum szimbólumok jelentését, azaz, hogy az objektumok halmaza felett milyen konkrét függvényt vagy predikátumot kell kiszámítani, a formula kiértékelésekor
- a változók értékét (csak a formula szabad változóinak az értéke szükséges a kiértékeléshez.)

Az elsőrendű logika a a modellek (számok, halmazok, pontok, stb.) tulajdonságairól, törvényszerűségeiről is tud beszélni, benne a matematika jórésze formalizálható. Például:

$$\text{prím}(x) \leftrightarrow \forall y(\text{osztja}(y, x) \rightarrow (y = 1 \lor y = x)),$$

Ha a modell objektumai a természetes számok és a prím és osztja predikátumok értelmezése a szokásos.

# Az elsőrendű logika formálisan

Minden logikai rendszer definiálásakor két dolgot kell megadnunk:
**Szintaxis:** Melyek a szabályos formulák?
Ennek nem tulajdonítható jelentés, csak formális szabályok.
**Szemantika:** Mikor igaz egy formula egy adott modellben?
Ez határozza meg a formulák jelentését, az igazság, logikai következtetés fogalmát.

# Az elsőrendű logika szintaxisa I.

I. **Jelkészlet** más szóval **logikai nyelv** v. elsőrendű nyelv:

- változók: $x$, $y$, $z$, ...
- függvény szimbólumok:
  - konstansok: $c$, $d$, ...
  - többváltozósak: $f$, $g$, $h$, ...
- predikátum szimbólumok: $P$, $Q$, $R$, ...
- logikai jelek: $\uparrow$, $\downarrow$, $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$
- egyéb jelek: zárójelek, vessző.

# Az elsőrendű logika szintaxisa II.

II. **Termek** más szóval kifejezések:

1. Minden változó term.
2. Minden konstans term.
3. Termekből függvény szimbólumok alkalmazásával újabb termek képezhetők. Természetesen a függvény szimbólum aritásának (a változói számának) a tiszteletben tartásával.

Pl: $f(x, g(g(c)))$ term, ha $x$ változó, $c$ konstans, $f$ kétváltozós, $g$ pedig egyváltozós függvény szimbólum.

IIb. **Alaptermek** más szóval ground termek:
Olyan termek, melyekben változó nem fordul elő. Azaz csak konstansokból és függvény jelekből épülnek fel.
Pl: $g(f(c, c))$ alapterm az előbbi feltételek mellett.

# Az elsőrendű logika szintaxisa III.

III. **Atomi formulák**:
A predikátum szimbólumokba termeket beírásával kapott kifejezés. Pl: $P(x, g(c), c)$,
ha $P$ háromváltozós predikátum szimbólum, $g$ egyváltozós függvény szimbólum, $x$ változó, $c$ pedig konstans.
IV. **Formulák**:

1. Minden atomi formula formula.
2. Formulákból a $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ logikai műveletekkel újabb formulák képezhetők.

Természetesen a kvantorok alkalmazásához változó is kell. Pl: $\forall y(P(x, g(c), c) \vee \neg P(c, c, c))$ formula, a fenti feltételek melett, ha $y$ is változó.
Az nem szükséges, hogy a kvantor $y$ változója elő is forduljon a részformulában, amire a kvantort alkalmazzuk.

# Feladatok

## Alap feladattípusok I.

- elsőrendű nyelvek jelkészlete (pl. predikátumok és fgv-ek különbsége)
- a term és alapterm fogalma, termek különböző jelölései (normál, lengyel, fordított lengyel, fa)
- atomi formulák és formulák, műveletek precedencia szabályai
- kvantorok, kvantorok hatásköre, szabad és kötött változó előfordulások, szabad és kötött változók
- természetes nyelvi mondatok formalizálása elsőrendű formulákkal

# Feladatok I

## 1. LZ 2.1. alapján

Legyen a változók halmaza $\mathcal{V}ar = \{x_1, x_2, \ldots\}$, a függvény szimbólumok halmaza $\mathcal{F}gv = \{f, g, h, c\}$, ahol $f$ ragngja 1, $g$ rangja 2, $h$ rangja 3, $c$ rangaja 0 (azaz $c$ konstans szimbólum). A predikátum szimbólumok halmaza legyen $\mathcal{P}red = \{P, Q, R\}$, ahol $P$ rangja 1, $Q$-é 2, $R$-é 0. Termek-e az alábbi szavak?

a) $f(g(x_1, x_2))$ IGEN
b) $f(g(x_3), h(x_1, x_2, x_3))$ NEM, $f$ egyváltozós, $g$ pedig 2!
c) $g(f(f(c)), h(x_2, x_2, x_2))$ IGEN
d) $c$ IGEN
e) $R$ NEM, $R$ predikátum szimbólum
f) $\exists x_2 g(f(x_1), x_2)$ NEM, kvator a formulák képzéséhez kell.
g) $f(x_1) + g(x_1, x_2)$ NEM, $+$ nem szerepel a jelkészletben.
h) $g(x_1, Q(R, R), f(x_2))$ NEM, Q(R,R) nem term, még csak nem is formula.

# Feladatok II

## 2. LZ 2.4. alapján

Az előző feladat jelöléseit használva elsőrendű formulák-e az alábbiak?

a) $Q(f(f(x_1)), c)$ IGEN, ez atomi formula
b) $P(c) \to \forall x_3(P(x_1) \wedge R)$ IGEN, de nem atomi formula
c) $Q(P(x_1), f(x_2))$ NEM $P(x_1)$ nem term
d) $f(g(x_1, x_2))$ NEM, ez term
e) $Qx_1 P(x_1)$ NEM, $Q$ nem kvantor
f) $\exists ! x_1 P(g(x_1, x_1))$ NEM, a $\exists !$ rövidítést nem engedtük meg
g) $R \wedge \forall x_1 x_2 Q(x_1, x_2)$ NEM, hiányzik egy kvantor
h) $\forall x_1(\exists x_2 P(x_1) \wedge Q(x_1, x_2))$ IGEN, $x_2$ szabad változó!
i) $\neg P(x_1) \to \forall c P(g(c, x_1))$ NEM, $c$ nem változó
j) $\exists n(P(x_1) \vee P(x_2) \vee \ldots \vee P(x_n) \vee \neg P(x_{n-1}))$ NEM, $n$ nem változó, és $\ldots$ sem megengedett.

# Logikai műveletek precedencia sorrendje

Balról jobbra csökkenő erősség szerint:

$$\begin{array}{ccccc} \neg & & & & \\ \forall & \wedge & \vee & \rightarrow & \leftrightarrow \\ \exists & & & & \end{array}$$

Az unáris műveletek ($\neg, \forall, \exists$) egyforma erősen kötnek, hiszen két unáris művelet esetén, értelemszerűen a jobbralevő eredményére alkalmazzuk a balra levőt. Pl.
$\forall x \neg \exists y P(x) = \forall x [\neg(\exists y P(x))]$
Bár nem kötelező, én azért $\vee$ és $\wedge$ esetén ki szoktam rakni a rárójelet, azaz pl. $A \vee B \wedge C$ esetén, $A \vee (B \wedge C)$-t írok, hogy félreérthetetlenül megkülönböztessem $(A \vee B) \wedge C$-től, ahol a zárójel nem hagyható el.
Azonos bináris műveletek esetén:

- $\wedge$, $\vee$ és $\leftrightarrow$ asszociatív, köztük a zárójelezés tetszőleges, így elhagyható
- $\rightarrow$ **nem asszociatív**, itt a megállapodás, a jobbról zárójelezés, azaz $A \rightarrow B \rightarrow C = A \rightarrow (B \rightarrow C)$

# Feladatok III

**3. LZ 2.7.** Ezentúl a következő jelöléseket fogjuk használni: *predikátum szimbólumok*: $P, Q, R, \ldots$, *függvény szimbólumok*: $f, g, h, \ldots$, *változók*: $x, y, z, \ldots$, *konstansok* $c, d, e$, valamint ezek indexelt változatai. Mindig felteszzük, hogy a predikátum és függvény szimbólumok olyan aritásúak, ahogy a formulában szerepelnek. Soroljuk fel az alábbi formulák összes részformuláját! Melyek közülük a közvetlen részformulák?

a) $\forall x(\forall y(P(x) \rightarrow Q(x, y))$
b) $(P(x) \rightarrow \neg\exists x \forall y Q(x, y)) \rightarrow \neg\forall z Q(x, y)$
c) $Q(f(x), g(y, x))$
d) $\neg[(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \rightarrow R(x))) \rightarrow \forall x(\neg P(x))]$

**d) megoldása (a többi HF!)**

- $P(x)$, $Q(x, y)$, $Q(y, x)$, $R(x)$ atomi formulák.
- $P(x) \rightarrow Q(x, y)$, $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y))$, $Q(y, x) \rightarrow R(x)$
- $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \rightarrow R(x))$
- $\neg P(x)$ és $\forall x(\neg P(x))$
- $(\exists x(P(x) \rightarrow Q(x, y)) \wedge (Q(y, x) \rightarrow R(x))) \rightarrow \forall x(\neg P(x))$ **k!**
- és az egész formula.

# Feladatok IV

### 4. LZ 2.8.

Jelöljük be az egyes kvantorok hatáskörét!

a) $\forall x(\exists y Q(f(x), h(y, x, z)) \to P(x))$

b) $\forall x(P(x) \vee \neg\exists x Q(x, g(x, x))) \wedge \exists x P(f(f(x)))$

c) $\exists x(P(x) \vee \forall y \neg Q(g(x, y), y) \wedge \exists x P(x))$

d) $\exists x \forall y P(x) \vee \neg P(x)$

### d) megoldása

$\exists x \boxed{\forall y \boxed{P(x)}} \vee \neg P(x)$, így $x$ szabad változó (paraméter).

# Feladatok IV

### 5. LZ 2.9. alapján

Jelöljük be az alábbi formulákban, hogy mely kvantor melyik változót köti, és határozzuk meg a formula paramétereinek (=benne szabadon (is) előforduló változók) halmazát.

a) $\exists x \forall y Q(x, y) \vee P(x)$

b) $\forall x Q(z) \leftrightarrow \forall y \exists y Q(x, y) \wedge Q(y, x)$

c) $(\forall x P(x, y) \to \forall y R(x, y)) \wedge P(c)$

d) $\neg\exists z(Q(z, z) \wedge R(f(y, z)))$

e) $\forall x(\forall y P(x, y, z) \to Q(x, y))$

f) $\forall y \exists z(P(x, y, z) \to \exists x \forall x Q(z, x))$

g) $\exists x \forall y(P(x) \vee Q(x, f(y))) \to \forall y Q(x, y)$

# Feladatok IV

### g) megoldása

- $\exists x \forall y (P(x) \vee Q(x, f(y))) \rightarrow \forall y Q(x, y)$
- $\exists x \boxed{\forall y \boxed{(P(x) \vee Q(x, f(y)))}} \rightarrow \forall y \boxed{Q(x, y)}$
- az első $\forall y$ az $y$ változó első előfordulását köti
- az első $\exists x$ az $x$ változó első és második előfordulását köti
- a második $\forall y$ az $y$ változó második előfordulását köti
- $x$ utolsó előfordulása szabad, így $x$ az egyetlen paraméter.
- A kötési viszonyok jelölését lásd a táblán.

# Jövő hétre

HF, a kimaradt példák.

Következő gyakorlatra:
Az új előadás anyaga.
A Dr. Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus" c. feladatsorból: I/1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 12.
Letölthető:
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`