Logika és informatikai alkalmazásai

2. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: #23-#39

Feladatsorok

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

LM I. A. Lavrov – L. L. Makszimova: Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987

SGY2 Serény György: Matematikai logika jegyzet, 2. rész: Predikátum logika
www.math.bme.hu/~sereny/LINKEK/pred_calculus.ps.gz

Ismétlés

Elsőrendű modellek

Legyen $\mathcal{L} = (\mathcal{V}ar, \mathcal{F}gv, \mathcal{P}red)$ egy elsőrendű logikai nyelv.

- Az $\mathcal{A} = (U, I, \varphi)$ hármas $\mathcal{L}$-típusú **elsőrendű struktúra** vagy **elsőrendű modell**, melyben
- U tetszőleges nemüres halmaz, az **alaphalmaz** vagy **univerzum** vagy a struktúra **tartóhalmaza**;
- I az **interpretáció**, mely
  - minden $f \in \mathcal{F}gv$ függvény *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(f) : U^n \to U$ *valódi függvényt* rendel, és
  - minden $P \in \mathcal{P}red$ predikátum *szimbólumhoz*, melynek rangja $n \geq 0$ egy $I(P) : U^n \to \{0, 1\}$ *valódi predikátumot* rendel;
- $\varphi : \mathcal{V}ar \to U$ pedig a **változó hozzárendelés** vagy **változó kiértékelés**, mely minden x változónak egy U-beli $\varphi(x)$ értéket ad.

Ha nincsenek szabad változók egy formula kiértékelésekor, akkor a harmadik, φ komponens elhagyható a modellből.

Feladatok I

FZ2 I/5

Az alábbi $\mathcal{A} = (U, I)$ struktúrák közül melyik modellje az $\exists x \exists y \exists z (p(x, y) \wedge p(z, y) \wedge p(x, z) \wedge \neg p(z, x))$ formulának?

a) $U = \{0, 1, 2 \ldots\} (= \mathbb{N})$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $m < n$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto 1, y \mapsto 3, z \mapsto 2]}$ modellje a formula magjának, hiszen $x = 1 < y = 3$, $z = 2 < y = 3$ és $x = 1 < z = 2$, de **nem** $z = 2 < x = 1$.

b) $U = \mathbb{N}$, minden $m, n \in \mathbb{N}$-re $I(p)(m, n) = 1$ akkor és csak akkor, ha $n = m + 1$.

NEM. $x + 1 = y, z + 1 = y, x + 1 = z$ egyszerre nem teljesülhet.

c) $U = 2^{\mathbb{N}}$, minden $A, B \subseteq \mathbb{N}$-re $I(p)(A, B) = 1$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$.

IGEN. $\mathcal{A}_{[x \mapsto \{1\}, y \mapsto \{1,2,3\}, z \mapsto \{1,2\}]}$ modellje a formula magjának.

Feladatok II

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

a) $F = \forall x \forall y P(x, y, f(z))$

Legyen mondjuk $\mathcal{A}_1 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi)$, ahol

$I(P) : \mathbb{N}_+^3 \to \{0,1\}, \quad I(P)(a,b,c) = \begin{cases} 1, & \text{ha } a+b \geq c \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$

$(\forall a, b, c \in \mathbb{N}_+$-re)

$I(f) : \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+, \quad I(f)(t) := t + 1$, ($\forall t \in \mathbb{N}_+$-re)

$\varphi(z) = 1$, különben φ tetszőleges.

Ekkor $\forall x \forall y P(x, y, f(z)) =$ „$\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+$-re $x + y \geq 1 + 1$” **igaz**, azaz $\mathcal{A}_1 \models F$.

De ha $\mathcal{A}_2 = (\mathbb{N}_+, I, \varphi')$ ugyanaz a modell kivéve, hogy $\varphi'(z) = 13$, akkor „$\forall x \forall y \in \mathbb{N}_+$-ra $x + y \geq 13 + 1$” **nem igaz**, azaz $\mathcal{A}_2 \not\models F$, $\mathcal{A}_2$ nem modellje F-nek.

Feladatok III

(HF megoldással)

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

b) $F = \forall x \forall y ((p(x, y) \wedge p(y, x)) \to x = y)$

A formula a p reláció antiszimmetrikus tulajdonságát fejezi ki.

$\mathcal{A}_1 = (\mathbb{Z}, I, \varphi)$,

ahol $I(p) : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\}, \quad I(p)(a,b) = \begin{cases} 1 & \text{ha } a \leq b \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$ modellje a formulának, $\forall a, b \in \mathbb{Z}$-re, φ tetszőleges.

De $\mathcal{A}_2 = (2^{\mathbb{N}}, I, \varphi)$, ahol $I(p) : 2^{\mathbb{N}} \times 2^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$,

$$I(p)(A,B) = \begin{cases} 1 & \text{ha } A \cap B \neq \emptyset \\ 0 & \text{különben ,} \end{cases} \quad \forall A, B \in 2^{\mathbb{N}}\text{-re, } \varphi \text{ tetszőleges.}$$

Nem modellje a formulának.

Feladatok IV

FZ2 I/1 Minden formulához adjunk meg egy olyan struktúrát, amely modellje és egy olyat amely nem modellje a formulának.

c) $F = \forall x \exists y (f(y) = x \land \neg \exists z (f(z) = x \land \neg (y = z)))$

A formula azt fejezik ki, hogy az f függvény bijektív függvény, azaz szürjektív (= minden elem képpé válik) és injektív (=különböző elemek képe is különböző).

Ezért egy modell akkor és csak akkor elégíti ki az F formulát, ha benne az f függvényt bijektív függvénynek interpretáljuk.

Részletesen HF.

Feladatok V

FZ2 I/2. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legalább három elemű**!

Ha az egyenlőség reláció használható:

$$\exists x \exists y \exists z (\neg (x = y) \land \neg (x = z) \land \neg (y = z))$$

Ha csak egyváltozós (azaz monadikus) predikátum szimbólumok használhatók:

$$\exists x \exists y \exists z (P(x) \land \neg P(y) \land \neg P(z) \land Q(y) \land \neg Q(z))$$

FZ2 I/3. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, melynek bármely modellje **legfeljebb két elemű**! Az $=$ reláció használható.

$$\forall x \forall y \forall z ((x = y) \lor (x = z) \lor (y = z))$$

Vagy

$$\forall x ((x = c) \lor (x = d)).$$

Feladatok VI

HF megoldásvázlattal

FZ2 I/9. Legyen $\mathcal{A} = (U, I)$,

$$F = \forall x \neg p(x, x) \wedge \forall x \forall y \forall z((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))$$

és $\mathcal{A} \models F$.
Tartalmazhat-e az $I(p)$ reláció gráfja az U halmazon kört? A választ indokoljuk!
(Az $I(p)$ reláció gráfjában a szögpontok U elemei és tetszőleges u_1, $u_2 \in U$ esetén u_1-ből u_2-be pontosan akkor vezet él, ha $I(p)(u_1, u_2)$ igaz.)
Indirekt módom igazolható. Ha $u_1, u_2, \ldots, u_n = u_1$ kör lenne $I(p)$ gráfjában, akkor a tranzitivitás többszöri felhasználásával azt kapnánk, hogy $I(p)(u_1, u_1)$ is teljesül, ellentmondva F-nek.

Feladatok VII

FZ2 I/12. Adjunk meg olyan kielégíthető formulát, amelynek **minden modellje végtelen**!
Néhány lehetséges megoldás:

- A modellben szerepel egy f egyváltozós függvény, mely injektív, de nem szürjektív, ilyen függvény ugyanis véges halmaz felett nem létezhet. (Miért?) Formulával kifejezve:

$$\forall x \forall y (f(x) = f(y) \rightarrow x = y) \wedge \neg \forall y \exists x (f(x) = y)$$

- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\wedge \forall x \exists y p(x, y)$
- A 9. feladat F formulájához még adjuk hozzá, hogy $\wedge \forall x p(x, f(x))$
- Ld. Iván Szabolcs: Elsőrendű szemantika (gyakorlat) VI. feladat.
  `www.inf.u-szeged.hu/~szabivan/download/logika/feladatok1.pdf`

Feladatok VIII

LM II.4/9. Legyen egy nyelvben S és P háromváltozós predikátum szimbólum, e felett a nyelv felett tekintsük a következő struktúrát $\mathcal{A} = (\mathbb{N}, I)$, ahol

$$I(S)(x,y,z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = z$$
$$I(P)(x,y,z) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot y = z$$

Adjunk meg olyan egyetlen x szabad változót tartalmazó formulákat, melyek akkor és csak akkor igazak $\mathcal{A}$-ban, ha

a) $x = 0$; $N(x) := \forall y S(x,y,y)$;

b) $x = 1$; $E(x) := \forall y P(x,y,y)$;

c) $x = 2$; $K(x) := \exists z(E(z) \wedge S(z,z,x)$;

d) x páros; $Ps(x) := \exists y S(y,y,x)$;

e) x páratlan; $Ptl(x) := \neg Ps(x)$;

f) x prím; $R(x) := \neg E(x) \wedge \forall y \forall z(P(y,z,x) \to E(y) \vee E(z))$;

Feladatok IX

LM II.4/10. Az előző feladat feltételeit megtartva adjunk olyan formulákat, amelyeknek két szabad változója x és y és amelyek pontosan akkor igazak az $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) $x = y$;

b) $x \leq y$;

c) $x < y$;

d) x osztója y-nak;

e) x és y ikerprímek.

Megoldások.

a) $x = y := \forall z \forall u(S(x,z,u) \to S(y,z,u))$;

b) $x \leq y := \exists z S(x,z,y)$;

c) $x < y := \exists z(\neg N(z) \wedge S(x,z,y))$;

d) $O(x,y) := \exists z P(x,z,y)$;

e) $I(x,y) := R(x) \wedge R(y) \wedge \exists z[K(z) \wedge (S(x,z,y) \vee S(y,z,x))]$.

Feladatok X

LM II.4/11. Adjunk meg olyan formulát, amelynek három szabad változója x, y és z, és pontosan akkor igaz a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, ha

a) z az x és y legkisebb közös többszöröse;

b) z az x és y legnagyobb közös osztója.

a) megoldása

$$\exists u P(x,u,z) \wedge \exists v P(y,v,z) \wedge \forall t[\exists u P(x,u,t) \wedge \exists v P(y,v,t) \rightarrow (z \leq t)]$$

b) HF.

Feladatok XI

LM II.4/12. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az összeadás kommutatív;

b) az összeadás asszociatív;

c) a szorzás kommutatív;

d) a szorzás asszociatív;

e) az összeadás disztributív a szorzásra nézve;

f) a prímszámok halmaza végtelen;

g) minden szám előáll négy négyzetszám összegeként (ez a négy-négyzetszám-tétel);

h) két nullától különböző számra létezik legkisebb közös többszörös és legnagyobb közös osztó.

d) $\forall x \forall y \forall z \forall u_1 \forall u_2 \forall v_1 \forall v_2 (P(x,y,u_1) \wedge P(u_1,z,u_2) \wedge P(y,z,v_1) \wedge P(x,v_1,v_2) \rightarrow u_2 = v_2)$

f) $\forall x \exists y (x \leq y \wedge R(y))$

Feladatok XII (HF)

LM II.4/13. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) nem létezik a szorzásnak egységeleme;

b) a prímszámok halmaza véges;

c) minden szám előáll két négyzetszám összegeként;

d) minden számnál van kisebb szám;

e) létezik legnagyobb természetes szám.

Igazak-e ezek a mondatok $\mathcal{A}$-ban?

LM II.4/14. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy

a) az ikerprímek halmaza végtelen;

b) minden kettőnél nagyobb páros szám két prímszám összege.

Megjegyzés. A fenti két állítás a számelmélet két híres a maig napig bizonyítatlan sejtése az ikerprím-sejtés és a (páros) Goldbach-sejtés.

Feladatok XIII (HF)

LM II.4/15. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a

$$3x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenletnek pontosan két különböző gyöke van

LM II.4/16. Adjunk meg olyan mondatot, mely a **II.4/9.** feladatban megadott $\mathcal{A}$ modellben, azt fejezi ki, hogy a következő egyenletrendszernek nincs megoldása:

$$\begin{aligned} 3x - y &= 0, \\ x + y &= 2. \end{aligned}$$

Formalizáslás

SGY2 2.3.(ii)

Formalizáljuk az alábbi következtetéseket és állapítsuk meg, melyik helyes, melyik nem! Válaszunkat indokoljuk meg!

Az ilyen alakú következtetéseket **kategórikus szillogizmusoknak** nevezzük, a feltételek neve: **premissza**, a következményé: **konklúzió**.

Ezeket egy vízszintes vonallal szoktuk elválasztani egymástól.

Például:

(1) Minden ember halandó

(2) Szokratész ember

---

(3) Tehát Szokratész halandó.

Megoldása

Egy lehetséges megoldás

- **Univerzum (individuum tartomány)**: minden objektum
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $E(x)$: x ember,
  - $H(x)$: x halandó
- **Függvény szimbólumok**: s : Szokratész (konstans)

(1) Minden ember halandó: $\forall x(E(x) \to H(x))$

(2) Szokratész ember: $E(s)$

---

(3) Tehát Szokratész halandó: $H(s)$

Igaz-ez a következtetés?

Könnyen látható, hogy a következtetés **helyes**.

Még egy példa

SGY2 2.3.(ii) / (14)

Bolond aki megcsinálja. Én nem csinálom meg. Tehát nem vagyok bolond.

- **Univerzum (individuum tartomány)**: az emberek halmaza
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $B(x)$: x bolond,
  - $M(x)$: x megcsinálja.
- **Függvény szimbólumok**: e : én (konstans)

(1) Bolond, aki megcsinálja. *másként:* Mindenki, aki megcsinálja az bolond. $\forall x(M(x) \rightarrow B(x))$
(2) Én nem csinálom meg. $\neg M(e)$

---

(3) Nem vagyok bolond: $\neg B(e)$
A következtetés **nem helyes**. Ha én bolond vagyok és nem csinálom meg, attól még az első mondat igaz marad. Hiszen az első mondat csak azokról beszélt, akik megcsinálják.

További példák (HF)

SGY2 2.3.(ii)

- Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.
- Nincs tökéletes ember. Minden görög ember. Tehát nincsen olyan görög, aki tökéletes.
- Van olyan férfi, akinek minden nő teszik. Tehát minden nő tetszik valakinek.
- Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.
- Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden férfi tetszik valakinek.
- Minden gazdag nő csúnya. Tehát minden szegény nő szép. (Itt szegény és gazdag, szép és csúnya legyen egymás ellentéte.)
- További példák a Serény jegyzetben ...

Néhány megoldás

SGY2 2.3.(ii)

Minden holló fekete. Ez a kréta nem fekete. Tehát ez a kréta nem holló.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez a kréta (konstans)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$\neg F(c)$
(3) Ez a kréta nem holló:	$\neg H(c)$

A következtetés **helyes**.

Ugyanez máshogy

Többféle jó formalizáció elképzelhető. Pl.

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete.	$\forall x(H(x) \rightarrow F(x))$
(2) Ez a kréta nem fekete.	$K(c) \wedge \neg F(c)$
(3) Ez a kréta nem holló:	$K(c) \wedge \neg H(c)$

A következtetés így is **helyes**.

Majd később tanuljuk, hogyan lehet ilyen következtetéseket rezolúcióval be is bizonyítani ...

Na még egyet ...

SGY2 2.3.(ii)

Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene. Tehát minden nőnek teszik valaki.

- **Univerzum**: minden ember.
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $N(x)$: x nő.
  - $F(x)$: x férfi.
  - $T(x, y)$: x-nek tetszik y.

(1) Nincs olyan férfi, aki legalább egy nőnek ne tetszene.
$\neg\exists x[F(x) \wedge \neg\exists y(N(y) \wedge T(y, x))]$

---

(2) Tehát minden nőnek teszik valaki.
$\forall y(N(y) \rightarrow \exists x T(y, x))$
Igaz? A következtetés **nem helyes**, például elképzelhető, hogy egyáltalán nincsenek férfiak, de nők vannak, és senki nem tetszik senkinek ... Vagy csak két nő van, az egyiknek minden férfi tetszik, a másiknak senki sem.

Jövő hétre

- HF, a kimaradt példák és még **FZ2 I/7, 8, 13**.
- A formalizálás gyakorlásához mindenkinek ajánlott még megoldani a **KKK I. 18** példát. A feladatgyűjteményben ott a megoldás. Még később is szükség lesz rá.
- HF, a természetes számokra vonatkozó formulák felírása, **az előadáson bevezetett jelkészlettel** (amikor a műveletek $+$ és $\cdot$ függvény szimbólumként és nem az S és P predikátum szimbólumokkal vannak kifejezve. Ugye mennyivel könnyebb pl. **LM II.4/15.** és **LM II.4/16.**?
- HF* (nehezebb példák): **FZ2 I/6, 14** és mutassuk meg, hogy **FZ2 I/14** nem igaz, ha $F = \exists x_1 \ldots \exists x_n F^*$ alakú, vagy ha F^* tartalmaz függvény szimbólumot.
- Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a kielégíthetőség, tautológia, logikai következmény forgalma.
- Az **FZ1** "Ítéletkalkulus" c. feladatsor is kell majd: `www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps`