Logika és informatikai alkalmazásai

4. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

- Előadás fóliák: #52-#63, #70-#76
- A konjunktív normálformára hozás algoritmusa az előző gyak. fóliáinak végéről. (Akinek kell, HF gyakorolni!)

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus" **www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps**

LM I. A. Lavrov – L. L. Makszimova: Halmazelméleti, matematikai logikai és algoritmuselméleti feladatok, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1987

Formulák és Boole-függvények (új)

Formulák és Boole-függvények kapcsolata (ea. + a táblán)

Jelölések:

- $x \leftarrow y := y \rightarrow x$ (fordított irányú implikáció);
- $x \not\rightarrow y := \neg(x \rightarrow y)$ (az implikáció tagadása);
- $x \not\leftarrow y := \neg(x \leftarrow y)$ (a fordított implikáció tagadása);
- $x \not\leftrightarrow y := \neg(x \leftrightarrow y)$ (nem ekvivalencia, más jelöléssel $x \oplus y$, kizáró vagy, XOR);

A legfeljebb 2 változós Boole függvények

A 16 legfeljebb kétváltozós Boole-függvény:

$0 - 100\%$	$\downarrow$	és tagadása:	$\uparrow$
$25 - 75\%$	$\wedge, \not\rightarrow, \not\leftarrow, \|\|$	és tagadásuk:	$\|, \rightarrow, \leftarrow, \vee$
$50 - 50\%$	$x_1, x_2, \leftrightarrow$	és tagadásuk:	$\neg x_1, \neg x_2, \not\leftrightarrow$

Itt természetesen

- x_1, az $f(x_1, x_2) = x_1$ függvényt jelöli.
- $x|y = \neg(x \wedge y)$ a NAND függvény, (néhol jele $\uparrow$, de az nálunk más!)
- $x||y = \neg(x \vee y)$ a NOR függvény, (néhol jele $\downarrow$, de az nálunk más!)

Bővebben lásd:
`http://en.wikipedia.org/wiki/Logical_connective`

Teljes rendszerek I

Definíció Boole függvények egy rendszere teljes vagy adekvát, ha segítségükkel minden (akárhány változós!) Boole-függvény felírható.

Tétel. Az alábbi rendszerek teljesek: (ld. előadás)

- $\{\vee, \wedge, \neg\}$,
- $\{\vee, \neg\}$,
- $\{\wedge, \neg\}$,
- $\{\rightarrow, \downarrow\}$.

FZ1. II/8. Mutassuk meg, hogy $\{\rightarrow, \neg\}$ adekvát, azaz teljes rendszert alkot!

Megoldás.

$$x \vee y = \neg x \rightarrow y,$$

és a $\{\neg, \vee\}$ halmazról pedig már tudjuk, hogy teljes.

Teljes rendszerek II

LM II 2/4. Fejezzük ki

a) $\wedge$-t és $\rightarrow$-t a $\vee$ és a $\neg$ művelet segítségével;

- $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y), \quad x \rightarrow y = \neg x \vee y;$

b) $\vee$-t és $\rightarrow$-t a $\wedge$ és a $\neg$ művelet segítségével;

- $x \vee y = \neg(\neg x \wedge \neg y), \quad x \rightarrow y = \neg(x \wedge \neg y);$

c) $\wedge$-t és $\vee$-t a $\rightarrow$ és a $\neg$ művelet segítségével;

- $x \wedge y = \neg(x \rightarrow \neg y), \quad x \vee y = \neg x \rightarrow y;$

d) $\wedge$, $\vee$, $\neg$-t és $\rightarrow$-t a $|$ művelet segítségével;

- $\neg x = (x|x), \quad x \wedge y = (x|y)|(x|y),$
  $x \vee y = (x|x)|(y|y), \quad x \rightarrow y = x|(y|y);$

e) $\neg$-t a $\rightarrow$ és a $\downarrow$ művelet segítségével;

- $\neg x = x \rightarrow \downarrow;$

f) $\neg$-t a $\oplus$ (kizáró vagy, $\not\leftrightarrow$) a $\uparrow$ művelet segítségével;

- $\neg x = x \oplus \uparrow;$

g) $\vee$-t az $\rightarrow$ művelet segítségével;

- $x \vee y = (x \rightarrow y) \rightarrow y;$

Teljes rendszerek III

Feladat. Bizonyítsuk, be hogy az alábbi rendszerek teljesek! (HF!)

a) $\{\neg, \leftarrow\}$;

b) $\{\neg, \not\leftarrow\}$;

c) $\{\rightarrow, \not\leftrightarrow\}$;

d) $\{\rightarrow, \not\leftarrow\}$;

e) $\{\leftarrow, \not\leftarrow\}$;

f) $\{\wedge, \not\leftrightarrow, \uparrow\}$;

Az összes, (**17** darab) legfeljebb kételemű, legfeljebb kétváltozós függvényekből álló minimális (= már semmi nem hagyható el belőle) teljes rendszert, lásd a Wikipedián!

Teljes rendszerek IV

FZ1 II/6. Mutassuk meg, hogy a $\{\wedge, \vee, \rightarrow\}$ halmaz nem adekvát (azaz nem alkot teljes rendszert.)
Megoldás. A negáció nem fejezhető ki.
Minden a halmaz műveleteiből felépített egyváltozós $f(x)$ függvényre, $f(1) = 1$, mert $1 \vee 1 = 1 \wedge 1 = 1 \rightarrow 1 = 1$.

De $\neg 1 = 0$, ezért a negáció nem fejezhető ki.

Teljes rendszerek V

LM II 2/6.

Mutassuk meg, hogy nem fejezhető ki

a) $\neg$ a $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ segítségével;

b) $\rightarrow$ a $\wedge$ és $\vee$ segítségével;

c) $\wedge$ a $\vee$ és $\rightarrow$ segítségével.

a) HF.

b)

Minden a halmaz műveleteiből felépített kétváltozós $f(x, y)$ függvényre, $f(0, 0) = 0$, mert $0 \wedge 0 = 0 \vee 0 = 0$.
De $0 \rightarrow 0 = 1$, ezért az implikáció nem fejezhető ki.

Teljes rendszerek V

c) megoldása

c) $\wedge$ nem fejezhető ki $\vee$ és $\rightarrow$ segítségével.
Azok az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ függvények, melyek kifejezhetők $\vee$ és $\rightarrow$ segítségével rendelkeznek a következő tulajdonsággal:
Létezik i, hogy $x_i = 1$ esetén mindig $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$ teljesül, azaz „egyetlen változó igazzá tételével az egész függvény igazzá tehető.”
$\vee$ és $\rightarrow$ rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.
Az is könnyen látható, hogy ezt a tulajdonságot a függvénykompozíció megőrzi:
A külső függvényt igazzá tevő változó helyére helyettesített belső függvényt egy változóval igazzá téve az összetett függvény is igazzá tehető.
$\wedge$ ellenben nem rendelkezik ezzel a tulajdonsággal, sem az első sem a második változójával nem tehető igazzá.

Teljes rendszerek VI

FZ1 II/7. Mutassuk meg, hogy a $\neg, \leftrightarrow$ halmaz nem adekvát! (Van olyan kétváltozós igazságtábla, ami nem fejezhető ki.)
1. Megoldás. Mutassuk meg, hogy $\neg$-val és $\leftrightarrow$-val csak olyan kétváltozós igazságtáblák fejezhetők ki, melyekben páros sok 1-es szerepel, így pl. $\vee$ nem fejezhető ki.
Valóban, világos, hogy $\leftrightarrow$ igazságtáblája ilyen, és hogy a $\neg$ alkalmazása megőrzi ezt a tulajdonságot. Lássuk, be hogy, ha $f_1(x, y)$ és $f_2(x, y)$ ilyen tulajdonságú, akkor $f_1 \leftrightarrow f_2$ is. (HF.)
2. Megoldás. Egy Boole-függvényt lineárisnak hívunk, ha $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ vagy $x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \uparrow$ alakú. Megmutatjuk, hogy $\neg$-val és $\leftrightarrow$-val csak lineáris függvények fejezhetők ki. Valóban $\neg x = x \oplus \uparrow$ és $x \leftrightarrow y = x \oplus y \oplus \uparrow$ lineáris. Továbbá, ha f és g lineáris függvények, akkor könnyen látható, hogy $\neg f = f \oplus \uparrow$ és $f \leftrightarrow g = f \oplus g \oplus \uparrow$ szintén lineáris függvények. (Ehhez fel kell használni, hogy $\oplus$ asszociatív és kommutatív, $x \oplus x = \downarrow$ és $x \oplus \downarrow = x$.) De például a konjunkció nem lineáris, ezért nem fejezhető ki.

Horn-formulák

Az alábbi itéletkalkulusbeli formulákat hozzuk konjunktív normálformára, majd írjuk őket „implikációs alakba" (a tagokra a $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \ldots \vee \neg q_n \equiv$ $q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n \to p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$ azonosságot használva, üres konjunkció: $\uparrow$, üres diszjunkció: $\downarrow$).
Írjuk fel a formulákat a rezolúciónál használt halmazos formátumban is. Melyek közülük Horn-formulák? A Horn-formulák kielégíthetőségét vizsgáljuk meg a tanult algoritmussal.

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$

b) $p \to ((q \to r) \wedge (\neg s \vee r))$

c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

d) $(p \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

e) $\downarrow$

f) $\uparrow$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$
Konjunktív normálformára kell hozni:
$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv$
$(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \equiv$
$(p \rightarrow r) \wedge (p \wedge q \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow q \vee r) \equiv$
$\{\{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{q, r\}\}$
Nem Horn-formula, mert a harmadik tag nem Horn-tag (mivel egynél több pozitív literált tartalmaz).

b) $p \rightarrow ((q \rightarrow r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv$
$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee r) \equiv$
$\equiv (p \wedge q \rightarrow r) \wedge (p \wedge s \rightarrow r) \equiv \{\,\{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg s, r\}\,\}$,
ebben az alakban Horn-formula. Kielégíthető, legyen minden változó hamis.

Megoldások II

c)
$(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r) \equiv q \wedge (p \vee \neg r) \equiv (\uparrow \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \equiv \{\{q\}, \{p, \neg r\}\}$
A második (hosszú) formula nem Horn-formula, de a harmadik (egyszerűsített) már igen. Kielégíthető $\mathcal{A}(q) = 1$,
$\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(r) = 0$.
e) $\downarrow \equiv \uparrow \rightarrow \downarrow \equiv \{\square\}$ (csak az üres klózt tartalmazó KNF), Horn-formula. Kielégíthetetlen.
f) $\uparrow \equiv p \vee \neg p \equiv p \rightarrow p \equiv \{\{p, \neg p\}\}$, Horn-formula, kielégíthető. (Másik megoldás: $\emptyset$: üres, azaz egyetlen klózt sem tartalmazó KNF.)

Jövő hétre

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 II/3, 4, 5, III/1, 2**.
- Szükséges az előadás további részének ismerete, különösen a Horn-formulák és a rezolúció alapfogalmai és algoritmusa.