Logika és informatikai alkalmazásai

5. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Horn formulák agoritmusa és a zérusrendű rezolúció

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps

Horn-formulák

Az alábbi itéletkalkulusbeli formulákat hozzuk konjunktív normálformára, majd írjuk őket „implikációs alakba" (a tagokra a $p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m \vee \neg q_1 \vee \neg q_2 \vee \ldots \vee \neg q_n \equiv$ $q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_n \to p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_m$ azonosságot használva, üres konjunkció: $\uparrow$, üres diszjunkció: $\downarrow$).
Írjuk fel a formulákat a rezolúciónál használt halmazos formátumban is. Melyek közülük Horn-formulák? A Horn-formulák kielégíthetőségét vizsgáljuk meg a tanult algoritmussal.

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$

b) $p \to ((q \to r) \wedge (\neg s \vee r))$

c) $(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r)$

d) $(p \vee q \vee \neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge p \wedge \neg q \wedge (\neg p \vee \neg q)$

e) $\downarrow$

f) $\uparrow$

Megoldások I

a) $(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q)$
Konjunktív normálformára kell hozni:
$(\neg p \wedge q) \vee (r \wedge \neg q) \equiv (\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \wedge (q \vee \neg q) \equiv$
$(\neg p \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q) \wedge (q \vee r) \equiv$
$(p \to r) \wedge (p \wedge q \to \downarrow) \wedge (\uparrow \to q \vee r) \equiv$
$\{\{\neg p, r\}, \{\neg p, \neg q\}, \{q, r\}\}$
Nem Horn-formula, mert a harmadik tag nem Horn-tag (mivel egynél több pozitív literált tartalmaz).

b) $p \to ((q \to r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv \neg p \vee ((\neg q \vee r) \wedge (\neg s \vee r)) \equiv$
$(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg s \vee r) \equiv$
$\equiv (p \wedge q \to r) \wedge (p \wedge s \to r) \equiv \{\, \{\neg p, \neg q, r\}, \{\neg p, \neg s, r\} \,\}$,
ebben az alakban Horn-formula. Kielégíthető, legyen minden változó hamis.

Megoldások II

c)
$(p \wedge q \wedge r) \vee (q \wedge \neg r) \equiv (p \vee q) \wedge (q \vee q) \wedge (r \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \wedge (q \vee \neg r) \wedge (r \vee \neg r) \equiv q \wedge (p \vee \neg r) \equiv (\uparrow \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow p) \equiv \{\{q\}, \{p, \neg r\}\}$
A második (hosszú) formula nem Horn-formula, de a harmadik (egyszerűsített) már igen. Kielégíthető $\mathcal{A}(q) = 1$, $\mathcal{A}(p) = \mathcal{A}(r) = 0$.
e) $\downarrow \equiv \uparrow \rightarrow \downarrow \equiv \{\Box\}$ (csak az üres klózt tartalmazó KNF), Horn-formula. Kielégíthetetlen.
f) $\uparrow \equiv p \vee \neg p \equiv p \rightarrow p \equiv \{\{p, \neg p\}\}$, Horn-formula, kielégíthető. (Másik megoldás: $\emptyset$: üres, azaz egyetlen klózt sem tartalmazó KNF.)

A Horn-algoritmus I.

Döntse el a Horn-formulák algoritmusával, hogy kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$(\neg p \vee \neg q \vee \neg r) \wedge (\neg s \vee \neg v \vee p) \wedge \neg t \wedge s \wedge q \wedge (\neg u \vee v) \wedge u$$

Megoldás.

$$(p \wedge q \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (s \wedge v \rightarrow p) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow s)$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow q) \wedge (u \rightarrow v) \wedge (\uparrow \rightarrow u)$$

Az algoritmus sorra az alábbi változók összes előfordulását megjelöli: s, q, u, v, p. Azaz

$$(\boxed{p} \wedge \boxed{q} \wedge r \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{v} \rightarrow \boxed{p}) \wedge (t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{u} \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{u})$$

Mivel nincs olyan $(q_1 \wedge q_2 \wedge \ldots \wedge q_m \rightarrow \downarrow)$ tag, melynek a baloldalán **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthető, és $\mathcal{A}(s) = \mathcal{A}(q) = \mathcal{A}(u) = \mathcal{A}(v) = \mathcal{A}(p) = 1$, $\mathcal{A}(r) = \mathcal{A}(t) = 0$ igazzá teszi.

A Horn-algoritmus II.

Kielégíthető-e az alábbi Horn formula:

$$\neg t \wedge v \wedge (q \vee \neg p) \wedge (\neg p \vee r \vee \neg t) \wedge (t \vee \neg t) \wedge s \wedge (u \vee \neg s \vee \neg p)$$
$$\wedge (\neg p \vee \neg r \vee \neg s \vee u) \wedge (\neg p \vee \neg r \vee v) \wedge (\neg q \vee \neg u \vee \neg s \vee \neg w)$$
$$\wedge (\neg v \vee \neg t) \wedge (\neg u \vee \neg q \vee w) \wedge (\neg r \vee \neg v \vee \neg q \vee \neg p) \wedge p$$

Megoldás. Implikációs alakban a formula:

$$(t \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{v}) \wedge (\boxed{p} \rightarrow \boxed{q}) \wedge (\boxed{p} \wedge t \rightarrow r) \wedge (t \rightarrow t) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{s})$$
$$\wedge (\boxed{s} \wedge \boxed{p} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \wedge \boxed{s} \rightarrow \boxed{u}) \wedge (\boxed{p} \wedge r \rightarrow \boxed{v})$$
$$\wedge (\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{v} \wedge t \rightarrow \downarrow) \wedge (\boxed{u} \wedge \boxed{q} \rightarrow \boxed{w})$$
$$\wedge (r \wedge \boxed{v} \wedge \boxed{q} \wedge \boxed{p} \rightarrow \downarrow) \wedge (\uparrow \rightarrow \boxed{p})$$

Az algoritmus alábbi változókat jelöli meg: v, s, p, q, u, w.
Mivel a $(\boxed{q} \wedge \boxed{u} \wedge \boxed{s} \wedge \boxed{w} \rightarrow \downarrow)$ a tagban a baloldalon **minden** változó megjelölt, ezért a formula kielégíthetetlen.

Rezolúció I

FZ1. II/8. Bizonyítsuk be rezolúcióval, hogy a következő formulák nem kielégíthetők.

a) $(p \leftrightarrow (q \rightarrow r)) \wedge ((p \leftrightarrow q) \wedge (p \leftrightarrow \neg r))$;

b) $\neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q)$;

c) $\neg(r \wedge \neg q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg p \vee \neg s) \wedge \neg(\neg r \vee \neg s)$.

b) megoldása. Először KNF-re kell hozni:
$F = \neg(((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg q) \equiv ((p \rightarrow q) \rightarrow \neg q) \wedge q \equiv$
$(\neg(p \rightarrow q) \vee \neg q) \wedge q \equiv ((p \wedge \neg q) \vee \neg q) \wedge q \equiv (p \vee \neg q) \wedge \neg q \wedge q$

F mint klózok halmaza: $F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$

A bizonyítás folytatása

Tétel. Σ formulahalmaz kielégíthetetlen $\Leftrightarrow \Box \in Res^*(\Sigma)$.
Most $\Sigma = F = \{\{p, \neg q\}, \{\neg q\}, \{q\}\}$
Az üres klóz egy rezolúciós levezetés az alábbi:

1. $\{p, \neg q\}$ $\in F$
2. $\{\neg q\}$ $\in F$
3. $\{q\}$ $\in F$
4. $\{\Box\}$ Res 2,3

Rezolúcióval levezethető az üres klóz: $\Box$
Ezért F **kielégíthetetlen**.
Ha az üres klóz nem lenne levezethető (ezt észrevesszük, mert egy idő után nem tudunk rezolúcióval újabb klózokat képezni, amikor már előállítottuk $Res^*(\Sigma)$ miden elemét), akkor F kielégíthető lenne.

Rezolúció II.

FZI. V/5.
Adjuk meg a $Res^2(F)$ klózhalmazt!

a) $F = \{\{\neg p, q, \neg r\}, \{p\}, \{q, r, s\}, \{\neg r, \neg s\}\}$;

b) $F = \{\{\neg p, \neg q, r\}, \{p, r\}, \{q, r\}, \{\neg r\}\}$.

b) megoldása.

1.	$\neg p, \neg q, r$	$\in F$	
2.	p, r	$\in F$	
3.	q, r	$\in F$	
4.	$\neg r$	$\in F$	1-4.=Res^0(F)
5.	$\neg q, r$	Res 1,2	
6.	$\neg p, r$	Res 1,3	
7.	$\neg p, \neg q$	Res 1,4	
8.	p	Res 2,4	
9.	q	Res 3,4	1-9.=Res^1(F)
10.	r	Res 2,6	
11.	$\neg q$	Res 4,5	
12.	$\neg p$	Res 4,6	1-12.=Res^2(F)
13.	$\square$	Res 4,10	1-13.=Res^3(F)

Így Res^2(F)-nek **nem eleme** $\square$.
Különben Res^4(F)=$Res^3(F)$, így Res^*(F)=Res^3(F), és
$\square \in Res^*$(F), ezért F kielégíthetetlen.

Tautológiaság eldöntése rezolúcióval

3. Döntsük el rezolúcióval, hogy a következő formulák tautológiák-e?

a) $\neg[(p \to q) \wedge p \wedge \neg q]$

b) $((p \to q) \wedge \neg q) \vee \neg p$

c) $(p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r))$

d) $(p \to r) \to ((q \to r) \to (p \vee q \to r))$

Tétel. F tautológia $\Leftrightarrow \neg F$ kielégíthetetlen.
Megoldások.
a) $\neg F = (\neg p \vee q) \wedge p \wedge \neg q = \{\{\neg p, q\}, \{p\}, \{\neg q\}\}$.

1.	$\neg p, q$	$\in F$
2.	p	$\in F$
3.	$\neg q$	$\in F$
4.	q	Res 1,2
5.	$\square$	Res 3,4

Így $\neg F$ kielégíthetetlen, ezért F tautológia.
b) nem tautológia. c) tautológia. d) tautológia.

Ekivivalencia eldöntése rezolúcióval

4. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi formulák ekvivalensek-e?

a) $p \to \neg q$ és $q \to \neg p$

b) $(p \vee q \to r)$ és $(\neg r \to \neg p \vee \neg q)$

Tétel. $F \equiv G \Leftrightarrow \models F \leftrightarrow G \Leftrightarrow \neg(F \leftrightarrow G)$ kielégíthetetlen.
a) ekvivalensek, HF!
b) $\neg(F \leftrightarrow G) \equiv (\neg p \vee \neg q) \wedge (p \vee q) \wedge \neg r$ (HF ellenőrizni!)
$\Sigma := \{\{\neg p, \neg q\}, \{p, q\}, \{\neg r\}\}$

$$\begin{array}{ll}
1.\ \neg p, \neg q & \in \Sigma \\
2.\ p, q & \in \Sigma \\
3.\ \neg r & \in \Sigma \\
4.\ \neg q, q & \mathrm{Res} 1, 2 \\
5.\ \neg p, p & \mathrm{Res} 1, 2
\end{array}$$

1-5. $= \mathrm{Res}^1(\Sigma) = \mathrm{Res}^2(\Sigma) = \mathrm{Res}^*(\Sigma)$. Mivel $\Box \notin \mathrm{Res}^*(\Sigma)$, ezért Σ kielégíthető, így F és G **nem ekvivalensek**.

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval

5. Döntsük el rezolúcióval hogy az alábbi logikai következmények fennállnak-e?

a) $\{q, r \to (q \to p), \} \models r \to p$

b) $\{F \to K, K \to A, F \vee R, R \to (H \to A), \neg A\} \models \neg F \wedge \neg K$

c) $\{F \to K, K \to A, F \vee R, R \to (H \to A), \neg A\} \models \neg R$

d) $\{Z \to M \vee F, \neg F, Z\} \models M$

Tétel. $\{F_1, F_2, \ldots, F_n\} \models G \Leftrightarrow \Sigma = \{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ kielégíthetetlen.

Megoldások a) Igaz b) Igaz. c) Nem igaz. d) Igaz.

a) megoldása

a) $F_1 = \underbrace{q}$, $F_2 = r \to (q \to p) \equiv \underbrace{\neg r \vee \neg q \vee p}$, $G = r \to p$ és
$\neg G = \neg(r \to p) \equiv \underbrace{r} \wedge \underbrace{\neg p}$

Így most

$$\Sigma = \{\{q\}, \{\neg r, \neg q, p\}, \{r\}, \{\neg p\}\}.$$

Az üres klóz egy rezolúciós levezetése:

1. q	$\in \Sigma$
2. $\neg r, \neg q, p$	$\in \Sigma$
3. r	$\in \Sigma$
4. $\neg p$	$\in \Sigma$
5. $\neg r, p$	$\mathrm{Res} 1, 2$
6. p	$\mathrm{Res} 3, 5$
7. $\square$	$\mathrm{Res} 4, 6$

Ezért Σ kielégíthetetlen, ami azt mutatja, hogy **a logikai következtetés fennáll**.

Logikai következmény eldöntése rezolúcióval II.

6. Formalizálja az alábbi mondatokat és döntse el rezolúcióval, hogy az első két mondatnak logikai következménye-e a harmadik.

F_1: Ha Peti busszal utazik és a busz késik, akkor Peti nem ér oda a találkozóra.

F_2: Petinek nem kell hazamennie, ha nem ér oda a találkozóra és ha rosszkedvű.

F_3: Ha Petinek haza kell mennie, és Peti busszal utazik, akkor Peti nem lesz rosszkedvű, ha késik a busz.

Megoldás

- B = „ Peti busszal utazik."
- K = „ A busz késik."
- O = „ Peti odaér a találkozóra."
- H = „ Petinek haza kell mennie."
- R = „ Peti rosszkedvű (lesz)."

- $F_1 = B \wedge K \to \neg O \equiv \neg B \vee \neg K \vee \neg O$;
- $F_2 = \neg O \wedge R \to \neg H \equiv O \vee \neg R \vee \neg H$;
- $F_3 = (H \wedge B) \to (K \to \neg R)$;
- $\neg F_3 = H \wedge B \wedge K \wedge R$;

A $\Sigma = \{\{\neg B, \neg K, \neg O\}, \{O, \neg R, \neg H\}, \{H\}, \{B\}, \{K\}, \{R\}\}$
halmazból pedig levezethető az üres klóz (HF!)
Így **a logikai következtetés fennáll**.

Házi feladat

- HF, a kimaradt példák és még **FZ1 V/3, 6, 7, 8**.
- HF* (nehezebb példák): **FZ1 V/1, 2**.