

Logika és informatikai alkalmazásai

6. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Hilbert típusú bizonyítások

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz I. "Ítéletkalkulus"

`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat1.ps`

Hilbert féle bizonyítások

Axióma sémák:

1. $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$
2. $F \rightarrow (G \rightarrow F)$
3. $((F \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow F$

Ezek axióma **sémák**, azaz a fenti képletekben F G és H helyére tetszőleges formulákat helyettesíthetünk.

Következtetési szabály:

Modus Ponens (leválasztás szabálya, MP)

$$\frac{F, F \rightarrow G}{G}$$

Ezt szintén tetszőleges F és G formulákra szabad alkalmazni.

Hogyan lehet ezeket megtanulni?

AX1: $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$,

ez az „implikáció öndisztributivitása”:

„ $F \cdot (G + H) = F \cdot G + F \cdot H$ ”.

Miért tautológia ez? A láncolt implikáció viselkedése miatt

$F \rightarrow (G \rightarrow H) \equiv F \wedge G \rightarrow H$, és

$(F \wedge G \rightarrow H) \wedge (F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H)$ ugye már látszik?

AX2: $F \rightarrow (G \rightarrow F)$

Ez arra jó, hogy F -ből, $G \rightarrow F$ -et készíthessünk. Valóban:

1. F
2. $F \rightarrow (G \rightarrow F)$ **AX2**
3. $G \rightarrow F$ **MP 1,2**

Ez alapján, ha már levezettük F -et, levezethetjük $G \rightarrow F$ -et bármely G formulára.

AX3: $((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow F$

Ez a dupla tagadás törvénye, vagyis $\neg\neg F \rightarrow F$.

Bizonyításokat konstruálni nem könnyű ...

Némi segítség ez az applet:

`logik.phl.univie.ac.at/~chris/formular-uk-hilbert.html`

Csak ez egy kicsit más axiómákat használ az előadás axiómái a setupban így etethetők meg vele:

$$(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$$
$$F \rightarrow (G \rightarrow F)$$
$$((F \rightarrow O) \rightarrow O) \rightarrow F$$

És utána „O”-t (vagyis nagy „ó”-t) az azonosan hamis (\downarrow) jelnek kell tekinteni és nem szabad helyére semmit sem helyettesíteni.

$\vdash P \rightarrow P$ bizonyítása

- $P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)$
AX2[F/P, G/(P \rightarrow P)]
- $(P \rightarrow ((P \rightarrow P) \rightarrow P)) \rightarrow ((P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P))$
AX1[F/P, G/(P \rightarrow P), H/P]
- $(P \rightarrow (P \rightarrow P)) \rightarrow (P \rightarrow P)$
MP 1,2
- $P \rightarrow (P \rightarrow P)$
AX2[F/P, G/P]
- $P \rightarrow P$
MP 3,4

Logikai következtetés bizonyítása

Jele: $\Sigma \vdash F$

Ekkor a F bizonyításához az axiómákon túl a Σ -beli formulák is felhasználhatók (azok persze helyettesítés nélkül!).

Például: $\Sigma = \{(P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp, P \rightarrow Q\}$ esetén $\Sigma \vdash Q$ -nak ez a levezetése (bizonyítása):

1. $(P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp$ $\in \Sigma$
2. $((P \rightarrow \perp) \rightarrow \perp) \rightarrow P$ $AX3[F/P]$
3. P $MP\ 1,2$
4. $P \rightarrow Q$ $\in \Sigma$
5. Q $MP\ 3,4$

Tétel. (A Hilbert kalkulus helyessége és teljessége) Bármely Σ és F zérusrendű formulahalmazra illetve formulára

$$\Sigma \vdash F \Leftrightarrow \Sigma \models F$$

Megjegyzés. Némileg bonyolultabb axiómákkal és szabályokkal ugyan de a tétel igaz elsőrendben is. Így a logikai következmény fogalma formalizálható.

$\vdash \downarrow \rightarrow P$ bizonyítása

(azaz „hamisból minden következik”)

1. $(\downarrow \rightarrow (((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow P)) \rightarrow ((\downarrow \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow)) \rightarrow (\downarrow \rightarrow P))$
AX1[F/ \downarrow , G/($P \rightarrow \downarrow$) $\rightarrow \downarrow$, H/P]
2. $((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow P$ AX3[F/P]
3. $((((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow P) \rightarrow (\downarrow \rightarrow (((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow P)))$
AX2[F/(($P \rightarrow \downarrow$) $\rightarrow \downarrow$) $\rightarrow P$, G/ \downarrow]
4. $\downarrow \rightarrow (((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \rightarrow P)$ MP 2,3
5. $(\downarrow \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow)) \rightarrow (\downarrow \rightarrow P)$ MP 1,4
6. $\downarrow \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow)$ AX2[F/ \downarrow , G/ $P \rightarrow \downarrow$]
7. $\downarrow \rightarrow P$ MP 5,6

$\vdash ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow)$ bizonyítása

- $((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow)) \rightarrow (((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow))$
 $AX1[F/(P \rightarrow \downarrow), G/P, H/\downarrow]$
- $((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow)) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))) \rightarrow$
 $((((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))))$
 $AX1[F/P \rightarrow \downarrow, G/((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow)), H/(P \rightarrow \downarrow)]$
- $(P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow)) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))$
 $AX2[F/P \rightarrow \downarrow, G/(P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow)]$
- $((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))$
 $MP\ 2,3$
- $(P \rightarrow \downarrow) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow))$
 $AX2[F/P \rightarrow \downarrow, G/P \rightarrow \downarrow]$
- $(P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow \downarrow)$ $MP\ 4,5$
- $((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow)$ $MP\ 1,6$

A dedukció tétele

Ez így roppant nehézkes és hosszadalmas, de segítségünkre siet a **dedukció tétele**:

$$\Sigma \vdash F \rightarrow G \Leftrightarrow \Sigma \cup \{F\} \vdash G$$

Az mindaddig, amíg implikációt, azaz $F \rightarrow G$ alakú formulát kell bebizonyítani, annak előtagja F felvehető a feltételek közé és elég csak G -t bizonyítani. **Például:**

$$\vdash F \rightarrow ((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow) \Leftrightarrow \{F\} \vdash (F \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow \Leftrightarrow \{F, F \rightarrow \downarrow\} \vdash \downarrow$$

Ez meg már könnyű:

1. F $\in \Sigma$
2. $F \rightarrow \downarrow$ $\in \Sigma$
3. \downarrow **MP 1,2**

Feladatok

Mutassuk meg az alábbiakat, a dedukció tétel használható.

1. $\vdash F \rightarrow F$ (dedukcióval triviális)
2. $\vdash ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow P) \rightarrow ((P \rightarrow \downarrow) \rightarrow \downarrow)$
(az előző példa, ugye, hogy könnyebb?)
3. $\vdash \downarrow \rightarrow P$
(azért ez is könnyebb mint az előbb, bár nem triviális)
4. $\{P, P \rightarrow \downarrow\} \vdash Q$ (HF)
5. $\vdash (P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (P \rightarrow Q)$ (HF)
6. $\{(P \rightarrow \downarrow) \rightarrow (Q \rightarrow \downarrow)\} \vdash Q \rightarrow P$ (táblán)
7. $\vdash ((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow (G \rightarrow \downarrow)) \rightarrow (((F \rightarrow \downarrow) \rightarrow G) \rightarrow F)$
(Ez a Fülöp Z. jegyzet 3. axiómája)
8. $\{(P \rightarrow \downarrow) \rightarrow P\} \vdash P$
(ehhez felhasználjuk azt, hogy $F \rightarrow F$ -et már le tudjuk vezetni (és esetleg az előző feladatot.))

További példák **FZ1 IV/5** (átírva az előadás jelölésére, azaz $\neg F \equiv F \rightarrow \downarrow$, vagy az előző példa 7. pontjának értelmében a feladatsor axiómáit is használhatjuk).

Követelmények a ZH-ra

1. Elsőrendű szintaxis: term, atomi formula, formula, részformulák, kvantorok hatásköre.
2. Struktúrák és modelljeik: egy struktúra egy formulának modellje-e, formulához adjon meg modelljét, nem modelljét, olyan formulák felírása, melyek minden modellje bizonyos tulajdonságú, formalizálás
3. A szemantika további alapfogalmai: kielégíthetőség, tautológia, ekvivalencia, logikai következmény, és ezek egyszerű összefüggései.

Követelmények a ZH-ra II

4. Az ítéletkalkulus alapvető algoritmikus kérdéseinek:

- ▶ Egy F formula, vagy véges Σ formulahalmaz **kielégíthető-e**;
- ▶ Egy F formula **tautológia-e** ($\models F$);
- ▶ Formulák egy véges Σ halmazának egy F formula **logikai következménye-e** ($\Sigma \models F$);
- ▶ Egy F és egy G formula **ekvivalens-e** ($F \equiv G$);

eldöntése az alábbi módszerekkel

- ▶ igazságtáblázattal;
- ▶ indirekt igazságtáblázat módszerrel;
- ▶ Horn-formulák algoritmusával (persze ez csak akkor alkalmazható, ha csak Horn-klózek kielégíthetőségét kell eldönteni);
- ▶ rezolúcióval.

5. Boole-műveletek egymással való kifejezhetősége, rendszerek teljessége és nem teljessége.

6. Hilbert típusú bizonyítások dedukcióval és anélkül.

A ZH-ban lehet feladat a kiadott házfeladatok közül.