Logika és informatikai alkalmazásai

7. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Normálformák, Skolemizáció:

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Egy formula

- zárt: ha nincs benne szabad változó;
- kiigazított: ha különböző kvantorok különböző változókat kötnek le és a kötött változók a szabad változóktól is különböznek.
- prenex alakú: ha a kvantorok a formula legelején vannak és az egész kvantormentes részre (azaz a formula magjára) vonatkoznak. Pl: $\forall x p(x) \to q(y)$ nem prenex alakú, de $\exists x(p(x) \to q(y))$ igen.
- Skolem normálformájú: ha $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F^*$ alakú, ahol F^* kvantormentes, $n \geq 0$. Azaz olyan prenex alak, melyben **csak univerzális kvantor szerepel**.

Ekvivalens, s-ekvivalens

Két formula, F és G

- **ekvivalens**, ha pontosan ugyanazokban a modellekben igazak, azaz $\mathrm{Mod(F)} = \mathrm{Mod(G)}$. Jele: $F \equiv G$.
- **s-ekvivalens**, ha pontosan ugyanakkor kielégíthetők, azaz $\mathrm{Mod(F)} \neq \emptyset \iff \mathrm{Mod(G)} \neq \emptyset$ Jele: $F \equiv_s G$.

Pl. $\forall x p(x) \equiv \neg\exists x \neg p(x)$.

De $\exists x(x \cdot x = x) \not\equiv (c \cdot c = c)$, csak $\exists x(x \cdot x = x) \equiv_s (c \cdot c = c)$.

Valóban, ha a természetes számok modelljét úgy bővítjük, hogy a c konstans interpretációja 2 legyen, akkor az első formula igaz, a második nem.

De bármely modellt, melyben $\exists x(x \cdot x = x)$ igaz, tudunk úgy módosítani, hogy módosított modellben $(c \cdot c = c)$ igaz legyen, ehhez csak a c interpretációját kell alkalmas objektumra megváltoztatnunk, ilyen objektum pedig létezni fog.

Megjegyzés. Minden F formulára vagy $F \equiv_s \uparrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthető) vagy pedig $F \equiv_s \downarrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthetetlen).

A Skolem normálformára hozás ajánlott lépései

1. lezárás
2. $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ kifejezése $\neg$, $\vee$ és $\wedge$-sel
3. kiigazítás
4. prenex alakra hozás
5. (szűkebb értelemben vett) Skolemizáció
6. a formula magjának konjunktív normálformára hozása, ha azt is kérik (pl. rezolúciónál szükség lesz rá.)
7. a Skolem-függvények változóktól való függése szükségességének vizsgálata, ha én kérem :)

Megjegyzés. 2, 3, 4 és 6 ekvivalens átalakítások, 1 és 5 csak s-ekvivalensek.

FZ2 II/5a Adjunk meg a következő formulával s-ekvivalens zárt Skolem normálformájú formulát.

$$\forall x\, [\exists y\; p(x,y) \rightarrow q(y,z)] \wedge \exists y\, [\forall x\; r(x,y) \vee q(x,y)]$$

1. Lezárás

$$F = \forall x \, [\exists y \, p(x,y) \rightarrow q(y,z)] \wedge \exists y \, [\forall x \, r(x,y) \vee q(x,y)]$$

Meg kell határoznunk a szabad változó előfordulásokat. Ehhez ki kell számítanunk a kvantorok hatáskörét. Minden kvantor a következő binér (kétváltozós) műveletei jelig vagy a formula végéig köt, kivéve, ha a zárójelek mást követelnek. Most a bekeretezett változó előfordulások a szabad előfordulások:

$$F = \forall x \left[\exists y \, p(x,y) \rightarrow q(\boxed{y}, \boxed{z}) \right] \wedge \exists y \left[\forall x \, r(x,y) \vee q(\boxed{x}, y) \right]$$

Helyettesítsünk minden szabad változót egy-egy új, a formulában még nem szereplő konstanssal. Ugyanannak a változónak az előfordulásait természetesen ugyanazzal a konstanssal helyettesítsük. A példákban az ellenőrzés megkönnyítéséhez válasszuk mondjuk a konstansoknak mindig a $c_1, c_2, c_3, \ldots$ szimbólumok közül.

Így

$$F = \forall x \left[\exists y \, p(x,y) \to q(\boxed{y}, \boxed{z}) \right] \wedge \exists y \left[\forall x \, r(x,y) \vee q(\boxed{x}, y) \right] \equiv_s$$
$$\equiv_s \forall x \left[\exists y \, p(x,y) \to q(c_1, c_2) \right] \wedge \exists y \left[\forall x \, r(x,y) \vee q(c_3, y) \right].$$

Megjegyzés. A lezárást elvégezhetnénk úgy is, hogy a formula elején egzisztenciális kvantorral kötnénk le a szabad változókat. A példánkban $F \equiv_s \exists x \exists y \exists z F$, de a Skolemizáció az egzisztenciálisan kvantifikált változókból úgy is konstansokat fog csinálni.
Ha nem egyetlen F formulánk van, hanem formuláknak egy Σ halmazával dolgozunk, akkor az egész halmazban **ugyanazokat a konstansokat használjuk** az azonos szabad változók lekötésére. Ebben az esetben a formulánként egzisztenciális kvantorokkal való lekötés nem működik. Ha $\Sigma = \{F_1, F_2\}$ akkor általában $\exists x (F_1 \wedge F_2) \not\equiv_s \exists x F_1 \wedge \exists x F_2$.

2. $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ kifejezése

- $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$,
- $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$,
- $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
- $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

alkamazásával (izlés szerint).
Igazából a két tagadás nélküli azonosságot elég tudni, de ha úgy is KNF-ban kell a mag, akkor a többi azonossággal lehet némi időt spórolni.
Haladóknak: az implikációt nem muszáj kifejezni, de az implikációra vonatkozó kvantorkihúzási törvények egy kicsit bonyolultabbak. Az ekvivalenciát mindenképpen ki kell fejezni, mert nincs rá vonatkozó kvantorkihúzási törvény.

$$F \equiv_s \forall x \left[\exists y\, p(x,y) \boxed{\rightarrow} q(c_1,c_2)\right] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3,y)] \equiv$$
$$\equiv \forall x\, [\neg\exists y\, p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3,y)] \equiv$$

3. Kiigazítás

A kötött változók átnevezésével érjük el, hogy minden kvantornak saját változója legyen. Mivel az előző lépésben a szabad változóktól már megszabadultunk, azokra nem kell figyelni. (Különben a szabad változóktól is különböző kötött változókat kellene bevezetni).
Fontos észben tartani: a kötött változók átnevezése ekvivalens átalakítás, de a szabad változók nem nevezhetők át vagy cserélhetők konstansokra az ekvivalencia megtartásával.
Példáinkban az új változókat válasszuk $v_1, v_2, \ldots$ közül!

$$F \equiv_s \forall x\, [\neg \exists y\, p(x,y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists y\, [\forall x\, r(x,y) \vee q(c_3, y)] \equiv$$
$$\equiv_s \forall x\, [\neg \exists y\, p(x,y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists v_1\, [\forall v_2\, r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)]\,.$$

4. Prenex alakra hozás

"Kvantorkihúzási" törvények:

- $\neg\forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
- $\neg\exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$
- $F \vee QxG(x) \equiv Qx(F \vee G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $QxG(x) \vee F \equiv Qx(G(x) \vee F)$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $F \wedge QxG(x) \equiv Qx(F \wedge G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$
- $QxG(x) \wedge F \equiv Qx(G(x) \wedge F)$, ahol $Q = \forall$ vagy $\exists$ és $x \notin FreeVar(F)$

Szerencsére a kiigazítottság miatt az $x \notin FreeVar(F)$ (azaz, hogy x nem fordul elő szabadon F-ben) mindig teljesülni fog, arra külön nem kell figyelni.

A példa folytatása

$F \equiv_s$

$\equiv_s \forall x \left[\neg \boxed{\exists y} \, p(x,y) \vee q(c_1,c_2)\right] \wedge \exists v_1 [\boxed{\forall v_2} \, r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$

$\equiv \forall x [\boxed{\forall y} \neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$

$\equiv \forall x \, \boxed{\forall y} [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)] \equiv$

$\equiv \{\boxed{\forall x \, \forall y} [\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\} \equiv$

$\equiv \forall x \, \forall y \{[\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \boxed{\exists v_1 \forall v_2} \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\} \equiv$

$\equiv \forall x \, \forall y \exists v_1 \forall v_2 \{[\neg p(x,y) \vee q(c_1,c_2)] \wedge \, [r(v_2,v_1) \vee q(c_3,v_1)]\}$

Nem ez az egyetlen jó megoldás! Pl. $\exists v_1 \forall v_2 \forall x \, \forall y \{\ldots\}$ vagy $\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{\ldots\}$ is elképzelhető. Sőt minden kvantorsorrend melyben $\forall x$ megelőzi $\forall y$-t és $\exists v_1$ megelőzi $\forall v_2$-t. Ez a sorrend azonban biztos, mert a kvantorkihúzásokkal nem lehet az egyik kvantorral a másikat „átugrani”.

5. Skolemizáció

Az egzisztenciálisan lekötött változók **az előttük univerzálisan kvantifikáltak** új úgynevezett Skolem-függvényével helyettesítendők.

Az egységesítés kedvéért a Skolem-függvények szimbólumai legyenek a következők (de újak!):

- nulla változósok (konstansok): $c_1, c_2, \ldots$
- egy változósok: $e_1, e_2, \ldots$
- két változósok: $k_1, k_2, \ldots$
- három változósok: $h_1, h_2, \ldots$
- négy változósok: $n_1, n_2, \ldots$
- négynél több változósok: $f_1, f_2, \ldots$

$F \equiv_s \forall x \forall y \boxed{\exists v_1} \forall v_2 \{[\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)]\}.$

Az egyetlen egzisztenciális kvantor $\exists v_1$ melyet $\forall x$ és $\forall y$ univerzális kvantifikációk előznek meg.

Ezért v_1 helyére $k_1(x, y)$-t kell bevezetnünk.

$$F \equiv_s \forall x \forall y \forall v_2 \{[\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, k_1(x, y)) \vee q(c_3, k_1(x, y))]\}.$$

6. A Skolem-függvények változóktól való függéségsei szükségességének vizsgálata

Magyarul: szükséges-e, hogy a példában $k_1(x, y)$ mind az x, mind az y változótól függjön?
Válasz: most nem, mert ha a

$$\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{\ldots\}$$

prenex alakon végeznénk a skolemizációt, v_1-et nem előzné meg sem x sem y.
Ezért a példában, $k_1(x, y)$ helyett egy k_1 konstans (vagy ha valakinek jobban tetszik c_4) is írható lenne.
Szabály: Egy $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Skolem-függvény x_i-től való függése pontosan akkor hagyható el, ha a skolemizáció előtti formulában nincs olyan **atomi formula**, melyben x_i és az $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$-nel helyettesített változó együtt előfordulna.
Házi feladat: **FZ2 II/5** és **7**.
Szintén hozzuk Skolem normálformára az 1. gyak szöveges pédáinak formuláit, (illetve a konkluzió tagadását).

Két megjegyzés a Skolemizációhoz

1) A $\leftrightarrow$ műveletek kifejezését azért kell a kiigazítás előtt végezni, mert az $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ kifejezése elronthatja a kiigazítottságot.

2) Prenex normálalakra hozásnál lehetőség van a kvantorok lépésenkénti kihúzása helyett előbb a negációk De-Morgan azonosságokkal történő bevitelére a kvantorok mögé, majd ezután a kvantorok „gondolkodás nélkül” húzhatók ki a formula legelejére (a sorrend megtartásával). Ugyanis ha nincs implikáció és negáció, amin a kvantort át kell húzni, akkor az nem fog megváltozni.

FZ2 II/5

b)

$$F = \exists x r(x, \boxed{y}) \leftrightarrow \forall y p(\boxed{x}, y) \equiv_s \exists x r(x, c_1) \leftrightarrow \forall y p(c_2, y) \equiv$$

$$\equiv (\neg\exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg\forall y p(c_2, y) \vee \exists x r(x, c_1)) \equiv$$

$$\equiv (\neg\exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg\forall v_1 p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv$$

$$\equiv (\forall x \neg r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\exists v_1 \neg p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv$$

$$\equiv \forall x \forall y \exists v_1 \exists v_2 [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, v_1) \vee r(v_2, c_1))] \equiv_s$$

$$\equiv_s \forall x \forall y [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, k_1(x, y)) \vee r(k_2(x, y), c_1))]$$

$k_1(x, y)$ helyére k_1, $k_2(x, y)$ helyére pedig k_2 konstans írható lenne, mert v_1, illetve v_2 sem x-szel, sem y-nal nem szerepelt közös atomi formulában.

c) $\forall x \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4\, [(q(x, e_1(x)) \vee p(e_2(x), v_2)) \wedge \neg p(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_2(x)$ helyett e_2 alkalmazható, de $e_1(x)$ helyett e_1 nem!!!

d) $\forall x \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4\, [p(x, e_1(x)) \wedge \neg r(v_1, v_2) \wedge \neg q(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_1(x)$-nek x-től való függése lényeges!

FZ2 II/7 megoldása

a) $\exists x \forall y\, p(x,y) \to \forall y \exists x\, p(x,y) \equiv$
$\neg \exists x \forall y\, p(x,y) \vee \forall v_1 \exists v_2\, p(v_2, v_1) \equiv$
$\forall x \exists y \neg p(x,y) \vee \forall v_1 \exists v_2\, p(v_2, v_1) \equiv$
$\forall x \exists y \forall v_1 \exists v_2\, [\neg p(x,y) \vee p(v_2, v_1)] \equiv_s$
y helyére $e_1(x)$
v_2 helyére $k_1(x, v_1)$
$\forall x \forall v_1\, [\neg p(x, e_1(x)) \vee p(k_1(x, v_1), v_1)]$
Mj.: $k_1(x, v_1)$ helyett $k_1(v_1)$ használható, de k_1 nem!

b) $\forall x (p(x) \to q(y)) \equiv_s \forall x (p(x) \to q(c_1))$

FZ2 II/7 megoldása II.

c) $\forall x \forall y [p(z) \wedge (q(x,u) \rightarrow \exists v\, q(y,v))] \equiv_s$
$\forall x \forall y\, [p(c_1) \wedge (\neg q(x,c_2) \vee \exists v\, q(y,v))] \equiv$
$\forall x \forall y \exists v\, [p(c_1) \wedge (\neg q(x,c_2) \vee q(y,v))] \equiv_s$

v helyére $k_1(x,y)$ helyettesítéssel:
$\equiv_s \forall x \forall y\, [p(c_1) \wedge (\neg q(x,c_2) \vee q(y,k_1(x,y)))]$
$k_1(x,y)$ y-tól való függése lényeges, x-től való függése azonban nem, azaz helyére $k_1(y)$ írható lenne.

d) $\neg \exists y\, p(y) \rightarrow \exists z (q(z) \rightarrow r(x)) \equiv_s$
$\exists y\, p(y) \vee \exists z (q(z) \rightarrow r(c_1)) \equiv$
$\exists y\, p(y) \vee \exists z (\neg q(z) \vee r(c_1)) \equiv$
$\exists y \exists z\, [p(y) \vee (\neg q(z) \vee r(c_1))] \equiv_s$

y helyére c_2,
z helyére c_3 helyettesítéssel:
$p(c_2) \vee \neg q(c_3) \vee r(c_1)$.