

Logika és informatikai alkalmazásai

7. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoporth

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Normálformák, Skolemizáció:

Feladatsorok

FZ1 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Zárt Skolem normálformára hozás

Alapfogalmak

Egy formula

- ▶ zárt: ha nincs benne szabad változó;
- ▶ kiigazított: ha különböző kvantorok különböző változókat kötnek le és a kötött változók a szabad változóktól is különböznek.
- ▶ prenex alakú: ha a kvantorok a formula legelején vannak és az egész kvantortmentes részre (azaz a formula magjára) vonatkoznak. Pl: $\forall x p(x) \rightarrow q(y)$ nem prenex alakú, de $\exists x (p(x) \rightarrow q(y))$ igen.
- ▶ Skolem normálformájú: ha $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n F^*$ alakú, ahol F^* kvantortmentes, $n \geq 0$. Azaz olyan prenex alak, melyben **csak univerzális kvantor szerepel**.

Ekvivalens, s-ekvivalens

Két formula, F és G

- ▶ ekvivalens, ha pontosan ugyanazokban a modellekben igazak, azaz $\text{Mod}(F) = \text{Mod}(G)$. Jele: $F \equiv G$.
- ▶ s-ekvivalens, ha pontosan ugyanakkor kielégíthetők, azaz $\text{Mod}(F) \neq \emptyset \iff \text{Mod}(G) \neq \emptyset$ Jele: $F \equiv_s G$.

Pl. $\forall x p(x) \equiv \neg \exists x \neg p(x)$.

De $\exists x (x \cdot x = x) \not\equiv (c \cdot c = c)$, csak $\exists x (x \cdot x = x) \equiv_s (c \cdot c = c)$.

Valóban, ha a természetes számok modelljét úgy bővítjük, hogy a c konstans interpretációja 2 legyen, akkor az első formula igaz, a második nem.

De bármely modellt, melyben $\exists x (x \cdot x = x)$ igaz, tudunk úgy módosítani, hogy módosított modellben $(c \cdot c = c)$ igaz legyen, ehhez csak a c interpretációját kell alkalmas objektumra megváltoztatnunk, ilyen objektum pedig létezni fog.

Megjegyzés. Minden F formulára vagy $F \equiv_s \uparrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthető) vagy pedig $F \equiv_s \downarrow$ (mégpedig akkor ha F kielégíthetetlen).

A Skolem normálformára hozás ajánlott lépései

1. lezárás
2. \rightarrow és \leftrightarrow kifejezése \neg , \vee és \wedge -sel
3. kiigazítás
4. prenex alakra hozás
5. (szűkebb értelemben vett) Skolemizáció
6. a formula magjának konjunktív normálformára hozása, ha azt is kéri (pl. rezolúciónál szükség lesz rá.)
7. a Skolem-függvények változóktól való függése szükségességének vizsgálata, ha én kérem :)

Megjegyzés. 2, 3, 4 és 6 ekvivalens átalakítások, 1 és 5 csak s-ekvivalensek.

FZ2 II/5a Adjunk meg a következő formulával s-ekvivalens zárt Skolem normálformájú formulát.

$$\forall x [\exists y p(x, y) \rightarrow q(y, z)] \wedge \exists y [\forall x r(x, y) \vee q(x, y)]$$

1. Lezárás

$$F = \forall x [\exists y p(x, y) \rightarrow q(y, z)] \wedge \exists y [\forall x r(x, y) \vee q(x, y)]$$

Meg kell határoznunk a szabad változó előfordulásokat. Ehhez ki kell számítanunk a kvantorok hatáskörét. Minden kvantor a következő binér (kétváltozós) műveletei jelig vagy a formula végéig köt, kivéve, ha a zárójelek mást követelnek. Most a bekeretezett változó előfordulások a szabad előfordulások:

$$F = \forall x \left[\exists y p(x, y) \rightarrow q(\boxed{y}, \boxed{z}) \right] \wedge \exists y [\forall x r(x, y) \vee q(\boxed{x}, y)]$$

Helyettesítsünk minden szabad változót egy-egy új, a formulában még nem szereplő konstanssal. Ugyanannak a változónak az előfordulásait természetesen ugyanazzal a konstanssal helyettesítsük. A példákban az ellenőrzés megkönnyítéséhez válasszuk mondjuk a konstansoknak mindig a c_1, c_2, c_3, \dots szimbólumok közül.

Így

$$\begin{aligned} F &= \forall x \left[\exists y p(x, y) \rightarrow q(\boxed{y}, \boxed{z}) \right] \wedge \exists y \left[\forall x r(x, y) \vee q(\boxed{x}, y) \right] \equiv_s \\ &\equiv_s \forall x \left[\exists y p(x, y) \rightarrow q(c_1, c_2) \right] \wedge \exists y \left[\forall x r(x, y) \vee q(c_3, y) \right]. \end{aligned}$$

Megjegyzés. A lezárást elvégezhetnénk úgy is, hogy a formula elején egzisztenciális kvantorral kötnénk le a szabad változókat. A példánkban $F \equiv_s \exists x \exists y \exists z F$, de a Skolemizáció az egzisztenciális kvantifikált változókból úgy is konstansokat fog csinálni.

Ha nem egyetlen F formulánk van, hanem formuláknak egy Σ halmazával dolgozunk, akkor az egész halmazban

ugyanazokat a konstansokat használjuk az azonos szabad változók lekötésére. Ebben az esetben a formulánként egzisztenciális kvantorokkal való lekötés nem működik. Ha $\Sigma = \{F_1, F_2\}$ akkor általában $\exists x(F_1 \wedge F_2) \not\equiv_s \exists x F_1 \wedge \exists x F_2$.

2. \rightarrow és \leftrightarrow kifejezése

- ▶ $A \rightarrow B \equiv \neg A \vee B$,
- ▶ $\neg(A \rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$,
- ▶ $A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A) \equiv (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$
- ▶ $\neg(A \leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B) \equiv (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$

alkalmazásával (izlés szerint).

Igazából a két tagadás nélküli azonosságot elég tudni, de ha úgy is KNF-ban kell a mag, akkor a többi azonossággal lehet némi időt spórolni.

Haladóknak: az implikációt nem muszáj kifejezni, de az implikációra vonatkozó kvantorkihúzási törvények egy kicsit bonyolultabbak. Az ekvivalenciát mindenképpen ki kell fejezni, mert nincs rá vonatkozó kvantorkihúzási törvény.

$$\begin{aligned} F &\equiv_s \forall x \left[\exists y p(x, y) \boxed{\rightarrow} q(c_1, c_2) \right] \wedge \exists y \left[\forall x r(x, y) \vee q(c_3, y) \right] \equiv \\ &\equiv \forall x \left[\neg \exists y p(x, y) \vee q(c_1, c_2) \right] \wedge \exists y \left[\forall x r(x, y) \vee q(c_3, y) \right] \equiv \end{aligned}$$

3. Kiigazítás

A kötött változók átnevezésével érjük el, hogy minden kvantornak saját változója legyen. Mivel az előző lépésben a szabad változóktól már megszabadultunk, azokra nem kell figyelni. (Különben a szabad változóktól is különböző kötött változókat kellene bevezetni).

Fontos észben tartani: a kötött változók átnevezése ekvivalens átalakítás, de a szabad változók nem nevezhetők át vagy cserélhetők konstansokra az ekvivalencia megtartásával. Példáinkban az új változókat válasszuk v_1, v_2, \dots közül!

$$\begin{aligned} F &\equiv_s \forall x [\neg \exists y p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists y [\forall x r(x, y) \vee q(c_3, y)] \equiv \\ &\equiv_s \forall x [\neg \exists y p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists v_1 [\forall v_2 r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] . \end{aligned}$$

4. Prenex alakra hozás

"Kvantorkihúzási" törvények:

- ▶ $\neg \forall x F(x) \equiv \exists x \neg F(x)$
- ▶ $\neg \exists x F(x) \equiv \forall x \neg F(x)$
- ▶ $F \vee QxG(x) \equiv Qx(F \vee G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy \exists és $x \notin \text{FreeVar}(F)$
- ▶ $QxG(x) \vee F \equiv Qx(G(x) \vee F)$, ahol $Q = \forall$ vagy \exists és $x \notin \text{FreeVar}(F)$
- ▶ $F \wedge QxG(x) \equiv Qx(F \wedge G(x))$, ahol $Q = \forall$ vagy \exists és $x \notin \text{FreeVar}(F)$
- ▶ $QxG(x) \wedge F \equiv Qx(G(x) \wedge F)$, ahol $Q = \forall$ vagy \exists és $x \notin \text{FreeVar}(F)$

Szerencsére a kiigazítottság miatt az $x \notin \text{FreeVar}(F)$ (azaz, hogy x nem fordul elő szabadon F -ben) mindig teljesülni fog, arra külön nem kell figyelni.

A példa folytatása

$$F \equiv_s$$

$$\begin{aligned} &\equiv_s \forall x \left[\neg \boxed{\exists y} [p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \right] \wedge \exists v_1 \boxed{\forall v_2} [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \equiv \\ &\equiv \forall x \boxed{\forall y} [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \equiv \\ &\equiv \forall x \boxed{\forall y} [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \equiv \\ &\equiv \boxed{\forall x \forall y} [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \exists v_1 \forall v_2 [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y \{ [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge \boxed{\exists v_1 \forall v_2} [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \} \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y \exists v_1 \forall v_2 \{ [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \} \end{aligned}$$

Nem ez az egyetlen jó megoldás! Pl. $\exists v_1 \forall v_2 \forall x \forall y \{ \dots \}$ vagy $\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{ \dots \}$ is elképzelhető. Sőt minden kvantorsorrend melyben $\forall x$ megelőzi $\forall y$ -t és $\exists v_1$ megelőzi $\forall v_2$ -t. Ez a sorrend azonban biztos, mert a kvantorkihúzásokkal nem lehet az egyik kvantorral a másikat „átugrani”.

5. Skolemizáció

Az egzisztenciálisan lekötött változók **az előttük univerzálisan kvantifikáltak** új úgynevezett Skolem-függvényével helyettesítendők.

Az egységesítés kedvéért a Skolem-függvények szimbólumai legyenek a következők (de újak!):

- ▶ nulla változósok (konstansok): c_1, c_2, \dots
- ▶ egy változósok: e_1, e_2, \dots
- ▶ két változósok: k_1, k_2, \dots
- ▶ három változósok: h_1, h_2, \dots
- ▶ négy változósok: n_1, n_2, \dots
- ▶ négynél több változósok: f_1, f_2, \dots

$$F \equiv_s \forall x \forall y \boxed{\exists v_1} \forall v_2 \{ [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, v_1) \vee q(c_3, v_1)] \}.$$

Az egyetlen egzisztenciális kvantor $\exists v_1$ melyet $\forall x$ és $\forall y$ univerzális kvantifikációk előznek meg.

Ezért v_1 helyére $k_1(x, y)$ -t kell bevezetnünk.

$$F \equiv_s \forall x \forall y \forall v_2 \{ [\neg p(x, y) \vee q(c_1, c_2)] \wedge [r(v_2, k_1(x, y)) \vee q(c_3, k_1(x, y))] \}.$$

6. A Skolem-függvények változóktól való függéségei szükségességének vizsgálata

Magyarul: szükséges-e, hogy a példában $k_1(x, y)$ mind az x , mind az y változótól függjön?

Válasz: most nem, mert ha a

$$\exists v_1 \forall x \forall v_2 \forall y \{ \dots \}$$

prenex alakon végeznénk a skolemizációt, v_1 -et nem előzné meg sem x sem y .

Ezért a példában, $k_1(x, y)$ helyett egy k_1 konstans (vagy ha valakinek jobban tetszik c_4) is írható lenne.

Szabály: Egy $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Skolem-függvény x_i -től való függése pontosan akkor hagyható el, ha a skolemizáció előtti formulában nincs olyan **atomi formula**, melyben x_i és az $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ -nel helyettesített változó együtt előfordulna.

Házi feladat: **FZ2 II/5** és **7**.

Szintén hozzuk Skolem normálformára az 1. gyak szöveges példáinak formuláit, (illetve a konklúzió tagadását).

Két megjegyzés a Skolemizációhoz

1) $A \leftrightarrow$ műveletek kifejezését azért kell a kiigazítás előtt végezni, mert az $A \leftrightarrow B$ ekvivalencia $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$ kifejezése elronthatja a kiigazítottságot.

2) Prenex normálalakra hozásnál lehetőség van a kvantorok lépésenkénti kihúzására helyett előbb a negációk De-Morgan azonosságokkal történő bevitelére a kvantorok mögé, majd ezután a kvantorok „gondolkodás nélkül” húzhatók ki a formula legelejére (a sorrend megtartásával). Ugyanis ha nincs implikáció és negáció, amin a kvantort át kell húzni, akkor az nem fog megváltozni.

Néhány házi feladat megoldása:

FZ2 II/5

b)

$$\begin{aligned} F = \exists x r(x, \boxed{y}) \leftrightarrow \forall y p(\boxed{x}, y) &\equiv_s \exists x r(x, c_1) \leftrightarrow \forall y p(c_2, y) \equiv \\ &\equiv (\neg \exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg \forall y p(c_2, y) \vee \exists x r(x, c_1)) \equiv \\ &\equiv (\neg \exists x r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\neg \forall v_1 p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv \\ &\equiv (\forall x \neg r(x, c_1) \vee \forall y p(c_2, y)) \wedge (\exists v_1 \neg p(c_2, v_1) \vee \exists v_2 r(v_2, c_1)) \equiv \\ &\equiv \forall x \forall y \exists v_1 \exists v_2 [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, v_1) \vee r(v_2, c_1))] \equiv_s \\ &\equiv_s \forall x \forall y [(\neg r(x, c_1) \vee p(c_2, y)) \wedge (\neg p(c_2, k_1(x, y)) \vee r(k_2(x, y), c_1))] \end{aligned}$$

$k_1(x, y)$ helyére k_1 , $k_2(x, y)$ helyére pedig k_2 konstans írható lenne, mert v_1 , illetve v_2 sem x -szel, sem y -nal nem szerepelt közös atomi formulában.

c) $\forall x \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 [(q(x, e_1(x)) \vee p(e_2(x), v_2)) \wedge \neg p(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_2(x)$ helyett e_2 alkalmazható, de $e_1(x)$ helyett e_1 nem!!!

d) $\forall x \forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 [p(x, e_1(x)) \wedge \neg r(v_1, v_2) \wedge \neg q(v_3, v_4)]$
Mj.: $e_1(x)$ -nek x -től való függése lényeges!

FZ2 II/7 megoldása

- a) $\exists x \forall y p(x, y) \rightarrow \forall y \exists x p(x, y) \equiv$
 $\neg \exists x \forall y p(x, y) \vee \forall v_1 \exists v_2 p(v_2, v_1) \equiv$
 $\forall x \exists y \neg p(x, y) \vee \forall v_1 \exists v_2 p(v_2, v_1) \equiv$
 $\forall x \exists y \forall v_1 \exists v_2 [\neg p(x, y) \vee p(v_2, v_1)] \equiv_s$
 $y \text{ helyére } e_1(x)$
 $v_2 \text{ helyére } k_1(x, v_1)$
 $\forall x \forall v_1 [\neg p(x, e_1(x)) \vee p(k_1(x, v_1), v_1)]$
Mj.: $k_1(x, v_1)$ helyett $k_1(v_1)$ használható, de k_1 nem!
- b) $\forall x (p(x) \rightarrow q(y)) \equiv_s \forall x (p(x) \rightarrow q(c_1))$

FZ2 II/7 megoldása II.

- c) $\forall x \forall y [p(z) \wedge (q(x, u) \rightarrow \exists v q(y, v))] \equiv_s$
 $\forall x \forall y [p(c_1) \wedge (\neg q(x, c_2) \vee \exists v q(y, v))] \equiv$
 $\forall x \forall y \exists v [p(c_1) \wedge (\neg q(x, c_2) \vee q(y, v))] \equiv_s$
 $v \text{ helyére } k_1(x, y) \text{ helyettesítéssel:}$
 $\equiv_s \forall x \forall y [p(c_1) \wedge (\neg q(x, c_2) \vee q(y, k_1(x, y)))]$
 $k_1(x, y)$ y -től való függése lényeges, x -től való függése
azonban nem, azaz helyére $k_1(y)$ írható lenne.
- d) $\neg \exists y p(y) \rightarrow \exists z (q(z) \rightarrow r(x)) \equiv_s$
 $\exists y p(y) \vee \exists z (q(z) \rightarrow r(c_1)) \equiv$
 $\exists y p(y) \vee \exists z (\neg q(z) \vee r(c_1)) \equiv$
 $\exists y \exists z [p(y) \vee (\neg q(z) \vee r(c_1))] \equiv_s$
 $y \text{ helyére } c_2,$
 $z \text{ helyére } c_3 \text{ helyettesítéssel:}$
 $p(c_2) \vee \neg q(c_3) \vee r(c_1).$