Logika és informatikai alkalmazásai

8. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Skolem normálformák, Herbrand elmélet, alaprezolúció

Feladatsorok

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
`www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Csak a biztonság kedvéért ...

- predikátum szimbólumok: $p, q, r, P, Q, R \ldots$
- változók: x, y, z, s, t, u, v, w
- konstansok (nulla változós függvényszimbólumok): c, d, e
- függvényszimbólumok: $f, g, h, i, j, k, l, m, n$

Minden predikátum szimbólumnak van egy rangja (más szóval aritása), ami nem más mint a változóinak a száma.
A **termek** definíciója:

- Minden változó term.
- Ha f függvényszimbólum, mely n változós és t_1, t_2, . . . , t_n termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is term.

A második pontban $n = 0$ esetén kapjuk, hogy minden konstans term.
Mindig csak változók helyére szabad helyettesíteni konstansok helyére nem!

Alaptermek

Az **alaptermek** a változómentes termek, másképpen:

- Minden konstans alapterm.
- Ha f függvényszimbólum, mely n változós és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ alaptermek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is alapterm.

Például, ha $Fgv = \{c, f(.), g(.,.)\}$, akkor $g(x, f(g(y, c)))$ term, $f(g(c, f(c)))$ pedig alapterm.
Az Fgv feletti alaptermek halmaza

$$T_0 = \{c, f(c), g(c, c), f(f(c)), g(f(c), c), g(c, f(c)), \\ g(f(c), f(c)), f(g(c, c)), \ldots\}$$

Az Fgv-ról csak annyit fogunk feltenni, hogy a vizsgált formulák minden függvényszimbólumát tartalmazza, hogy T_0 ne legyen üres. Ezért, ha a formulákban nem lenne konstans, akkor vegyünk be egy c konstansot Fgv-be.

Herbrand kiterjesztés

Ha $F = \forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_n F^*$ egy zárt Skolem normálforma, akkor F Herbrand kiterjesztése a következő:

$$E(F) := \{F^*[x_1/t_1][x_2/t_2]\ldots[x_n/t_n] \mid t_i \in T_0, i = 1\ldots n\}$$

azaz F^* változóit alaptermekkel kell helyettesíteni minden lehetséges módon.
Egy Σ zárt Skolem normálformákat tartalmazó formulahalmaz Herbrand kiterejesztése:

$$E(\Sigma) = \bigcup_{F \in \Sigma} E(F)$$

Tétel. Σ akkor és csak akkor elégíthető ki, ha $E(\Sigma)$ kielégíthető.
Végül legyen $E'(\Sigma)$ az $E(\Sigma)$ konjunktív normálformáinak klózhalmaza. Ennek kielégíthetősége zérusrendű rezolúcióval vizsgálható, hiszen már csak alapközokból áll, amikben nincsenek változók.

Gyakorló példák

Írjuk fel a következő formulák, illetve formula halmazok Herbrand kiterjesztését, majd vizsgáljuk annak kielégíthetőségét alaprezolúcióval. Természetesen, ha szükséges, akkor előbb végezzük el a Skolemizációt.

a) $\Sigma = \{ \exists z \forall x p(x, y, z),\ \forall x \exists z \neg p(z, y, x) \}$

b) $F = \forall x (p(x) \to \exists y q(y))$

c) $F = \forall x \forall y (\exists z p(z) \wedge \exists u (q(x, u) \to \exists v q(y, v)))$

d) $F = \exists x (\neg \exists y p(y) \to \exists z (q(z) \to r(x)))$

e) $F = \forall x ((p(f(x)) \vee q) \wedge \neg p(f(f(x))) \wedge \neg q)$

f) $F = \forall x \forall y ((\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y)) \wedge p(y) \wedge (\neg p(g(b, x)) \vee \neg q(b)))$

a) saját, b)-d) FZ2 IV/1, e)-f) Muzalel Loránd 2007. 8. gyak.

Egy kidolgozott példa

a)

$$\Sigma = \{\, \exists z \forall x p(x, \boxed{y}, z),\ \forall x \exists z \neg p(z, \boxed{y}, x) \,\}$$

Lezárás (az egész halmazra **együtt**)
Az y szabadváltozó új, mondjuk a konstanssal helyettesítésével:

$$\Sigma' = \{\, \exists z \forall x p(x, a, z),\ \forall x \exists z \neg p(z, a, x) \,\}$$

Skolemizáció (**formulánként**)
Az első formulában $\exists z$ miatt z helyére b, a másodikban $\exists z$ helyére $f(x)$ új Skolemfüggvények bevezetésével:

$$\Sigma'' = \{\, \forall x p(x, a, b),\ \forall x \neg p(f(x), a, x) \,\}$$

Ez már zárt Skolem normálformák halmaza.

Folytatás ...

A

$$\Sigma'' = \{\, \forall x p(x, a, b),\ \forall x \neg p(f(x), a, x) \,\}$$

halmazban szereplő függvényszimbólumok:

$$Fgv = \{\, a, b, f(.) \,\}$$

Szerencsére most van benne konstans, nem kell hozzávenni.
Így

$$T_0 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b), \ldots\}$$

Ezért Σ'' Herbrand kiterjesztése az alábbi **formulák** halmaza:

$$E(\Sigma'') = \{p(\boxed{a}, a, b), p(\boxed{b}, a, b), p(\boxed{f(a)}, a, b), p(\boxed{f(b)}, a, b), \ldots$$

$$\neg p(f(\boxed{a}), a, \boxed{a}), \neg p(f(\boxed{b}), a, \boxed{b}), \neg p(f(\boxed{f(a)}), a, \boxed{f(a)}), \ldots\}$$

... még folytatás ...

$$E(\Sigma'') = \{p(a,a,b), p(b,a,b), p(f(a),a,b), p(f(b),a,b), \ldots$$
$$\neg p(f(a),a,a), \neg p(f(b),a,b), \neg p(f(f(a)),a,f(a)), \neg p(f(f(b)),a,f(b))$$
$$\ldots\}$$

Mivel miden változót alaptermmel helyettesítünk, így $E(\Sigma'')$, már nem tartalmaz változókat. Kielégíthetősége zérusrendben vizsgálható. Ehhez bevezethetjük, az alábbi ítéletváltozókat:

$p_1 := p(a,a,b)$	$q_1 := p(f(a),a,a)$
$p_2 := p(b,a,b)$	$p(f(b),a,b)$ már szerepel p_4-ként
$p_3 := p(f(a),a,b)$	$q_2 := p(f(f(a)),a,f(a))$
$p_4 := p(f(b),a,b)$	$q_3 := p(f(f(b)),a,f(b))$
$\ldots$	$\ldots$

Ezután $E(\Sigma'') = \{p_1, p_2, p_3, p_4, \ldots, \neg q_1, \neg p_4, \neg q_2, \neg q_3, \ldots\}$-ról könnyen látható, hogy kielégíthetetlen.

... és a befejezés.

Az ítéletváltozók bevezetése nélküli, „hivatalos” alaprezolúció: $E'(\Sigma'')$ az $E(\Sigma'')$ elemeinek **klózai** (véletlenül, most minden klóz csak egy literálból áll):

$$E'(\Sigma'') = \{\,\{p(a,a,b)\},\ \{p(b,a,b)\},\ \{p(f(a),a,b)\},\\ \{p(f(b),a,b)\},\dots,\{\neg p(f(a),a,a)\},\ \{\neg p(f(b),a,b)\},\dots\}$$

Így $E(\Sigma'')$ és ezzel Σ kielégíthetetlensége alaprezolúcióval így bizonyítható:

1. $\{p(f(b),a,b)\}$ $\quad\in E'(\Sigma'')$, mert a $\{\,p(x,a,b)\,\}$

   klózból kapható $[x/f(b)]$ alaphelyetesítéssel.

2. $\{\neg p(f(b),a,b)\}$ $\quad\in E'(\Sigma'')$, mert a $\{\,\neg p(f(x),a,x)\,\}$

   klózból kapható $[x/b]$ alaphelyetesítéssel.

3. $\Box$ $\qquad$ Res 1,2

Még két példa (táblán)

b) $F = \forall x(p(x) \rightarrow \exists y q(y))$

és

c) $F = \forall x[(p(f(x)) \vee q) \wedge \neg p(f(f(x))) \wedge \neg q]$

HF a többi példa.

Egy további kidolgozott rezolúciós példa Iván Szabolcs weblapján:

`www.inf.u-szeged.hu/~szabivan`
`/download/logika/resolution_sample.pdf`

Ott az alaprezolúciót *ground rezolúciónak* hívják, elsőrendű rezolúció pedig hamarosan nálunk is lesz.

És most már meg tudjuk oldani a 2. gyak szöveges példáit is!

- **Univerzum**: minden tárgy és élőlény
- **Predikátum szimbólumok**:
  - $H(x)$: x holló,
  - $K(x)$: x kréta,
  - $F(x)$: x fekete.
- **Függvény szimbólumok**: c : ez (a tárgy amiről beszélünk, konstans.)

(1) Minden holló fekete. $F_1 := \forall x(H(x) \to F(x))$

(2) Ez a kréta nem fekete. $F_2 := K(c) \wedge \neg F(c)$

---

(3) Ez a kréta nem holló: $F_3 := K(c) \wedge \neg H(c)$

Tétel. $\{F_1, F_2\} \models F_3 \Leftrightarrow \{F_1, F_2, \neg F_3\}$ kielégíthetetlen.

…HF!