

Logika és informatikai alkalmazásai

9. gyakorlat

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Egy HF múlt hétről

Írjuk fel a következő formulák, illetve formula halmazok Herbrand kiterjesztését, majd vizsgáljuk annak kielégíthetőségét alaprezolúcióval. Természetesen, ha szükséges, akkor előbb végezzük el a Skolemizációt.

f) $F =$

$$\forall x \forall y [(\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y)) \wedge p(y) \wedge (\neg p(g(b, x)) \vee \neg q(b))]$$

$$Fgv = \{ a, b, f(\cdot), g(\cdot, \cdot) \}$$

$$T_0 = \{ a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \dots, g(a, a), \dots, g(f(a), g(b, f(b))), \dots \}$$

$$E(F) = \{$$

$$(\neg p(\boxed{a}) \vee \neg p(f(a)) \vee q(\boxed{a})) \wedge p(\boxed{a}) \wedge (\neg p(g(b, \boxed{a})) \vee \neg q(b)),$$

$$(\neg p(\boxed{a}) \vee \neg p(f(a)) \vee q(\boxed{b})) \wedge p(\boxed{b}) \wedge (\neg p(g(b, \boxed{a})) \vee \neg q(b)), \dots,$$

$$(\neg p(\boxed{f(a)}) \vee \neg p(f(a)) \vee q(\boxed{b})) \wedge p(\boxed{b}) \wedge (\neg p(g(b, \boxed{f(a)})) \vee \neg q(b)), \dots \}$$

HF folytatás

$E'(F)$ legyen $E(F)$ klózainak a halmaza, másképpen ami F^* klózaiból keletkezik alaphelyettesítéssel:

$$F^* = \underbrace{(\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y))}_{\text{1. klóz}} \wedge \underbrace{p(y)}_{\text{2. klóz}} \wedge \underbrace{(\neg p(g(b, x)) \vee \neg q(b))}_{\text{3. klóz}}$$

Alaprezolúcióival (csak **egy** lehetséges megoldás):

- $\{ \neg p(f(a)), q(b) \} \in E'(F)$, az 1. klóz $[x/f(a)][y/b]$ után
- $\{ \neg p(g(b, a)), \neg q(b) \} \in E'(F)$, a 3. klóz $[x/a]$ után
- $\{ \neg p(f(a)), \neg p(g(b, a)) \}$ Res 1, 2
- $\{ p(f(a)) \} \in E'(F)$, a 2. klóz $[y/f(a)]$ után
- $\{ \neg p(g(b, a)) \}$ Res 3, 4
- $\{ p(g(b, a)) \} \in E'(F)$, a 2. klóz $[y/g(b, a)]$ után
- \square Res 5, 6

Így $E(F)$ kielégíthetetlen, ezért F is az.

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Az egyesítés: #169–#175, Elsőrendű rezolúció: #177–#182.

Feladatsorok

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus"
www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps

Csak a biztonság kedvéért ...

- ▶ predikátum szimbólumok: $p, q, r, P, Q, R \dots$
- ▶ változók: x, y, z, s, t, u, v, w
- ▶ konstanok (nulla változós függvényszimbólumok):
 a, b, c, d, e
- ▶ függvényszimbólumok: $f, g, h, i, j, k, l, m, n$

Minden predikátum szimbólumnak van egy rangja (más szóval aritása), ami nem más mint a változóinak a száma.

A **termek** definíciója:

- ▶ Minden változó term.
- ▶ Ha f függvényszimbólum, mely n változós és t_1, t_2, \dots, t_n termek, akkor $f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ is term.

A második pontban $n = 0$ esetén kapjuk, hogy minden konstans term.

Mindig csak változók helyére szabad helyettesíteni konstansok helyére nem!

Az egyesítési algoritmus dióhéjban

1. Meg kell keresni az egyesítendő (kettő vagy több) formulában a balról jobbra az **első olyan betűt, ahol nem egyeznek meg**. Ha ilyen nincs kész az egyesítés.
2. A formulákban ezen a pozíción legfeljebb egy fajta **f függvénszimbólum** fordulhat elő a többi helyen **változó** kell, hogy álljon, különben nem egyesíthetők.
3. Keressük egy olyan **t termet**, amely az eltérő pozíción az **f függvénszimbólummal kezdődik**, ha mindenütt változó áll, akkor t -nek vegyünk közülük egyet tetszőlegesen.
Pl. a $\neg P(g(x), f(g(x), c), g(g(x)))$ formulában f -fel az $f(g(x), c)$ term; c -vel maga a c konstans term kezdődik.
4. Ha t nem változó és a többi eltérő pozíció változójának csak egyike is szerepel t -ben, akkor nem egyesíthetők.
5. Különben az eltérő pozíciók változóinak **minden** előfordulását **minden** formulában helyettesítsük a t -vel. Majd ismételjük az algoritmust 1-től.

FZ2 V/1a

a) $F_1 = p(x, f(y), z),$

$$F_2 = p(g(a), f(w), u),$$

$$F_3 = p(v, f(b), c)$$

$$s_0 = [], s_1 = [x/g(a)] [v/g(a)]$$

$$F_1 s_1 = p(g(a), f(y), z)$$

$$F_2 s_1 = p(g(a), f(w), u)$$

$$F_3 s_1 = p(g(a), f(b), c)$$

$$s_2 = s_1 [y/b] [w/b]$$

$$F_1 s_2 = p(g(a), f(b), z)$$

$$F_2 s_2 = p(g(a), f(b), u)$$

$$F_3 s_2 = p(g(a), f(b), c)$$

$$s_3 = s_2 [z/c] [u/c] =$$

$$[x/g(a)] [v/g(a)] [y/b] [w/b] [z/c] [u/c]$$

$$\text{Ekkor } F_1 s_3 = F_2 s_3 = F_3 s_3 = p(g(a), f(b), c)$$

b) Hf. Megoldás: $s =$

$$[x/g(v)] [y/a] [w/f(v)] [v/b] \text{ vagy } [x/g(v)] [y/a] [w/f(b)] [v/b]$$

FZ2 V/2

Magyarázzuk meg miért nem egyesíthetőek a következő $\{F_1, F_2\}$ halmazok.

$$\begin{aligned} \text{a) } F_1 &= p(x, a) \\ F_2 &= p(\boxed{b}, c) \\ s_1 &:= [x/b] \end{aligned}$$

$$F_1 s_1 = p(b, a)$$

$$F_2 s_1 = p(b, c)$$

mivel itt **két különböző függvénszimbólum** van (a és c) ezért nem egyesíthetők! Csak változó helyére szabad helyettesíteni, konstans helyére nem!!!

$$\begin{aligned} \text{b) } F_1 &= p(f(x), x) \\ F_2 &= p(a, w) \end{aligned}$$

Ez sem egyesíthető, mert itt **két különböző függvénszimbólum** van (a és f).

FZ2 V/5

Alkalmazzuk az egyesítési algoritmust a következő halmazokra, és adjuk meg egy legáltalánosabb egyesítőt, ha létezik.

c) $\{ F_1, F_2 \}$, ahol

$$F_1 = p(x, g(x))$$

$$F_2 = p(y, y)$$

$$s_0 = []$$

$$s_1 = [y/x] \text{ (vagy } [x/y] \text{ is jó)}$$

mindkét formulában **minden** y helyére helyettesíteni kell!!!

$$F_1 s_1 = p(x, \boxed{g(x)})$$

$$F_2 s_1 = p(x, x)$$

x helyére olyan termet, $g(x)$ -et kellene helyettesíteni, amelyben x előfordul \Rightarrow nem egyesíthetők.

Az egyesítéssel kapott formula exponenciálisan hosszabb lehet az eredetieknél

$$F_1 = p(y, z, w)$$

$$F_2 = p(\boxed{g(x, x)}, g(y, y), g(z, z))$$

$$s_0 := [], \quad s_1 := s_0[y/g(x, x)]$$

$$F_1 s_1 = p(g(x, x), z, w)$$

$$F_2 s_1 = p(g(x, x), \boxed{g(g(x, x), g(x, x))}, g(z, z))$$

$$s_2 := s_1[z/g(g(x, x), g(x, x))]$$

$$F_1 s_2 = p(g(x, x), g(g(x, x), g(x, x)), w)$$

$$F_2 s_2 = p(g(x, x), g(g(x, x), g(x, x)),$$

$$\boxed{g(g(g(x, x), g(x, x)), g(g(x, x), g(x, x)))})$$

$$s_3 := s_2[w/g(g(g(x, x), g(x, x)), g(g(x, x), g(x, x)))]$$

Házi feladat

HF1

Hajtsa végre az egyesítési algoritmust az alábbi halmazokon!
Az algoritmus szerint döntse el, hogy egyesíthetők-e a megadott halmazok (külön-külön!) És ha igen, adjon is meg egy legáltalánosabb egyesítőt és az egyesítés utáni formulát!

- a) $\{ Q(f(x, g(x, a)), z), Q(y, z), Q(f(b, w), z) \}$
- b) $\{ \neg P(f(h(x), g(x, a))), Q(f(z, g(f(y, y), z))) \}$
- c) $\{ \neg P(f(h(x), g(x, a))), \neg P(f(z, g(f(y, y), z))) \}$

És még: **FZ2 V/5 a,b, 6, 7**

Az elsőrendű rezolúció rezolvens képzése

A C_1 és C_2 elsőrendű klózoknak a következőképpen képezhetjük az R rezolvenseit.

1. Ha C_1 -ben és C_2 -ben van közös változó, akkor alkalmazzunk olyan s_1 és s_2 változó átnevezéseket, hogy $C_1 s_1$ -ben és $C_2 s_2$ -ben már **ne legyenek közös változók**.
2. Válasszunk olyan

$l_1, l_2, \dots, l_m, m \geq 1$ literálokat $C_1 s_1$ -ből és
 $l'_1, l'_2, \dots, l'_n, n \geq 1$ literálokat $C_2 s_2$ -ből, hogy az

$$\{l_1, l_2, \dots, l_m, \bar{l}'_1, \bar{l}'_2, \dots, \bar{l}'_n\}$$

literálhalmaz **egyesíthető legyen**. Ha ez sikerült, az (egyik) legáltalánosabb egyesítő legyen s . Ekkor nyilván $\{l_1, l_2, \dots, l_m\} s = \{l_*\}$ és $\{l'_1, l'_2, \dots, l'_n\} s = \{\bar{l}'_*\}$ valamely l_* literálra.

3. Végül

$$R := [(C_1 s_1 - \{l_1, \dots, l_m\}) \cup (C_2 s_2 - \{l'_1, \dots, l'_n\})] s$$

C_1 és C_2 -nek **egy rezolvense**.

Elsőrendű rezolvensképzésre példa

FZ2 V/11 Képeztük az alábbi klózik **összes** lehetséges rezolvensét!

b) $C_1 = \{p(x, x), \neg r(x, f(x))\}$ és $C_2 = \{r(x, y), q(y, z)\}$ **c) HF!**

Az aláhúzott x-et át kell nevezni, mert a másik klózikban is szerepel (nevezzük át u-ra) azaz $s_1 := []$ és $s_2 := [x/u]$.

$C_1 s_1 = \{p(x, x), \neg r(x, f(x))\}$ és $C_2 s_2 := \{r(u, y), q(y, z)\}$.

Most $l_1 := \neg r(x, f(x))$ és $\bar{l}'_1 := \neg r(u, y)$ egyesíthetők:

$s = [x/u] [y/f(u)]$ -val: $\{l_1, \bar{l}'_1\} s = \{\neg r(u, f(u))\}$. Ezért

$$\begin{aligned} R &:= [(C_1 s_1 - \{l_1\}) \cup C_2 s_2 - \{\bar{l}'_1\}] s = \\ &= [\{p(x, x)\} \cup \{q(y, z)\}] s = \{p(u, u), q(f(u), z)\}. \end{aligned}$$

Megj. Kényelmesebb R -et a $C_1 s_1 s = \{p(u, u), \neg r(u, f(u))\}$ és $C_2 s_2 s = \{r(u, f(u)), q(f(u), z)\}$ klózikból az ellentétes (piros) literálok kiejtésével származtatni.

Az a) rész megoldása

a) $C_1 = \{p(x, y), p(y, z)\}$ és $C_2 = \{\neg p(u, f(u))\}$.

Változót átnevezni nem kell $s_1 := s_2 := []$.

α) $p(x, y)$ és $p(u, f(u))$ egyesíthető:

Az egyesítési algoritmus szerint: $s' = [u/x]$

$\Rightarrow p(x, y)$ és $p(x, f(x))$ majd $s = s' [y/f(x)]$ -szel

\Rightarrow mindkettő: $p(x, f(x))$ lesz.

Ezért $s = [u/x][y/f(x)]$ egy (legáltalánosabb) egyesítő.

$C_1 s_1 s = \{p(x, y), p(y, z)\} s = \{p(x, f(x)), p(f(x), z)\}$, és

$C_2 s_2 s = \{\neg p(u, f(u))\} s = \{\neg p(x, f(x))\}$, ezért

$R_1 = \{p(f(x), z)\}$ egy rezolvens.

β) De a $C_1 = \{p(x, y), p(y, z)\}$ és $C_2 = \{\neg p(u, f(u))\}$ klózokból

$p(y, z)$ és $p(u, f(u))$ is egyesíthető:

$s = [y/u][z/f(u)]$ -val

$\Rightarrow C_1 s_1 s = \{p(x, u), p(u, f(u))\}$, $C_2 s_2 s = \{\neg p(u, f(u))\}$

Így $R_2 = \{p(x, u)\}$ is rezolvens.

γ) Viszont mindhárom literál, azaz $\{p(x, y), p(y, z), p(u, f(u))\}$

egyszerre nem egyesíthető (HF!), így \square nem lesz rezolvens!

Házi feladat

Képezzük az alábbi klózok összes rezolvenségét!

a) $C_1 = \{ p(x, f(x), z), p(u, w, w) \}$, és

$$C_2 = \{ \neg p(x, y, z), \neg p(z, z, z) \};$$

b) $C_1 = \{ p(z, f(z)), p(z, a) \}$ és

$$C_2 = \{ \neg p(z, a), \neg p(z, x), \neg p(x, z) \}. \text{ (Hosszú!)}$$

Lustábbaknak: Csak azokat a rezolvenseket írjuk le, ahol az $\{l_1, \dots, l_m\}$ illetve az $\{l'_1, \dots, l'_n\}$ literálhalmazok tovább nem bővíthetők úgy, hogy még egyesíthető halmazt kapjunk.