Logika és informatikai alkalmazásai

9. gyakorlat

Németh L. Zoltán

http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth

SZTE, Informatikai Tanszékcsoport

2009 tavasz

Egy HF múlt hétről

Írjuk fel a következő formulák, illetve formula halmazok Herbrand kiterjesztését, majd vizsgáljuk annak kielégíthetőségét alaprezolúcióval. Természetesen, ha szükséges, akkor előbb végezzük el a Skolemizációt.

f) $F =$
$\forall x \forall y[(\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y)) \wedge p(y) \wedge (\neg p(g(b,x)) \vee \neg q(b))]$

$$Fgv = \{\, a, b, f(.), g(.,.)\,\}$$

$$T_0 = \{a, b, f(a), f(b), f(f(a)), f(f(b)), \ldots, g(a,a), \ldots, g(f(a), g(b, f(b))), \ldots\}$$

$E(F) = \{$

$(\neg p(\boxed{a}) \vee \neg p(f(a)) \vee q(\boxed{a})) \wedge p(\boxed{a}) \wedge (\neg p(g(b, \boxed{a})) \vee \neg q(b)),$

$(\neg p(\boxed{a}) \vee \neg p(f(a)) \vee q(\boxed{b})) \wedge p(\boxed{b}) \wedge (\neg p(g(b, \boxed{a})) \vee \neg q(b)), \ldots,$

$(\neg p(\boxed{f(a)}) \vee \neg p(f(a)) \vee q(\boxed{b})) \wedge p(\boxed{b}) \wedge (\neg p(g(b, \boxed{f(a)})) \vee \neg q(b)), \ldots, \}$

HF folytatás

$E'(F)$ legyen $E(F)$ klózainak a halmaza, másképpen ami F^* klózaiból keletkezik alaphelyettesítéssel:

$$F^* = \underbrace{(\neg p(x) \vee \neg p(f(a)) \vee q(y))} \wedge \underbrace{p(y)} \wedge \underbrace{(\neg p(g(b,x)) \vee \neg q(b))}$$

Alaprezolúcuióval (csak **egy** lehetséges megoldás):

1. $\{\neg p(f(a)),\ q(b)\}$ $\in E'(F)$, az 1. klóz $[x/f(a)][y/b]$ után
2. $\{\neg p(g(b,a)),\ \neg q(b)\}$ $\in E'(F)$, a 3. klóz $[x/a]$ után
3. $\{\neg p(f(a)),\ \neg p(g(b,a))\}$ $\mathrm{Res}\, 1, 2$
4. $\{p(f(a))\}$ $\in E'(F)$, a 2. klóz $[y/f(a)]$ után
5. $\{\neg p(g(b,a))\}$ $\mathrm{Res}\, 3, 4$
6. $\{p(g(b,a))\}$ $\in E'(F)$, a 2. klóz $[y/g(b,a)]$ után
7. $\Box$ $\mathrm{Res}\, 5, 6$

Így $E(F)$ kielégíthetetlen, ezért F is az.

Irodalom

Szükséges elmélet a mai gyakorlathoz

Előadás fóliák: Az egyesítés: #169–#175, Elsőrendű rezolúció: #177–#182.

Feladatsorok

FZ2 Fülöp Zoltán: Gyakorló feladatok a "Logika a számítástudományban" tárgyhoz II. "Predikátumkalkulus" `www.inf.u-szeged.hu/~fulop/logika/feladat2.ps`

Csak a biztonság kedvéért ...

- predikátum szimbólumok: $p, q, r, P, Q, R \ldots$
- változók: x, y, z, s, t, u, v, w
- konstanok (nulla változós függvényszimbólumok): a, b, c, d, e
- függvényszimbólumok: $f, g, h, i, j, k, l, m, n$

Minden predikátum szimbólumnak van egy rangja (más szóval aritása), ami nem más mint a változóinak a száma.
A **termek** definíciója:

- Minden változó term.
- Ha f függvényszimbólum, mely n változós és $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termek, akkor $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ is term.

A második pontban $n = 0$ esetén kapjuk, hogy minden konstans term.
Mindig csak változók helyére szabad helyettesíteni konstansok helyére nem!

Az egyesítési algoritmus dióhéjban

1. Meg kell keresni az egyesítendő (kettő vagy több) formulában a balról jobbra az **első olyan betűt, ahol nem egyeznek meg**. Ha ilyen nincs kész az egyesítés.
2. A formulákban ezen a pozíción legfeljebb egy fajta f **függvényszimbólum** fordulhat elő a többi helyen **változó** kell, hogy álljon, különben nem egyesíthetők.
3. Keressük egy olyan t **termet**, amely az eltérő pozíción az f **függvényszimbólummal kezdődik**, ha mindenütt változó áll, akkor t-nek vegyünk közülük egyet tetszőlegesen.
   Pl. a $\neg P(g(x), f(g(x), c), g(g(x)))$ formulában f-fel az $f(g(x), c)$ term; c-vel maga a c konstans term kezdődik.
4. Ha t nem változó és a többi eltérő pozíció változójának csak egyike is szerepel t-ben, akkor nem egyesíthetők.
5. Különben az eltérő pozíciók változóinak minden előfordulását minden formulában helyettesítsük a t-vel. Majd ismételjük az algoritmust 1-től.

FZ2 V/1a

a) $F_1 = p(x, f(y), z)$,
$F_2 = p(\boxed{g(a)}, f(w), u)$,
$F_3 = p(v, f(b), c)$
$s_0 = [\,]$, $s_1 = [x/g(a)]\,[v/g(a)]$
$F_1 s_1 = p(g(a), f(y), z)$
$F_2 s_1 = p(g(a), f(w), u)$
$F_3 s_1 = p(g(a), f(\boxed{b}), c)$
$s_2 = s_1\,[y/b]\,[w/b]$
$F_1 s_2 = p(g(a), f(b), z)$
$F_2 s_2 = p(g(a), f(b), u)$
$F_3 s_2 = p(g(a), f(b), \boxed{c})$
$s_3 = s_2\,[z/c]\,[u/c] =$
$[x/g(a)]\,[v/g(a)]\,[y/b]\,[w/b]\,[z/c]\,[u/c]$
Ekkor $F_1 s_3 = F_2 s_3 = F_3 s_3 = p(g(a), f(b), c)$

b) Hf. Megoldás: $s =$
$[x/g(v)]\,[y/a]\,[w/f(v)]\,[v/b]$ vagy $[x/g(v)]\,[y/a]\,[w/f(b)]\,[v/b]$

FZ2 V/2

Magyarázzuk meg miért nem egyesíthetőek a következő $\{F_1, F_2\}$ halmazok.

a) $F_1 = p(x, a)$
$F_2 = p(\boxed{b}, c)$
$s_1 := [x/b]$

$F_1 s_1 = p(b, a)$
$F_2 s_1 = p(b, c)$
mivel itt **két különböző függvényszimbólum** van (a és c) ezért nem egyesíthetők! Csak változó helyére szabad helyettesíteni, konstans helyére nem!!!

b) $F_1 = p(f(x), x)$
$F_2 = p(a, w)$
Ez sem egyesíthető, mert itt **két különböző függvényszimbólum** van (a és f).

FZ2 V/5

Alkalmazzuk az egyesítési algoritmust a következő halmazokra, és adjuk meg egy legáltalánosabb egyesítőt, ha létezik.

c) $\{ F_1, F_2 \}$, ahol

$$F_1 = p(x, g(x))$$
$$F_2 = p(y, y)$$

$$s_0 = [\,]$$

$s_1 = [y/x]$ (vagy $[x/y]$ is jó)
mindkét formulában minden y helyére helyettesíteni kell!!!

$$F_1 s_1 = p(x, \boxed{g(x)})$$
$$F_2 s_1 = p(x, x)$$

x helyére olyan termet, $g(x)$-et kellene helyettesíteni, amelyben x előfordul $\Rightarrow$ nem egyesíthetők.

Az egyesítéssel kapott formula exponenciálisan hosszabb lehet az eredetieknél

$$F_1 = p(y, z, w)$$
$$F_2 = p(\boxed{g(x, x)}, g(y, y), g(z, z))$$
$$s_0 := [], \qquad s_1 := s_0[y/g(x, x)]$$

$$F_1 s_1 = p(g(x, x), z, w)$$
$$F_2 s_1 = p(g(x, x), \boxed{g(g(x, x), g(x, x))}, g(z, z))$$
$$s_2 := s_1[z/g(g(x, x), g(x, x))]$$

$$F_1 s_2 = p(g(x, x), g(g(x, x), g(x, x)), w)$$
$$F_2 s_s = p(g(x, x), g(g(x, x), g(x, x)),$$
$$\boxed{g(g(g(x, x), g(x, x)), g(g(x, x), g(x, x)))})$$
$$s_3 := s_2[w/g(g(g(x, x), g(x, x)), g(g(x, x), g(x, x)))]$$

Házi feladat

HF1

Hajtsa végre az egyesítési algoritmust az alábbi halmazokon! Az algoritmus szerint döntse el, hogy egyesíthetők-e a megadott halmazok (külön-külön!) És ha igen, adjon is meg egy legáltalánosabb egyesítőt és az egyesítés utáni formulát!

a) $\{\, Q(f(x, g(x, a)), z), Q(y, z), Q(f(b, w), z) \,\}$

b) $\{\, \neg P(f(h(x), g(x, a))), Q(f(z, g(f(y, y), z))) \,\}$

c) $\{\, \neg P(f(h(x), g(x, a))), \neg P(f(z, g(f(y, y), z))) \,\}$

És még: **FZ2 V/5 a,b, 6, 7**

Az elsőrendű rezolúció rezolvens képzése

A C_1 és C_2 elsőrendű klózoknak a következőképpen képezhetjük az R rezolvenseit.

1. Ha C_1-ben és C_2-ben van közös változó, akkor alkalmazzunk olyan s_1 és s_2 változó átnevezéseket, hogy $C_1 s_1$-ben és $C_2 s_2$-ben már ne legyenek közös változók.
2. Válasszunk olyan $l_1, l_2, \ldots, l_m$, $m \geq 1$ literálokat $C_1 s_1$-ből és $l'_1, l'_2, \ldots, l'_n$, $n \geq 1$ literálokat $C_2 s_2$-ből, hogy az
$$\{\, l_1, l_2, \ldots, l_m, \bar{l}'_1, \bar{l}'_2, \ldots, \bar{l}'_n \,\}$$
literálhalmaz egyesíthető legyen. Ha ez sikerült, az (egyik) legáltalánosabb egyesítő legyen s. Ekkor nyilván $\{\, l_1, l_2, \ldots, l_m \,\}s = \{l_*\}$ és $\{\, l'_1, l'_2, \ldots, l'_m \,\}s = \{\bar{l}_*\}$ valamely l_* literálra.
3. Végül
$$R := [(C_1 s_1 - \{l_1, \ldots, l_m\}) \cup (C_2 s_2 - \{l'_1, \ldots, l'_n\})]s$$
C_1 és C_2-nek egy rezolvense.

Elsőrendű rezolvensképzésre példa

FZ2 V/11 Képettük az alábbi klózok **összes** lehetséges rezolvensét!

b) $C_1 = \{p(x,x), \neg r(x, f(x))\}$ és $C_2 = \{r(\underline{x}, y), q(y,z)\}$ **c) HF!**

Az aláhúzott x-et át kell nevezni, mert a másik klózban is szerepel (nevezzük át u-ra) azaz $s_1 := []$ és $s_2 := [x/u]$.

$C_1 s_1 = \{p(x,x), \neg r(x, f(x))\}$ és $C_2 s_2 := \{r(u,y), q(y,z)\}$.

Most $l_1 := \neg r(x, f(x))$ és $\bar{l}'_1 := \neg r(u,y)$ egyesíthetők:

$s = [x/u]\,[y/f(u)]$-val: $\{l_1, \bar{l}'_1\}s = \{\neg r(u, f(u))\}$. Ezért

$$\begin{aligned} R :=& [(C_1 s_1 - \{l_1\}) \cup C_2 s_2 - \{l'_1\}]s = \\ =& [\{p(x,x)\} \cup \{q(y,z)\}]s = \{p(u,u), q(f(u),z)\}. \end{aligned}$$

Megj. Kényelmesebb R-et a $C_1 s_1 s = \{p(u,u), \neg r(u, f(u))\}$ és $C_2 s_2 s = \{r(u, f(u)), q(f(u), z)\}$ klózokból az ellentétes (piros) literálok kiejtésével származtatni.

Az a) rész megoldása

a) $C_1 = \{p(x,y), p(y,z)\}$ és $C_2 = \{\neg p(u, f(u)\}$.
Változót átnevezni nem kell $s_1 := s_2 := []$.
α) $p(x,y)$ és $p(u, f(u))$ egyesíthető:
Az egyesítési algoritmus szerint: $s' = [u/x]$
$\Rightarrow p(x,y)$és $p(x, f(x))$ majd $s = s'\,[y/f(x)]$-szel
$\Rightarrow$ mindkettő: $p(x, f(x))$ lesz.
Ezért $s = [u/x][y/f(x)]$ egy (legáltalánosabb) egyesítő.
$C_1 s_1 s = \{p(x,y), p(y,z)\}s = \{p(x, f(x)), p(f(x), z)\}$, és
$C_2 s_2 s = \{\neg p(u, f(u)\}s = \{\neg p(x, f(x))\}$, ezért
$R_1 = \{p(f(x), z)\}$ egy rezolvens.

β) De a $C_1 = \{p(x,y), p(y,z)\}$ és $C_2 = \{\neg p(u, f(u))\}$ klózokból
$p(y,z)$ és $p(u, f(u))$ is egyesíthető:
$s = [y/u]\,[z/f(u)]$-val
$\Rightarrow C_1 s_1 s = \{p(x,u), p(u, f(u))\}, C_2 s_2 s = \{\neg p(u, f(u))\}$
Így $R_2 = \{p(x,u)\}$ is rezolvens.
γ) Viszont mindhárom literál, azaz $\{\, p(x,y), p(y,z), p(u, f(u))\,\}$ egyszerre nem egyesíthető (HF!), így $\Box$ nem lesz rezolvens!

Házi feladat

Képezzük az alábbi klózok összes rezolvensét!

a) $C_1 = \{\, p(x, f(x), z),\ p(u, w, w)\,\}$, és
   $C_2 = \{\, \neg p(x, y, z),\ \neg p(z, z, z)\,\}$;

b) $C_1 = \{\, p(z, f(z)),\ p(z, a)\,\}$ és
   $C_2 = \{\, \neg p(z, a),\ \neg p(z, x), \neg p(x, z)\,\}$. (Hosszú!)

Lustábbaknak: Csak azokat a rezolvenseket írjuk le, ahol az $\{l_1, \ldots, l_m\}$ illetve az $\{l'_1, \ldots, l'_n\}$ literálhalmazok tovább nem bővíthetőek úgy, hogy még egyesíthető halmazt kapjunk.