

Többdimenziós automaták

Németh L. Zoltán

<http://www.inf.u-szeged.hu/~zlnemeth>

SZTE, Számítástudomány Alapjai Tanszék

Doktori disszertáció véadás
2008. április 25.

Az előadás vázlata

- 1 A regularitás általános fogalmáról
- 2 Binoidok és biszavak
- 3 A tézis eredményei (véges és végtelen eset)
- 4 Megoldatlan problémák és további kutatási irányok

A regularitás általános fogalmáról

A regularitás általános fogalmáról

A reguláris (szó) nyelvek osztályának jellemzései:

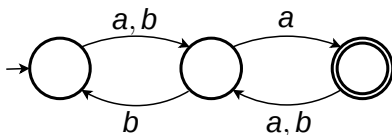
- **Reg: Regularitás** (regularity) = automatákkal való elfogadás
- **Rec: Felismerhetőség** (recognizability) = véges algebrák és homomorfizmusok vagy véges indexű kongruenciák segítségével történő algebrai felismerhetőség
- **Rat: Racionalitás** (rationality) = racionális (más néven reguláris) kifejezésekkel való kifejezhetőség
- **MSO: MSO-definiálhatóság** (MSO-definability) = másodrendű monadikus logikában (second-order monadic logic) való definiálhatóság

Szavak esetében (példa)

$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid w \text{ páros hosszú és } a\text{-ra végződik.}\}$

Rat: $[(a + b)(a + b)]^*(a + b)a$

Reg:



Rec:

$\cdot$	O_a	O_b	E_a	E_b
O_a	E_a	E_b	O_a	O_b
O_b	E_a	E_b	O_a	O_b
E_a	O_a	O_b	E_a	E_b
E_b	O_a	O_b	E_a	E_b

$\varphi : a \mapsto O_a, b \mapsto O_b, F = \{E_a\}$
esetén $L = \varphi^{-1}(F)$.

MSO:

$$\varphi = \exists x (\text{Last}(x) \wedge Q_a(x)) \wedge \exists X [\forall x (\text{First}(x) \rightarrow X(x)) \wedge \forall x (\text{Last}(x) \rightarrow \neg X(x)) \wedge \forall x \forall y (y = x + 1 \rightarrow (X(x) \leftrightarrow \neg X(y)))]$$

Klasszikus és korábbi eredmények

Klasszikus és korábbi eredmények

Tétel (Kleene, Myhill, Nerode, Büchi)

Mind véges, mind végtelen szavak nyelveire a
 $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{Rat} = \text{MSO}$ egyenlőségek teljesülnek.

Klasszikus és korábbi eredmények

Tétel (Kleene, Myhill, Nerode, Büchi)

Mind véges, mind végtelen szavak nyelveire a
 $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{Rat} = \text{MSO}$ egyenlőségek teljesülnek.

Célunk ezen eredmények általánosítása **magasabb dimenziószámra**.

Tétel (Kleene, Myhill, Nerode, Büchi)

Mind véges, mind végtelen szavak nyelveire a
 $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{Rat} = \text{MSO}$ egyenlőségek teljesülnek.

Célunk ezen eredmények általánosítása **magasabb dimenziószámra**.

(Részben) hasonló eredmények ismertek más, szavaknál komplexebb struktúrák nyelveire:

- fákra
- nyomokra (traces)
- részben-rendezett halmazokra (posets)
- üzenet idősor diagrammokra (message sequence charts)
- bizonyos gráfokra, stb ...

Részletesen lásd **[Weil04]**-ben.

Binoidok és biszavak

Binoidok és biszavak

A biszavak a szabad binoidok elemei

Binoidnak nevezünk egy olyan algebrát, amelyen **2** asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a két művelet közös egységelemmel rendelkezik. A két művelet:

- a **horizontális szorzás**
- a **vertikális szorzás**

Binoidok és biszavak

A biszavak a szabad binoidok elemei

Binoidnak nevezünk egy olyan algebrát, amelyen **2** asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a két művelet közös egységelemmel rendelkezik. A két művelet:

- : a **horizontális szorzás**
- : a **vertikális szorzás**

Legyen Σ egy ábécé. A Σ feletti **szabad binoidot** $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ fogja jelölni. A továbbiakban $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ elemeit **biszavaknak** (biwords), részhalmazait **binoid nyelveknek** fogjuk hívni.

A biszavak a szabad binoidok elemei

Binoidnak nevezünk egy olyan algebrát, amelyen **2** asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a két művelet közös egységelemmel rendelkezik. A két művelet:

- : a **horizontális szorzás**
- : a **vertikális szorzás**

Legyen Σ egy ábécé. A Σ feletti **szabad binoidot** $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ fogja jelölni. A továbbiakban $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ elemeit **biszavaknak** (biwords), részhalmazait **binoid nyelveknek** fogjuk hívni.

- az **üres biszó**: λ ,

A biszavak a szabad binoidok elemei

Binoidnak nevezünk egy olyan algebrát, amelyen **2** asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a két művelet közös egységelemmel rendelkezik. A két művelet:

- : a **horizontális szorzás**
- : a **vertikális szorzás**

Legyen Σ egy ábécé. A Σ feletti **szabad binoidot** $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ fogja jelölni. A továbbiakban $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ elemeit **biszavaknak** (biwords), részalmazait **binoid nyelveknek** fogjuk hívni.

- az **üres biszó**: λ ,
- az **egybetűs** (singleton) **biszavak**: σ , ($\sigma \in \Sigma$, vagyis a generátorok)

A biszavak a szabad binoidok elemei

Binoidnak nevezünk egy olyan algebrát, amelyen **2** asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a két művelet közös egységelemmel rendelkezik. A két művelet:

- : a **horizontális szorzás**
- : a **vertikális szorzás**

Legyen Σ egy ábécé. A Σ feletti **szabad binoidot** $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ fogja jelölni. A továbbiakban $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ elemeit **biszavaknak** (biwords), részhalmazait **binoid nyelveknek** fogjuk hívni.

- az **üres biszó**: λ ,
- az **egybetűs** (singleton) **biszavak**: σ , ($\sigma \in \Sigma$, vagyis a generátorok)
- a **horizontális biszavak**: a $w_1 \bullet w_2$ alakúak,

A biszavak a szabad binoidok elemei

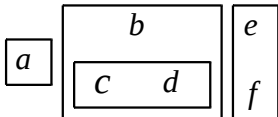
Binoidnak nevezünk egy olyan algebrát, amelyen **2** asszociatív művelet van értelmezve, továbbá a két művelet közös egységelemmel rendelkezik. A két művelet:

- : a **horizontális szorzás**
- : a **vertikális szorzás**

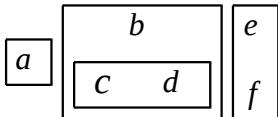
Legyen Σ egy ábécé. A Σ feletti **szabad binoidot** $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ fogja jelölni. A továbbiakban $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ elemeit **biszavaknak** (biwords), részhalmazait **binoid nyelveknek** fogjuk hívni.

- az **üres biszó**: λ ,
- az **egybetűs** (singleton) **biszavak**: σ , ($\sigma \in \Sigma$, vagyis a generátorok)
- a **horizontális biszavak**: a $w_1 \bullet w_2$ alakúak,
- a **vertikális biszavak**: a $w_1 \circ w_2$ alakúak, ahol $w_1, w_2 \in \Sigma^*(\bullet, \circ)$.

- **kétdimenziós szavak:**



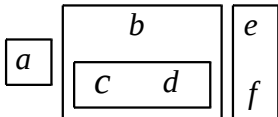
- kétdimenziós szavak:



- termék:

$$a \bullet \langle b \circ \langle c \bullet d \rangle \rangle \bullet \langle e \circ f \rangle$$

- kétdimenziós szavak:



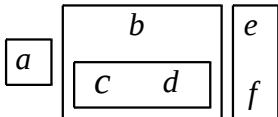
- termék:

$$a \bullet \langle b \circ \langle c \bullet d \rangle \rangle \bullet \langle e \circ f \rangle$$

- ctermek:

$$\bullet a \langle b \langle cd \rangle \rangle \langle ef \rangle$$

- kétdimenziós szavak:



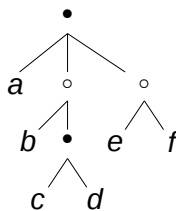
- termék:

$$a \bullet \langle b \circ \langle c \bullet d \rangle \rangle \bullet \langle e \circ f \rangle$$

- ctermek:

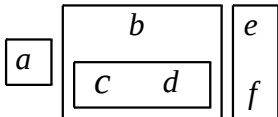
$$\bullet a \langle b \langle cd \rangle \rangle \langle ef \rangle$$

- véges rendezett nemrangolt fák:



Biszavak reprezentációi

- kétdimenziós szavak:



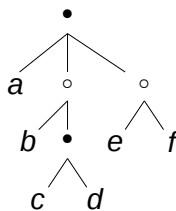
- termék:

$$a \bullet \langle b \circ \langle c \bullet d \rangle \rangle \bullet \langle e \circ f \rangle$$

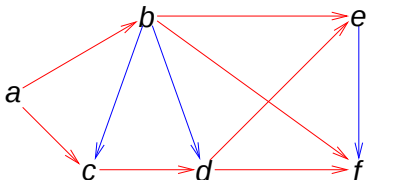
- ctermek:

$$\bullet a \langle b \langle cd \rangle \rangle \langle ef \rangle$$

- véges rendezett nemrangolt fák:



- soros-párhuzamos biposetek:



Zárójelező automaták (Parenthesizing automata)

Zárójelező automaták (Parenthesizing automata)

Definíció

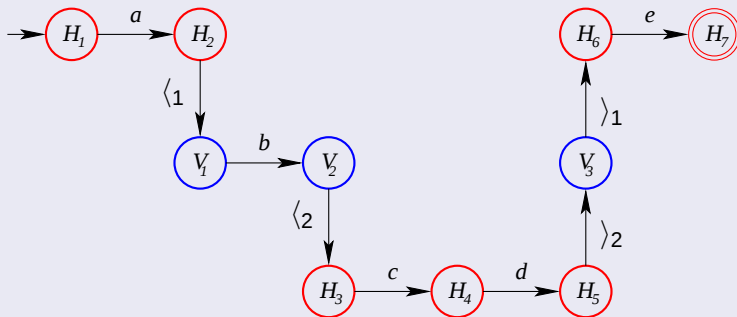
(Nemdeterminisztikus) **zárójelező automatának** hívunk egy $\mathcal{A} = (S, H, V, \Sigma, \Omega, \delta, \gamma, I, F)$, rendszert, ahol

- S az **állapotok** véges nemüres halmaza
- H és V a **horizontális** és **vertikális állapotok** halmaza, melyek diszjunkt uniója S ,
- Σ az **input ábécé**,
- Ω a **zárójelek** egy (véges) halmaza,
- $\delta \subseteq (H \times \Sigma \times H) \cup (V \times \Sigma \times V)$ a **címkező átmenet reláció**,
- $\gamma \subseteq (H \times \Omega \times V) \cup (V \times \Omega \times H)$ a **zárójelező átmenet reláció**,
- $I, F \subseteq S$ a **kezdő-** és **végállapotok** halmaza.

Példák zárójelező automatákra I.

Példák zárójelező automatákra I.

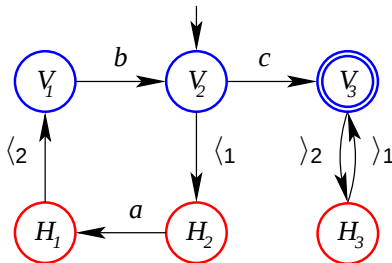
Egy zárójelező automata



Ez az automata a következő nyelvet fogadja el:

$$L = \{a \cdot \langle b \circ \langle c \cdot d \rangle \rangle \cdot e\}$$

Példák zárójelező automatákra II.



- Ez az automata az alábbi nyelvet fogadja el:

$$L = \{c, a \bullet \langle b \circ c \rangle, a \bullet \langle b \circ \langle a \bullet \langle b \circ c \rangle \rangle, \dots\}$$

- Ez a nyelv a

$$X = \{a\} \bullet (\{b\} \circ X) \cup \{c\}$$

fixpont egyenlet legkisebb megoldása.

Regularitás, felismerhetőség, logikai definiálhatóság

Reg

Egy $L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ binoid nyelv **reguláris**, ha van olyan zárójelező automata, amelyik elfogadja. Jelölje **Reg** a reguláris nyelvek osztályát, az összes ábécét figyelembe véve.

Reg

Egy $L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ binoid nyelv **reguláris**, ha van olyan zárójelező automata, amelyik elfogadja. Jelölje **Reg** a reguláris nyelvek osztályát, az összes ábécét figyelembe véve.

Rec

$L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ **felismerhető** (recognizable), amennyiben $L = \varphi^{-1}(F)$, valamely $\varphi : \Sigma^*(\bullet, \circ) \rightarrow B$ binoid homomorfizmusra, B **véges** binoidra és annak egy $F \subseteq B$ részhalmazára. Legyen **Rec** a felismerhető binoid nyelvek osztálya.

Regularitás, felismerhetőség, logikai definiálhatóság

Reg

Egy $L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ binoid nyelv **reguláris**, ha van olyan zárójelező automata, amelyik elfogadja. Jelölje **Reg** a reguláris nyelvek osztályát, az összes ábécét figyelembe véve.

Rec

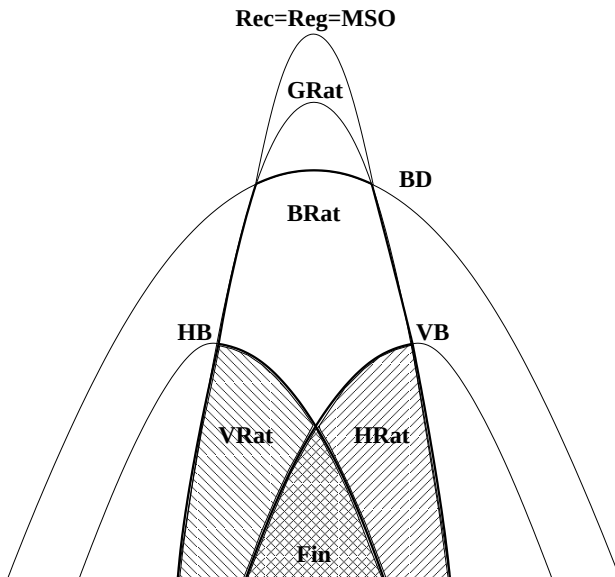
$L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ **felismerhető** (recognizable), amennyiben $L = \varphi^{-1}(F)$, valamely $\varphi : \Sigma^*(\bullet, \circ) \rightarrow B$ binoid homomorfizmusra, B **véges** binoidra és annak egy $F \subseteq B$ részhalmazára. Legyen **Rec** a felismerhető binoid nyelvek osztálya.

MSO

Az **monadikus másodrendű** (MSO) **logikában való definiálhatóság** a biszavak sp-biposet reprezentációját használva a szokásos módon adható meg. A nyelvosztályt jelölje: **MSO**.

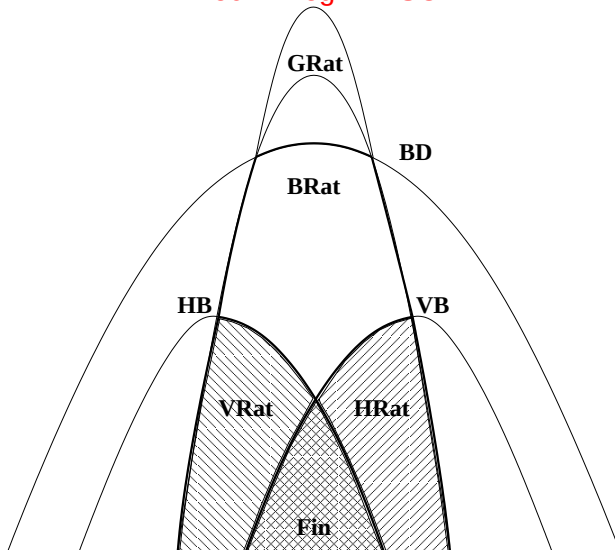
► Bővebben

A véges binoid nyelvek osztályainak összehasonlítása

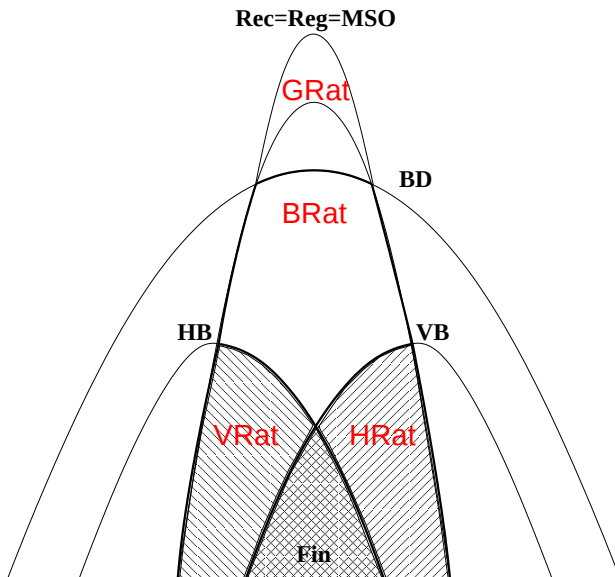


A véges binoid nyelvek osztályainak összehasonlítása

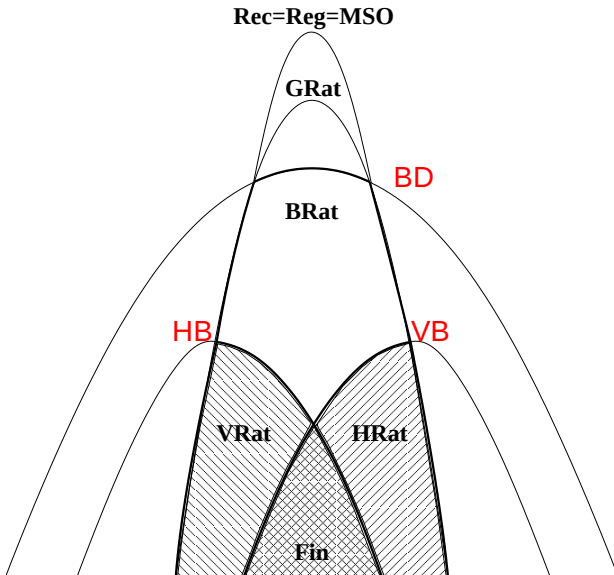
$$\text{Rec} = \text{Reg} = \text{MSO}$$



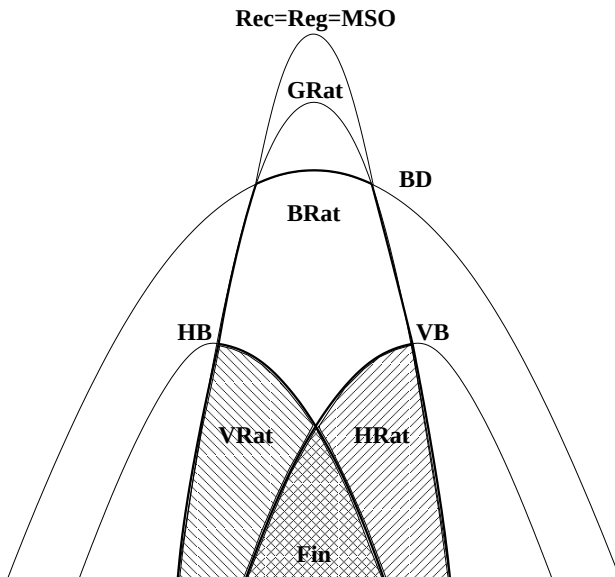
A véges binoid nyelvek osztályainak összehasonlítása



A véges binoid nyelvek osztályainak összehasonlítása



A véges binoid nyelvek osztályainak összehasonlítása



Reg_i definíciója

Jelölje **Reg_i** a reguláris nyelveknek azt a részosztályát, amelyek elfogadhatók **legfeljebb i zárójelpárral** rendelkező automatával ($i \geq 0$).

Reg_i definíciója

Jelölje **Reg_i** a reguláris nyelveknek azt a részosztályát, amelyek elfogadhatók **legfeljebb i zárójelpárral** rendelkező automatával ($i \geq 0$).

9. Tétel [Ném04]

A Reg_i osztályok a reguláris (azaz a felismerhető) nyelveken belül szigorú hierarchiát alkotnak, vagyis

$$\text{Reg}_0 \subsetneq \text{Reg}_1 \subsetneq \text{Reg}_2 \subsetneq \dots$$

Reg_i definíciója

Jelölje **Reg_i** a reguláris nyelveknek azt a részosztályát, amelyek elfogadhatók **legfeljebb i zárójelpárral** rendelkező automatával ($i \geq 0$).

9. Tétel [Ném04]

A Reg_i osztályok a reguláris (azaz a felismerhető) nyelveken belül szigorú hierarchiát alkotnak, vagyis

$$\text{Reg}_0 \subsetneq \text{Reg}_1 \subsetneq \text{Reg}_2 \subsetneq \dots$$

10. Következmény [Ném04]

A fenti szigorú hierarchia minden konkrét Σ esetén a Σ feletti reguláris nyelvekre osztályaira is fennáll.

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):
szorzás (konkatenáció)

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

hor./vert. szorzás

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

hor./vert. szorzás $\rightarrow$ horizontális/vertikális ω -szorzás

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

hor./vert. szorzás $\rightarrow$ horizontális/vertikális ω -szorzás

bifélcsoport

Végtelen biszavak és ω -binoid nyelvek

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

hor./vert. szorzás $\rightarrow$ horizontális/vertikális ω -szorzás

bifélcsoport $\rightarrow$ ω -bifélcsoport

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

hor./vert. szorzás $\rightarrow$ horizontális/vertikális ω -szorzás

bifélcsoport $\rightarrow$ ω -bifélcsoport

A felismerhetőség (**Rec** $^\omega$) és az MSO-definiálhatóság (**MSO** $^\omega$) közvetlenül általánosítható, a regularitáshoz (**Reg** $^\omega$) be kell vezetnünk a zárójelező Büchi-automata fogalmát.

A végtelen szavak általánosítása

Végtelen szavak (Perrin-Pin):

szorzás (konkatenáció) $\rightarrow$ ω -szorzás

félcsoport $\rightarrow$ ω -félcsoport

Nálunk:

hor./vert. szorzás $\rightarrow$ horizontális/vertikális ω -szorzás

bifélcsoport $\rightarrow$ ω -bifélcsoport

A felismerhetőség (Rec^ω) és az MSO-definiálhatóság (MSO^ω) közvetlenül általánosítható, a regularitáshoz (Reg^ω) be kell vezetnünk a zárójelező Büchi-automata fogalmát.

11. Tétel [Ném06]

Legyen L egy ω -binoid nyelv. Ebben az esetben L akkor és csak akkor ismerhető fel, ha L reguláris, ami akkor és csak akkor teljesül, ha az L nyelv MSO-definiálható, azaz

$$\text{Reg}^\omega = \text{Rec}^\omega = \text{MSO}^\omega.$$

Amiről szívesen beszéltem volna még ...

- Sp-biposet reprezentáció és MSO-definiálhatóság
- A zárójelező automaták működése
- Kapcsolódó irodalom
- Néhány további ereredmény
- További kutatási irányok és megoldatlan problémák

[▶ Itt](#)[▶ Itt](#)[▶ Itt](#)[▶ Itt](#)[▶ Itt](#)

Szorosabban kapcsolódó irodalom

Z. Ésik	:	(m,n)-struktúrák
K. Lodaya and P. Weil	:	Soros-párhuzamos posetek Algebrák asszociatív művelettel
D. Kuske	:	Végtelen sp-posetek, logika
A. Ehrenfeucht and G. Rozenberg	:	2-struktúrák (2-structures)
H. Hoogeboom and P. ten Pas	:	Text nyelvek
D. Giammarresi, A. Restivo	:	
I. Dolinka	:	Képnnyelvek (picture languages)
R. Alur, P. Madhusudan et al:	:	Átlátható veremautomaták (visibly pushdown aut.)
D. Perrin, J-E. Pin and Th. Wilke	:	Végtelen (szó) nyelvek
M. Bojańczyk and I. Walukiewicz	:	Forest algebrák
K. Hashiguchi et al.	:	Binoid nyelvek

◀ Vissza

- [ÉN04] Z. ÉSIK AND Z. L. NÉMETH, Higher dimensional automata. *J. of Autom. Lang. Comb.* **9** (2004), 3–29.
- [ÉN05] Z. ÉSIK AND Z. L. NÉMETH, Algebraic and graph-theoretic properties of infinite n -posets. *Theoret. Informatics Appl.* **39** (2005), 305–322.
- [GN08] ZS. GAZDAG AND Z. L. NÉMETH, A Kleene Theorem for Binoid Languages. To appear in: proc. *AFL'08*.
- [Ném04] Z. L. NÉMETH, A hierarchy theorem for regular languages over free bisemigroups. *Acta Cybern.* **16** (2004), 567–577.
- [Ném06] Z. L. NÉMETH, Automata on infinite biposets. *Acta Cybern.* **18** (2006), 765–797.
- [Ném07] Z. L. NÉMETH, On the regularity of binoid languages: a comparative approach. In: preproc. *1st Int. Conf. on Language and Automata Theory and Appl., LATA'07*, March 29 – April 4, 2007, Tarragona, Spain.



M. Bojańczyk and I. Walukiewicz.

Forest algebra.

Automata and Logic: History and Perspectives. Collected papers for Wolfgang Thomas' 60th birthday,

<http://www.mimuw.edu.pl/~bojan/papers/forest.pdf>



[Dol05] I. Dolinka.

A note on identities of two-dimensional languages.

Disc. Appl. Math., 146(2005), 43–50.



[Dol07] I. Dolinka.

Axiomatizing the identities of binoid languages. *Theoret. Comp. Sci.*, 372(2007), 1–14.



[ER93] A. Ehrenfeucht and G. Rozenberg.

T-structures, T-functions and texts.

Theoret. Comput. Sci., 116(1993), 227–290.



[GR97] D. Giammarresi and A. Restivo.

Two-dimensional languages. In: *Handbook of Formal Languages*, Vol. 3, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 215–267.



[Har78] M. A. Harrison.

Introduction to formal language theory.

Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., 1978.



[HHJ03] K. Hashiguchi, K. Hashimoto, S. Jimbo.

Modified RSA cryptosystems over bicodes.

Advances in algebra, World. Sci. Publ., NJ, 2003, 377–389.



[HIJ00] K. Hashiguchi, S. Ichihara and S. Jimbo.

Formal languages over free binoids.

J. Autom. Lang. Comb., 5(2000), 219–234.



[HKJ02] K. Hashiguchi, T. Kunai, S. Jimbo.

Finite Codes over Free Binoids.

J. Autom. Lang. Comb., 7(2002), 505–518.

Irodalomjegyzék III



[HWJ03] K. Hashiguchi, Y. Wada and S. Jimbo.

Regular binoid expressions and regular binoid languages.

Theoret. Comput. Sci., 304(2003), 291–313.



[HSJ04] K. Hashiguchi, Y. Sakakibara and S. Jimbo.

Equivalence of regular binoid expressions and regular expressions denoting binoid languages over free binoids.

Theoret. Comput. Sci., 312(2004), 251–266.



[HtP97] H. J. Hoogeboom and P. ten Pas.

Monadic second-order definable text languages.

Theory Comput. Syst., 30(1997), 335–354.



[Kus03] D. Kuske.

Towards a language theory for infinite N-free pomsets.

Theoret. Comput. Sci., 299(2003), 347–386.



[LW98] K. Lodaya and P. Weil.

Kleene iteration for parallelism.

In: proc. *FST & TCS'98*, LNCS 1530, Springer-Verlag, 1998, 355–366.



[LW00] K. Lodaya and P. Weil.

Series-parallel languages and the bounded-width property.

Theoret. Comput. Sci., 237(2000), 347–380.



[LW01] K. Lodaya and P. Weil.

Rationality in algebras with series operation.

Inform. and Comput., 171(2001), 269–293.



[Wei04] P. Weil.

Algebraic recognizability of languages.

In: *proc. MFCS 2004*, (J. Fiala, V. Koubek, J. Kratochvíl eds.), LNCS 3153, Springer-Verlag, 2004, 149–175.

◀ Vissza

Legyen Σ egy véges ábécé. Σ -val címkézett biposetnek nevezünk egy

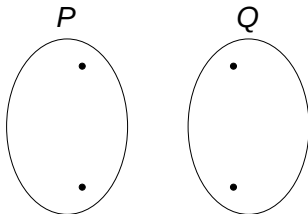
$$P = (P, <_h^P, <_v^P, \lambda^P), \text{ rendszert, ahol}$$

- P : egy véges, nemüres halmaz,
- $<_h$ and $<_v$: (irreflexív) részben-rendezések P -n, és
- $\lambda : P \rightarrow \Sigma$: a címkéző függvény.

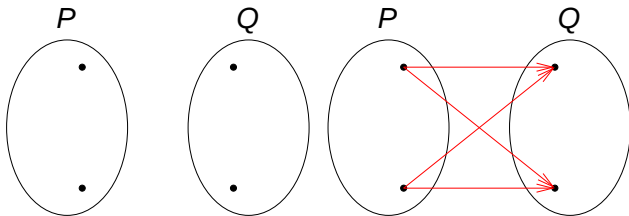
A P és Q biposetek közti **homomorfizmuson** olyan $P \rightarrow Q$ függvényt értünk, mely megőrzi a rendezési relációkat és a címkézést. Az **izomorfizmus** olyan bijektív homomorfizmus, melynek az inverze szintén homomorfizmus. A továbbiakban egymással izomorf biposetek között nem teszünk különbséget.

Horizontális (soros) szorzás: $P \bullet Q$

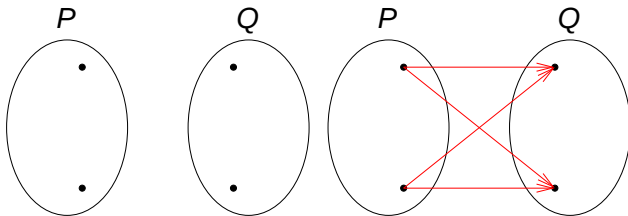
Horizontális (soros) szorzás: $P \bullet Q$



Horizontális (soros) szorzás: $P \bullet Q$

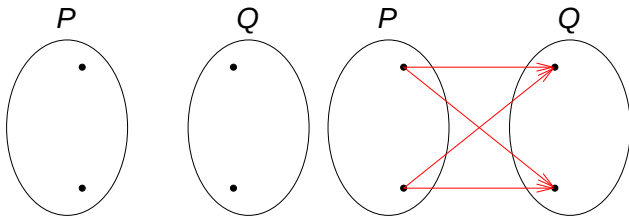


Horizontális (soros) szorzás: $P \bullet Q$

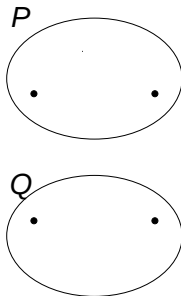


Vertikális (párhuzamos) szorzás: $P \circ Q$

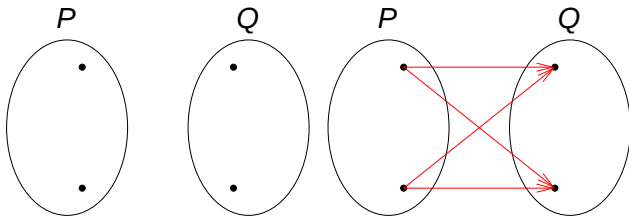
Horizontális (soros) szorzás: $P \bullet Q$



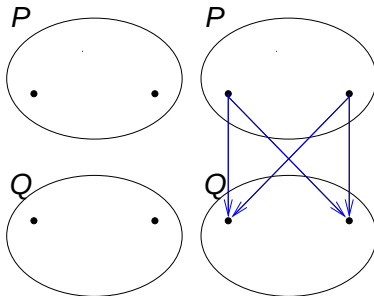
Vertikális (párhuzamos) szorzás: $P \circ Q$



Horizontális (soros) szorzás: $P \bullet Q$



Vertikális (párhuzamos) szorzás: $P \circ Q$



Soros-párhuzamos biposetek

Soros-párhuzamos biposetek

Definíció

Egy biposetet **soros-párhuzamos biposetnek** nevezünk, ha előállítható az egyelemű biposetekből a két szorzás művelet (véges sokszori) alkalmazásával.

Soros-párhuzamos biposetek

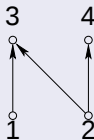
Definíció

Egy biposetet **soros-párhuzamos biposetnek** nevezünk, ha előállítható az egyelemű biposetekből a két szorzás művelet (véges sokszori) alkalmazásával.

Tétel [Ésik]

Egy biposet $P = (P, <_h, <_v, \lambda)$ soros-párhuzamos $\Leftrightarrow$

- 1 ha P **teljes**, azaz, minden $x, y \in P$ -re az $x <_h y, x <_v y, y <_h x, y <_v x$ relációk közül pontosan egy teljesül.
- 2 Mind a $(P, <_h)$ mid a $(P, <_v)$ poset „**N**”-mentes (N-free), azaz nem tartalmaznak az $(N, <)$ posettel izomorf feszített részgráfot, ahol $N = \{1, 2, 3, 4\}$, melyben $1 < 3, 2 < 3, 2 < 4$.



A Σ ábécé feletti MSO formulák

- Elsőrendű változók: $x, y, z, \dots$
- Másodrendű monadikus változók: $X, Y, Z, \dots$
- Atomi formulák:
 - $x <_h y$, ahol x, y elsőrendű vált.
 - $x <_v y$, ahol x, y elsőrendű vált.
 - $Q_\sigma(x)$, ahol $\sigma \in \Sigma$, x elsőrendű vált.
 - $X(x)$, ahol x elsőrendű vált., X másodrendű vált.
- Formulák képzése:
 - $\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow$,
 - $\exists x, \forall x, \exists X, \forall X$

◀ Vissza

Futások

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező automata. $\mathcal{A}$ **futásainak** (runs) a halmazát, $\text{Runs}(\mathcal{A})$ -t, az átmenetek sorozatainak az a legszűkebb halmaz képezi, mely tartalmazza

- (i) az **egyelemű futásokat**: (p, σ, q) , minden $(p, \sigma, q) \in \delta$ -ra;
- (ii) a **direkt futásokat**: $\mathbf{r_1 r_2}$, minden $\mathbf{r_1, r_2} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, ha $\text{end}(\mathbf{r_1}) = \text{start}(\mathbf{r_2})$;
- (iii) és az **indirekt futásokat**: $t_1 \mathbf{r} t_2$, minden direkt $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ futásra, és t_1, t_2 zárójelező átmenetpárra, amennyiben $\text{end}(t_1) = \text{start}(\mathbf{r})$ and $\text{end}(\mathbf{r}) = \text{start}(t_2)$.

Futások

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező automata. $\mathcal{A}$ **futásainak** (runs) a halmazát, $\text{Runs}(\mathcal{A})$ -t, az átmenetek sorozatainak az a legszűkebb halmaz képezi, mely tartalmazza

- (i) az **egyelemű futásokat**: (p, σ, q) , minden $(p, \sigma, q) \in \delta$ -ra;
- (ii) a **direkt futásokat**: $\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$, minden $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) = \text{start}(\mathbf{r}_2)$;
- (iii) és az **indirekt futásokat**: $t_1 \mathbf{r} t_2$, minden direkt $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ futásra, és t_1, t_2 zárójelező átmenetpárra, amennyiben $\text{end}(t_1) = \text{start}(\mathbf{r})$ and $\text{end}(\mathbf{r}) = \text{start}(t_2)$.

Futások

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező automata. $\mathcal{A}$ **futásainak** (runs) a halmazát, $\text{Runs}(\mathcal{A})$ -t, az átmenetek sorozatainak az a legszűkebb halmaz képezi, mely tartalmazza

- (i) az **egyelemű futásokat**: (p, σ, q) , minden $(p, \sigma, q) \in \delta$ -ra;
- (ii) a **direkt futásokat**: $\mathbf{r_1 r_2}$, minden $\mathbf{r_1, r_2} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, ha $\text{end}(\mathbf{r_1}) = \text{start}(\mathbf{r_2})$;
- (iii) és az **indirekt futásokat**: $t_1 \mathbf{r} t_2$, minden direkt $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ futásra, és t_1, t_2 zárójelező átmenetpárra, amennyiben $\text{end}(t_1) = \text{start}(\mathbf{r})$ and $\text{end}(\mathbf{r}) = \text{start}(t_2)$.

Futások

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező automata. $\mathcal{A}$ **futásainak** (runs) a halmazát, $\text{Runs}(\mathcal{A})$ -t, az átmenetek sorozatainak az a legszűkebb halmaz képezi, mely tartalmazza

- (i) az **egyelemű futásokat**: (p, σ, q) , minden $(p, \sigma, q) \in \delta$ -ra;
- (ii) a **direkt futásokat**: $\mathbf{r_1 r_2}$, minden $\mathbf{r_1, r_2} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, ha $\text{end}(\mathbf{r_1}) = \text{start}(\mathbf{r_2})$;
- (iii) és az **indirekt futásokat**: $t_1 \mathbf{r} t_2$, minden direkt $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ futásra, és t_1, t_2 zárójelező átmenetpárra, amennyiben $\text{end}(t_1) = \text{start}(\mathbf{r})$ and $\text{end}(\mathbf{r}) = \text{start}(t_2)$.

A címke definíciója

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező aut. és $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$. Az $\mathbf{r}$ futás **címkéje** (label) az a biszó $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ -ból, melyet induktívan így definiálhatunk:

- (i) Ha $\mathbf{r} = (p, \sigma, q)$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \sigma$.
- (ii) Ha $\mathbf{r}$ direkt futás és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ valamely $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, akkor
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in H$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \bullet \text{Label}(\mathbf{r}_2)$;
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in V$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \circ \text{Label}(\mathbf{r}_2)$.
- (iii) Ha $\mathbf{r}$ indirekt futás $\mathbf{r} = t_1 \mathbf{r}' t_2$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}')$.

A címke definíciója

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező aut. és $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$. Az $\mathbf{r}$ futás **címkéje** (label) az a biszó $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ -ból, melyet induktívan így definiálhatunk:

- (i) Ha $\mathbf{r} = (p, \sigma, q)$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \sigma$.
- (ii) Ha $\mathbf{r}$ direkt futás és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ valamely $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, akkor
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in H$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \bullet \text{Label}(\mathbf{r}_2)$;
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in V$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \circ \text{Label}(\mathbf{r}_2)$.
- (iii) Ha $\mathbf{r}$ indirekt futás $\mathbf{r} = t_1 \mathbf{r}' t_2$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}')$.

A címke definíciója

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező aut. és $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$. Az $\mathbf{r}$ futás **címkéje** (label) az a biszó $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ -ból, melyet induktívan így definiálhatunk:

- (i) Ha $\mathbf{r} = (p, \sigma, q)$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \sigma$.
- (ii) Ha $\mathbf{r}$ direkt futás és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ valamely $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, akkor
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in H$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \bullet \text{Label}(\mathbf{r}_2)$;
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in V$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \circ \text{Label}(\mathbf{r}_2)$.
- (iii) Ha $\mathbf{r}$ indirekt futás $\mathbf{r} = t_1 \mathbf{r}' t_2$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}')$.

A címke definíciója

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező aut. és $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$. Az $\mathbf{r}$ futás **címkéje** (label) az a biszó $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ -ból, melyet induktívan így definiálhatunk:

- (i) Ha $\mathbf{r} = (p, \sigma, q)$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \sigma$.
- (ii) Ha $\mathbf{r}$ direkt futás és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ valamely $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, akkor
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in H$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \bullet \text{Label}(\mathbf{r}_2)$;
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in V$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \circ \text{Label}(\mathbf{r}_2)$.
- (iii) Ha $\mathbf{r}$ indirekt futás $\mathbf{r} = t_1 \mathbf{r}' t_2$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}')$.

A futás címkéje

A címke definíciója

Legyen $\mathcal{A}$ zárójelező aut. és $\mathbf{r} \in \text{Runs}(\mathcal{A})$. Az $\mathbf{r}$ futás **címkéje** (label) az a biszó $\Sigma^*(\bullet, \circ)$ -ból, melyet induktívan így definiálhatunk:

- (i) Ha $\mathbf{r} = (p, \sigma, q)$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \sigma$.
- (ii) Ha $\mathbf{r}$ direkt futás és $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2$ valamely $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in \text{Runs}(\mathcal{A})$ -ra, akkor
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in H$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \bullet \text{Label}(\mathbf{r}_2)$;
 - ha $\text{end}(\mathbf{r}_1) \in V$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}_1) \circ \text{Label}(\mathbf{r}_2)$.
- (iii) Ha $\mathbf{r}$ indirekt futás $\mathbf{r} = t_1 \mathbf{r}' t_2$, akkor $\text{Label}(\mathbf{r}) := \text{Label}(\mathbf{r}')$.

Az elfogadott nyelv

Az $\mathcal{A}$ zárójelező aut. által elfogadott binoid nyelv álljon $\mathcal{A}$ -nak a kezdőállapotból végállapotba menő futásainak címkéiből. A jele: $L(\mathcal{A})$.

◀ Vissza

Néhány további eredmény I.

Néhány további eredmény I.

A 8. tétel következménye [Ném04]

$$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}.$$

$$\text{HRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{VB} \text{ és } \text{VRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{HB}$$

Néhány további eredmény I.

A 8. tétel következménye [Ném04]

$$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}.$$

$$\text{HRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{VB} \text{ és } \text{VRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{HB}$$

A korlátos mélységű reguláris binoid nyelvek jellemzése

A következő feltételek ekvivalensek egy $L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ **korlátos mélységű** binoid nyelvre:

- L felismerhető.
- L reguláris.
- L -et elfogadja egy egyetlen zárójellel rendelkező automata.
- L biracionális.
- L általános biracionális.
- az L nyelv MSO-definiálható.

Amennyiben L vertikálisan korlátos, a fenti feltételek még azzal is ekvivalensek, hogy L is horizontális racionális.

Hagyományos automatókkal való felismerés

- Hashiguchi vezette be társszerzőivel [HIJ00, HWJ03, HSJ04].
- **Monoid automátákat** (véges szavakat feldolgozó klasszikus automátákat) használ **binoid nyelvek** reguláris osztályainak definiálására.
- A biszavak **term reprezentációján** nyugszik.
- A monoid automáták az $E(\Sigma) := \Sigma \cup \{ \langle, \rangle, \bullet, \circ \}$. **kiterjesztett ábécé** feletti szavakon futnak.
- Két elfogadási mód:
 - szabad monoid mód (free monoid mode)
 - szabad binoid mód (free binoid mode)

A két elfogadási mód

A szabad monoid és a szabad binoid módú elfogadás

A két elfogadási mód

A szabad monoid és a szabad binoid módú elfogadás

Szabad monoid mód: tetszőleges $x \in E(\Sigma)^*$ szóról az automata eldönti, hogy x az elfogadott nyelv egy biszavának szabályos term reprezentációja-e. (A nyelvosztály jele: Reg^{FM})

A két elfogadási mód

A szabad monoid és a szabad binoid módú elfogadás

Szabad monoid mód: tetszőleges $x \in E(\Sigma)^*$ szóról az automata eldönti, hogy x az elfogadott nyelv egy biszavának szabályos term reprezentációja-e. (A nyelvosztály jele: Reg^{FM})

Szabad binoid mód: az automata bemenete csak a **szabályos termreprezentációk** közül kerül ki, és csupán azt kell az automatának eldönteni, hogy a kapott term által reprezentált biszó az elfogadott nyelvbe tartozik-e. (A nyelvosztály jele: Reg^{FB})

A két elfogadási mód

A szabad monoid és a szabad binoid módú elfogadás

Szabad monoid mód: **tetszőleges** $x \in E(\Sigma)^*$ szóról az automata eldönti, hogy x az elfogadott nyelv egy biszavának szabályos term reprezentációja-e. (A nyelvosztály jele: **Reg^{FM}**)

Szabad binoid mód: az automata bemenete csak a **szabályos termreprezentációk** közül kerül ki, és csupán azt kell az automatának eldönteni, hogy a kapott term által reprezentált biszó az elfogadott nyelvbe tartozik-e. (A nyelvosztály jele: **Reg^{FB}**)

A két elfogadási mód

A szabad monoid és a szabad binoid módú elfogadás

Szabad monoid mód: tetszőleges $x \in E(\Sigma)^*$ szóról az automata eldönti, hogy x az elfogadott nyelv egy biszavának szabályos term reprezentációja-e. (A nyelvosztály jele: Reg^{FM})

Szabad binoid mód: az automata bemenete csak a **szabályos termreprezentációk** közül kerül ki, és csupán azt kell az automatának eldönteni, hogy a kapott term által reprezentált biszó az elfogadott nyelvbe tartozik-e. (A nyelvosztály jele: Reg^{FB})

Korábbi eredmények a Reg^{FM} és Reg^{FB} nyelvosztályokra

Tétel [Hashiguchi et al.]

- 1 $\text{Reg}^{\text{FM}} \subseteq \text{BD}$, so $\text{Reg}^{\text{FM}} \subsetneq \text{Reg}^{\text{FB}}$.
- 2 $\text{Reg}^{\text{FM}} = \text{BRat}$.

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

Reg^{FM}

=

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

Reg^{FM}

=

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i

◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

Reg^{FM}

=

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i



◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

Reg^{FM}

=

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i

↓

$\text{Reg}_i^{\text{T}} = \text{Reg}_i^{\text{C}}$

◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Reg^{FM}

=

Zárójelező automaták

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i

↓

$\text{Reg}_i^{\text{T}} = \text{Reg}_i^{\text{C}}$

↓

◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Reg^{FM}

=

Zárójelező automaták

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i

↓

↓

$\text{Reg}_i^{\text{T}} = \text{Reg}_i^{\text{C}}$

Reg'_i

◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

Reg^{FM}

=

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i

↓

↓

$\text{Reg}_i^{\text{T}} = \text{Reg}_i^{\text{C}}$

=

Reg'_i

◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

Reg^{FM}

=

$\text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$

Reg^{FB}

?

Reg_i

↓

↓

$\text{Reg}_i^{\text{T}} = \text{Reg}_i^{\text{C}}$

=

Reg'_i

$\text{Reg}^{\text{FB}} = \text{Reg}_1^{\text{T}}$

=

$\text{Reg}'_1 \subsetneq \text{Reg}_2$

◀ Vissza

Hashiguchi és a mi megközelítésünk összevetése

A két megközelítési mód nyelvosztályainak összehasonlítása

Monoid automaták

Zárójelező automaták

$$\text{Reg}^{\text{FM}} = \text{BRat} = \text{Reg}_1 \cap \text{BD}$$

$$\text{Reg}^{\text{FB}} \quad ? \quad \text{Reg}_i$$

↓

↓

$$\text{Reg}_i^{\text{T}} = \text{Reg}_i^{\text{C}} = \text{Reg}'_i$$

$$\text{Reg}^{\text{FB}} = \text{Reg}_1^{\text{T}} = \text{Reg}'_1 \subsetneq \text{Reg}_2$$

$$\text{Reg}_{\infty}^{\text{T}} = \text{Reg}_{\infty}^{\text{C}} = \text{Reg}' = \text{Reg} = \text{Rec}$$

◀ Vissza

Megoldatlan problémák

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?)

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]
- A hierarchia Reg_i , $i \geq 1$ osztályainak eldönthetősége. Adható-e rájuk ekvivalens algebrai/logikai jellemzés?

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]
- A hierarchia Reg_i , $i \geq 1$ osztályainak eldönthetősége. Adható-e rájuk ekvivalens algebrai/logikai jellemzés?
- Elsőrendben definiálható és csillagmentes binoid nyelvek.

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]
- A hierarchia Reg_i , $i \geq 1$ osztályainak eldönthetősége. Adható-e rájuk ekvivalens algebrai/logikai jellemzés?
- Elsőrendben definiálható és csillagmentes binoid nyelvek.
- A végtelen eset általánosítása a tetszőleges megszámlálható lineáris rendezések feletti végtelen szavak mintájára (O. Carton).

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]
- A hierarchia Reg_i , $i \geq 1$ osztályainak eldönthetősége. Adható-e rájuk ekvivalens algebrai/logikai jellemzés?
- Elsőrendben definiálható és csillagmentes binoid nyelvek.
- A végtelen eset általánosítása a tetszőleges megszámlálható lineáris rendezések feletti végtelen szavak mintájára (O. Carton).
- Zárójelező automaták determinalizációja és minimalizációja.

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]
- A hierarchia Reg_i , $i \geq 1$ osztályainak eldönthetősége. Adható-e rájuk ekvivalens algebrai/logikai jellemzés?
- Elsőrendben definiálható és csillagmentes binoid nyelvek.
- A végtelen eset általánosítása a tetszőleges megszámlálható lineáris rendezések feletti végtelen szavak mintájára (O. Carton).
- Zárójelező automaták determinalizációja és minimalizációja.
- Binoid nyelvek és nemrangolt rendezett fanyelvek kapcsolatának vizsgálata.

Megoldatlan problémák

- A $\text{Reg} = \text{Rec} = \text{MSO}$ jellemezhető-e racionalitás segítségével? (Van-e Kleene tétel zárójelező automatákra?) **Van.** [GN08]
- A hierarchia Reg_i , $i \geq 1$ osztályainak eldönthetősége. Adható-e rájuk ekvivalens algebrai/logikai jellemzés?
- Elsőrendben definiálható és csillagmentes binoid nyelvek.
- A végtelen eset általánosítása a tetszőleges megszámlálható lineáris rendezések feletti végtelen szavak mintájára (O. Carton).
- Zárójelező automaták determinalizációja és minimalizációja.
- Binoid nyelvek és nemrangolt rendezett fanyelvek kapcsolatának vizsgálata.
- Alkalmazások keresése.

◀ Vissza

1. Tétel [ÉN04]

$\text{Rec} = \text{Reg}$, azaz egy $L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ binoid nyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha reguláris.

2. Tétel [ÉN04]

$\text{Reg} = \text{MSO}$, azaz egy $L \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$ binoid nyelv akkor és csak akkor reguláris, ha MSO-definiálható.

◀ Vissza

Definíció

- $\text{HRat} = \text{Fin}[\cup, \bullet, * \bullet, \circ]$ a *horizontális racionális nyelvek*,
- $\text{VRat} = \text{Fin}[\cup, \circ, * \circ, \bullet]$ a *vertikális racionális nyelvek*,
- $\text{BRat} = \text{Fin}[\cup, \bullet, * \bullet, \circ, * \circ]$ a *biracionális nyelvek*,
- $\text{GRat} = \text{Fin}[\cup, \bullet, * \bullet, \circ, * \circ, {}^c]$ az *általánosított biracionális nyelvek* (generalized birational languages), ahol c a komplementerképzés jele.

Definíció

- $\text{HRat} = \text{Fin}[\cup, \bullet, * \bullet, \circ]$ a *horizontális racionális nyelvek*,
- $\text{VRat} = \text{Fin}[\cup, \circ, * \circ, \bullet]$ a *vertikális racionális nyelvek*,
- $\text{BRat} = \text{Fin}[\cup, \bullet, * \bullet, \circ, * \circ]$ a *biracionális nyelvek*,
- $\text{GRat} = \text{Fin}[\cup, \bullet, * \bullet, \circ, * \circ, ^c]$ az *általánosított biracionális nyelvek* (generalized birational languages), ahol c a komplementerképzés jele.

3. Tétel [ÉN04]

$$\text{HRat} \cup \text{VRat} \subsetneq \text{BRat} \subsetneq \text{GRat} \subsetneq \text{Reg}.$$

Továbbá, HRat és VRat összehasonlíthatatlan a tartalmazásra nézve.

Definíció: ξ -helyettesítés

Tegyük fel, hogy $L_1 \subseteq (\Sigma \cup \{\xi\})^*(\bullet, \circ)$ és $L_2 \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$, ekkor L_2 -nek L_1 -be való **ξ -helyettesítését** (ξ -substitution) jelölje **$L_1[L_2/\xi]$** . Ezt úgy kapjuk, hogy L_1 bszavaiban ξ minden egyes előfordulását nem uniform módon^a L_2 elemeivel helyettesítjük.

^aAzaz ξ különböző előfordulásaiba helyettesíthetők L_2 különböző elemei.

Definíció: ξ -helyettesítés

Tegyük fel, hogy $L_1 \subseteq (\Sigma \cup \{\xi\})^*(\bullet, \circ)$ és $L_2 \subseteq \Sigma^*(\bullet, \circ)$, ekkor L_2 -nek L_1 -be való **ξ -helyettesítését** (ξ -substitution) jelölje **$L_1[L_2/\xi]$** . Ezt úgy kapjuk, hogy L_1 biszavaiban ξ minden egyes előfordulását nem uniform módon^a L_2 elemeivel helyettesítjük.

^aAzaz ξ különböző előfordulásaiba helyettesíthetők L_2 különböző elemei.

4. Tétel [ÉN04]

A reguláris binoid nyelvek osztálya, Reg , (effektíven) **zárt** a ξ -helyettesítés műveletére nézve.

Zártsági tulajdonságok II.

5. Következmény [ÉN04]

A reguláris binoid nyelvek osztálya, $\text{Reg} = \text{Rec}$, (effektíven) zárt a következő műveletekre nézve:

- horizontális és vertikális szorzás ($\bullet$, $\circ$),
- horizontális és vertikális iteráció ($*\bullet$, $*\circ$),
- homomorf kép képzés,
- Boole-műveletek ($\cup$, $\cap$, kompl. képzés)
- inverz homomorf kép képzés.

6. Tétel [ÉN04]

Egy adott reguláris nyelvről eldönthető, hogy a nyelv

- véges,
- kovéges,
- biracionális,
- horizontális racionális vagy
- vertikális racionális-e.

6. Tétel [ÉN04]

Egy adott reguláris nyelvről eldönthető, hogy a nyelv

- véges,
- kovéges,
- biracionális,
- horizontális racionális vagy
- vertikális racionális-e.

Nyitott probléma

Egy adott reguláris nyelvről eldönthető-e, hogy a nyelv

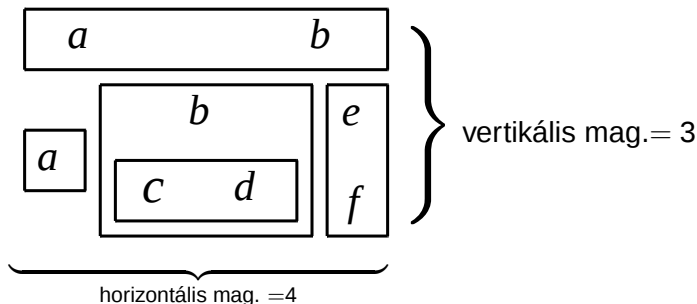
- általánosított biracionális nyelv-e?

◀ Vissza

Horizontálisan és vertikálisan korlátos nyelvek

HB és VB definíciója

Egy binoid nyelvet **horizontálisan** (illetve **vertikálisan**) **korlátosnak** mondunk, ha létezik véges korlát elemei horizontális (illetve vertikális) magasságára.
Az osztályok jele legyen: HB és VB.



BD definíciója

Azt mondjuk, hogy egy L nyelv **korlátos mélységű** (bounded depth) ha létezik olyan K véges korlát, hogy minden $w \in L$ esetén w term reprezentációjában az egymásbaágyazott zárójelek maximális mélysége legfeljebb K . Az osztály jele legyen: BD.

BD definíciója

Azt mondjuk, hogy egy L nyelv **korlátos mélységű** (bounded depth) ha létezik olyan K véges korlát, hogy minden $w \in L$ esetén w term reprezentációjában az egymásbaágyazott zárójelek maximális mélysége legfeljebb K . Az osztály jele legyen: BD .

Példa

- Minden horizontálisan korlátos és minden vertikálisan korlátos nyelv $\in BD$
- A korábbi példában látott

$$L = \{c, a \bullet \langle b \circ c \rangle, a \bullet \langle b \circ \langle a \bullet \langle b \circ c \rangle \rangle, \dots\}$$

nem korlátos mélységű.

BRat, HRat és VRat jellemzése

7. Tétel [ÉN04]

$$\text{BRat} = \text{Reg} \cap \text{BD}.$$

7. Tétel [ÉN04]

$$\text{BRat} = \text{Reg} \cap \text{BD}.$$

8. Tétel [ÉN04]

$$\text{HRat} = \text{Reg} \cap \text{VB} \text{ és } \text{VRat} = \text{Reg} \cap \text{HB}$$

◀ Vissza