Bonyolultságelmélet II. ZH B csop MEGOLDÁSOK

1. a) Definiálja a PSPACE osztályt, milyen tartalmazási viszonyban áll PSPACE és NPSPACE, adja meg egy PSPACE teljes probléma nevét.

   b) Mondja ki az NP osztály relációkkal való jellemzéséről szóló tételt. (A tételben szereplő fogalmak magyarázata nem kell.)

   Ld. a Papadimitriou könyvben vagy az előadás fóliákon.

2. Döntse el, hogy eldönthető-e a következő probléma, illetve, hogy rekurzívan felsorolható-e a problémához tartozó nyelv.

   Adott egy M egyszalagos Turing-gép és annak egy $\hat{q}$ állapota, kérdés, hogy van-e olyan x bemenet, hogy M az x-en futtatva valamikor $\hat{q}$ állapotba kerül.

   Megoldás:

   Legyen a probléma neve ÁLLAPOTBAMEGY. Tehát

   $$\text{ÁLLAPOTBAMEGY} := \{M;\hat{q} \mid \exists \text{ olyan bemenet, amin futtatva } M\ \hat{q}\text{-be jut.}\}$$

   A problémához tartozó nyelv **rekurzívan feldorolható** (azaz $\in RE$), mert van rá féligeldöntő algoritmus: Szimuláljuk M működését párhuzamosan az összes lehetséges bemeneten, ha valamelyik szimuláció során azt tapasztaljuk, hogy M a $\hat{q}$ állapotba kerül, akkor a válasz ,,igen".

   Ugyanakkor a probléma **nem rekurzív** ($\notin R$). Bizonyítás: a megállási probléma visszavezethető **rá**. Valóban, legyen M_0 és x_0 a MEGÁLLÁS probléma egy tetszőleges példánya. Konstráljuk meg belőlük egy, a következő képpen működő M' Turing gépet.

   $$M'(y) = \begin{cases} \text{,,Menj } \hat{q} \text{ állapotba!"}, & \text{ha } M_0(x_0) \neq \nearrow; \\ \nearrow & \text{különben;} \end{cases} \qquad \forall y \text{ benetre,}$$

   ahol $\hat{q}$ az M' egy olyan állapota, amelyet nem használ az $M_0(x_0)$ szimuláció végrehajtása során.

   Könnyen látható, hogy M_0 és x_0 ismeretében ilyen M' Turing-gép algoritmikusan megkonstuálható, ezért az $f : M_0; x_0 \mapsto M'; \hat{q}$ függvény rekurzív. Be kell még látnunk, hogy f valóban visszavezeti MEGÁLLÁS-t ÁLLAPOTBAMEGY-re:

   $$M_0; x_0 \in \text{MEGÁLLÁS} \Leftrightarrow M_0(x_0) \neq \nearrow \Leftrightarrow M'(y)\ \hat{q} \text{ állapotba kerül } (\forall y\text{-ra}) \Leftrightarrow$$
   $$\exists y :\ M' \text{ az } y\text{-on } \hat{q} \text{ állapotba kerül} \Leftrightarrow f(M_0; x_0) = M'; \hat{q} \in \text{ÁLLAPOTBAMEGY}.$$

3. a) Adja meg SAT logaritmikus tárban történő visszavezetését a következő problémára:

   <u>Adott</u>: egy φ konjunktív normálformájú formula, melyben minden tag vagy Horn-tag vagy pontosan két literált tartalmaz. (Horn-tagnak nevezzük egy konjunktív normálforma azon tagjait, melyekben legfeljebb egy pozitív literál fordul elő, a többi literál negatív, azaz valamely változó tagadása. Pl. x_1, $(\neg x_1 \vee \neg x_3 \vee x_2 \vee \neg x_4)$, $(\neg x_1 \vee \neg x_2)$ Horn-tagok, de $(\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3)$ nem.)

   <u>Kérdés</u>: Kielégíthető-e φ?

   b) Adja meg az $F = (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge x_2 \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4)$ formula képét a visszavezetés során.

   c) Milyen bonyolultságelméleti következtetést tud levonni a fentiekből a probléma bonyolultságára?

MEGOLDÁS:

a) Ha egy tag „rossz alakú", azza legalább három literált tartalmaz, melyek közül legalább 2 pozitív, akkor a pozitív literálokat helyettesítsük új változók tagadásaival. Pontosabban, ha egy tag

$$c = (z_1 \vee z_2 \vee \ldots \vee z_k \vee \neg z_{k+1} \vee \ldots \vee \neg z_{k+l})$$

alakú, ahol $z_1, \ldots, z_{k+l}$ változók, $k \geq 2, l \geq 0$, akkor helyére vegyük a

$$c' = (\neg z'_1 \vee \neg z'_2 \vee \ldots \neg z'_k \vee \neg z_{k+1} \vee \ldots \vee \neg z_{k+l})$$

tagot, ahol $z'_1, \ldots, z'_k$ új változók. Továbba a formulát egészítsük még ki a következő tagokkal

$$(z_1 \vee z'_1) \wedge (\neg z_1 \vee \neg z'_1) \wedge \ldots \wedge (z_k \vee z'_k) \wedge (\neg z_k \vee \neg z'_k).$$

b)$F = (\neg x_1 \vee \neg x'_2 \vee \neg x'_3) \wedge x_2 \wedge (\neg x'_1 \vee \neg x'_2 \vee \neg x'_3 \vee \neg x'_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_4) \wedge (x_1 \vee x'_1) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x'_1) \wedge (x_2 \vee x'_2) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x'_2) \wedge (x_3 \vee x'_3) \wedge (\neg x_3 \vee \neg x'_3) \wedge (x_4 \vee x'_4) \wedge (\neg x_4 \vee \neg x'_4)$.

Persze mind az első, mind a harmadik tagban egy-egy pozitív literált meg is hagyhatunk.

c) Mivel a probéléma SAT speciális esete, ezért $\in NP$. Mivel a) szerint az NP-nehéz SAT visszavezethető rá ezért NP-nehéz. Így a probléma **NP-teljes**.

4. Bizonyítsa be, hogy az alábbi probléma NP-nehéz. Adott két irányítatlan gáf G_1 és G_2. Kérdés, igaz-e, hogy a G_1-ben található leghosszabb út hossza nagyobb vagy egyenlő, mint a G_2-ben található leghosszabb út hossza.

   MEGOLDÁS:

   A probléma azért NP-nehéz, mert pl. az NP-nehéz HAMILTON-ÚT probléma visszavezethető **rá**: Legyen G a HAMILTON-ÚT egy tetszőleges példánya, azaz egy irányítatlan gráf. Rendeljük, hozzá G-hez a problémánk következő $G_1; G_2$ példányát:

   $G_1 := G$,
   $G_2 :=$ „ egy n csúcsból álló út (lánc)", ahol n a G csúcsainak a száma.

   Könnyen látható, hogy ez valóban visszavezeti a HAMILTON-ÚT problémát a mi problémánkra, és logaritmikus tárban elvégezhető (csak G csúcsait kell megszámolni, és egy n hosszú láncot generálni.) Ezért a problémánk NP-nehéz.

5. Döntse el, hogy az alábbi probléma P-ben van-e, vagy pedig NP-teljes. Adott egy G irányítatlan gráf. Kérdés, kiszínezhetők-e G csúcsai 4 színnel úgy, hogy az egyik színt színt pontosan háromszor használjuk. (Természetesen szomszédos csúcsok nem lehetnek azonos színűek. Az előadáson ismertetett tételek felhasználhatóak a bizonyítás során.)

   MEGOLDÁS:

   A probléma NP-teljes.

   <u>$\in NP$</u>: Könnyen látható, egy nemdeterminisztikus Turing-gép megsejthet egy színezést 4 színnel, és könnyen ellenőrizheti (ezt már determinisztikusan), hogy az a kívánt tulajdonságoknak megfelel-e. Ez polinom időben végrehajtható.

   <u>NP-nehéz</u>: A 3SZÍNEZÉS visszavezethető rá. Valóban, legyen G egy tetszőleges példánya 3SZÍNEZÉS-nek. Konstruáljuk meg belőle a következő G' gráfot:

   $G' := G+$ „3 diszjunkt csúcs, melyek G minden csúcsával össze vannak kötve"

   Könnyen látható, hogy az $f : G \mapsto G'$ függvény logaritmikus tárban kiszámítható, és visszavezeti 3SZÍNEZÉS-t a mi problémánkra, mert G akkor és csak akkor színezhető 3 színnel, ha G' kiszínezhető 4 színnel úgy, hogy az egyik színt legfeljebb háromszor használjuk.