

Képrekonstrukció 7. előadás



Balázs Péter

Képfeldolgozás és Számítógépes Grafika Tanszék
Szegedi Tudományegyetem

Bizonytalanság

A rekonstrukció vízszintes és függőleges vetületekből polinomiális időben elvégezhető, de sok lényegesen különböző megoldás lehet.

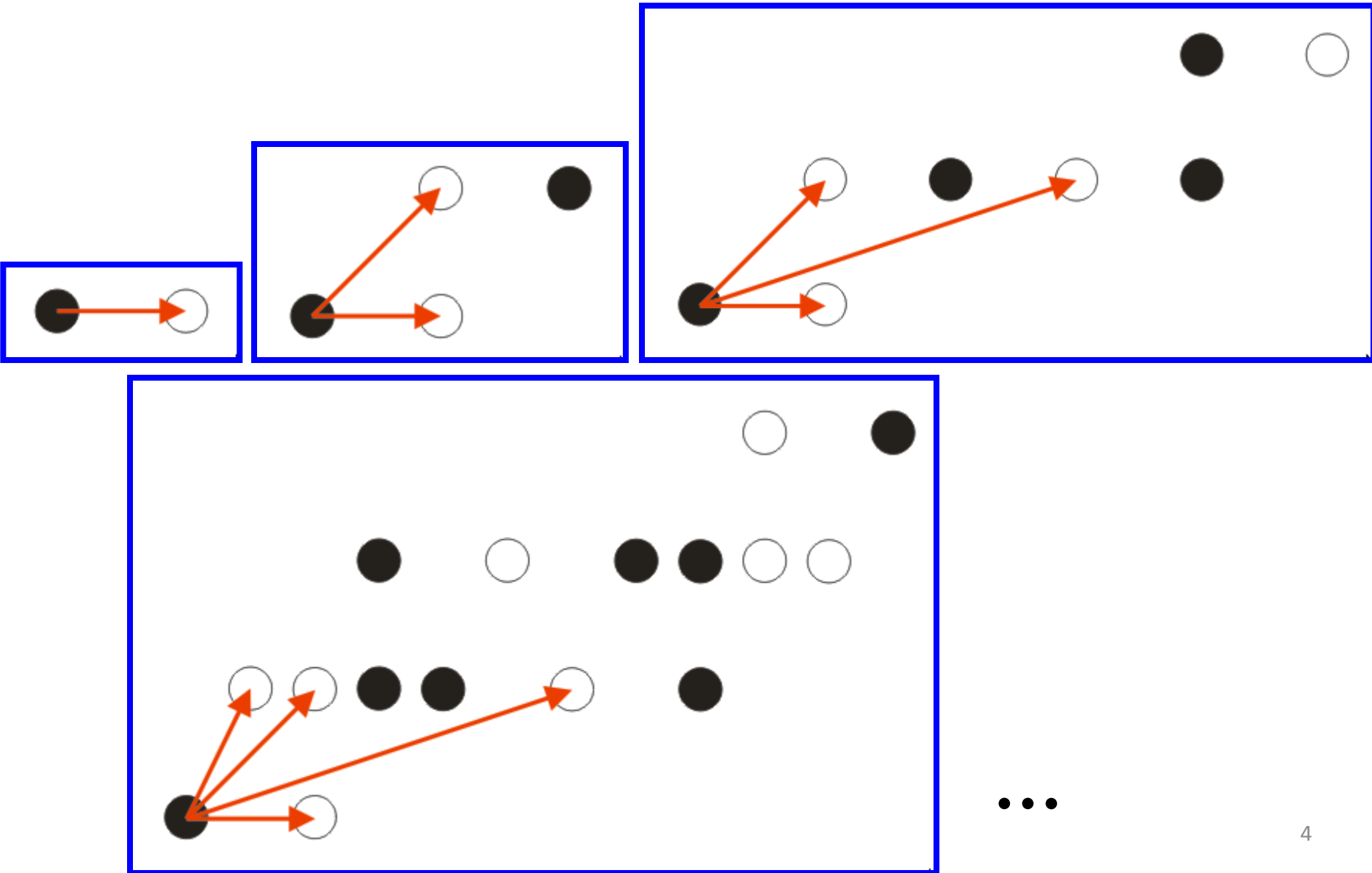
Javaslatok:

1. Vegyünk vetületeket további rácsirányokból
2. Használjunk a rekonstruálandó képről a priori információt

2-nél több vetület esetén

- Az egyértelműség, a konzisztencia és a rekonstrukció problémák általános esetben NP-nehezek (Gardner, Gritzmann, 1999)
- Tetszőleges számú vetület esetén is lehetnek ugyanolyan vetületekkel rendelkező különböző diszkrét halmazok

Bizonyítás



A *hv*-konvex mátrixosztály

	1	1			
	1	1	1	1	1
1	1				
1	1	1			
1					

	1				
	1		1	1	1
1	1	1			
1	1	1			
1					

	1				
	1	1	1	1	1
		1			
1					
1					

h-konvex

v-konvex

hv-konvex

A rekonstrukció a horizontális és vertikális vetületekből:

h-konvex vagy *v*-konvex: NP-teljes - Barcucci et al., 1996

hv-konvex: NP-teljes - Woeginger, 1996

Összefüggőség

	1	1			
	1	1	1		1
1	1			1	
1	1	1			
1					

8-összefüggő

	1				
	1		1	1	1
1	1	1	1		
1	1	1			
1					

4-összefüggő
(poliominó)

A rekonstrukció a horizontális és vertikális vetületekből:

4-összefüggő: NP-teljes - Woeginger, 1996

h-konvex vagy *v*-convex, 4-összefüggő: NP-teljes -
Barcucci et al., 1996

hv-konvex összefüggő halmazok

	1				
	1	1	1	1	1
1					
1					
1					

	1				
	1	1	1	1	1
1	1	1			
1	1	1			
1					

Mag-burok-szerű rekonstrukció:

- S. Brunetti, A. Del Lungo, F. Del Ristoro, A. Kuba, M. Nivat, 1996, 1998, 2001
- Komplexitás: $O(mn \cdot \log(mn) \cdot \min\{m^2, n^2\})$

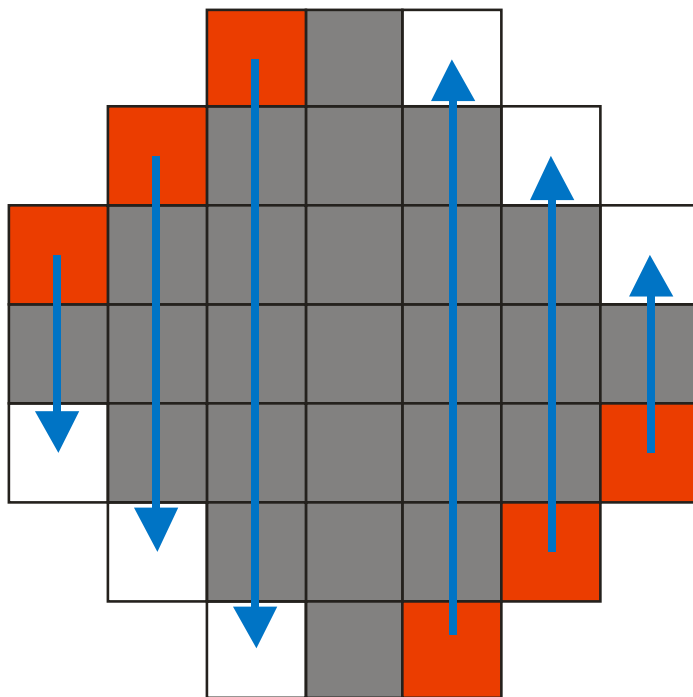
Átírás 2SAT kifejezésre:

- M. Chrobak, C. Dürr, 1999, A. Kuba, 1999
- Komplexitás: $O(mn \cdot \min\{m^2, n^2\})$

8- de nem 4-összefüggő eset:

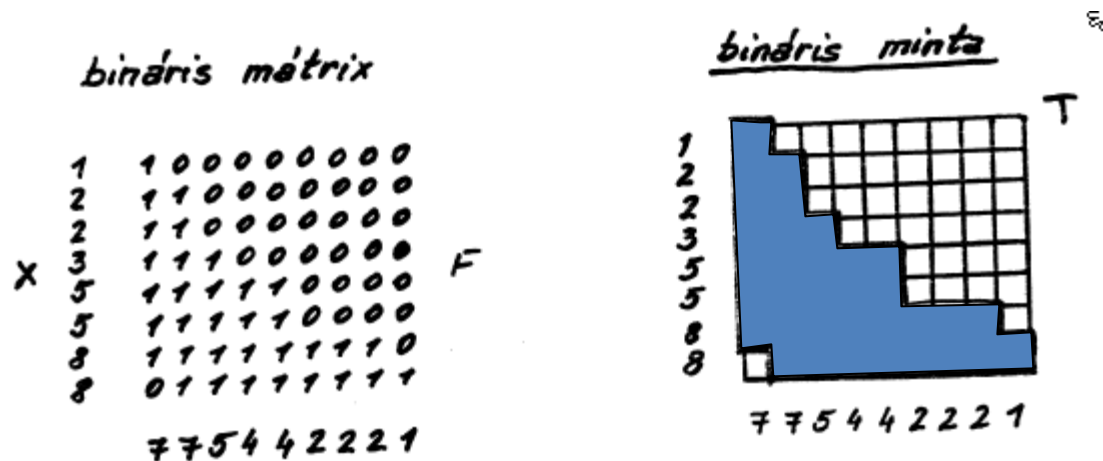
- P. Balázs, E. Balogh, A. Kuba, 2003
- Komplexitás: $O(mn \cdot \min\{m, n\})$

Exponenciális bizonytalanság



Mag-burok algoritmus (Kuba 1984)

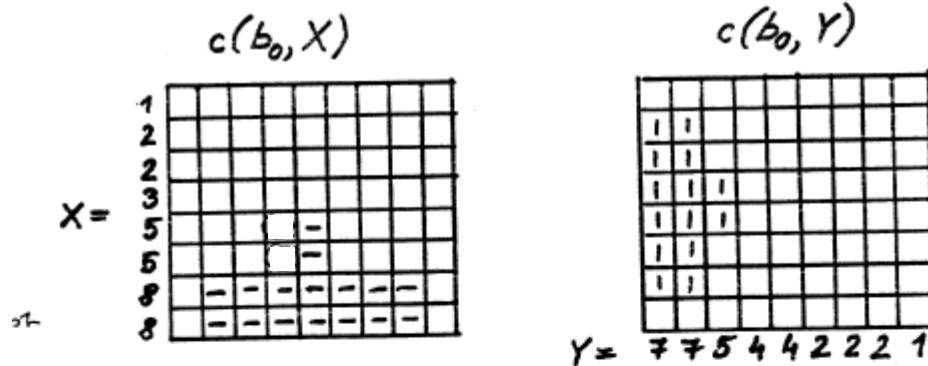
- Heurisztikus algoritmus a *hv*-konvex osztályra
- X - sorösszegvektor, Y oszlopösszegvektor
- Egy F bináris mátrixhoz tartozik egy $f = \{(i,j) \mid F_{ij}=1\}$ bináris minta



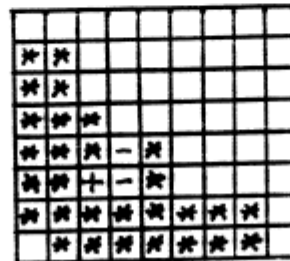
Mag és burok

- **Mag:** $c \subseteq f$
- **Burok:** $b \supseteq f$
- **Alapötlet:** a mag folyamatos növelésével és a burok folyamatos csökkentésével közelítsük f -et
- **Start:** $b_0 := T, c_0 := \emptyset$

Mag konstrukció



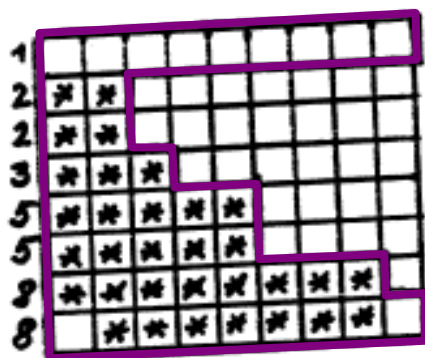
$f(x)$: a legkisebb kétirányú összefüggő halmaz,
amely x -et tartalmazza



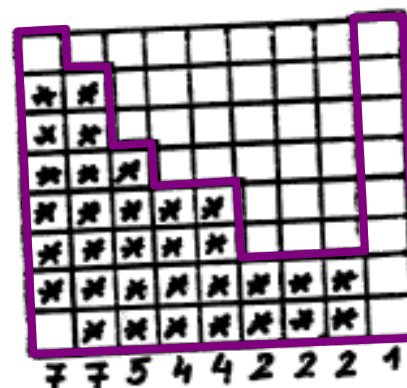
$$f(c(b_0, X) \cup c(b_0, Y))$$

Burok konstrukció

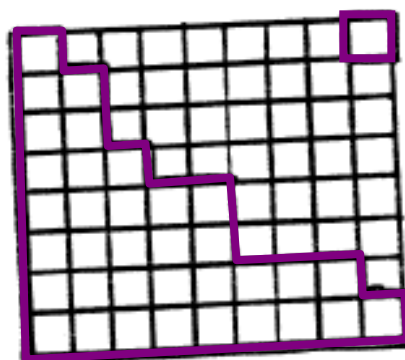
$b(c_1, X)$



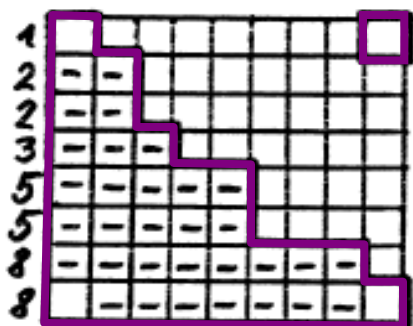
$b(c_1, Y)$



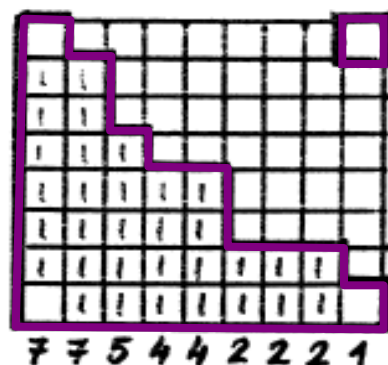
$b(c_1, X) \cap b(c_1, Y)$



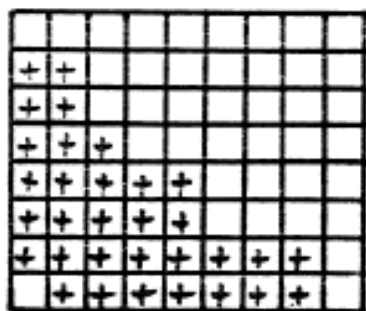
Verem memória



$c(b_1, X)$



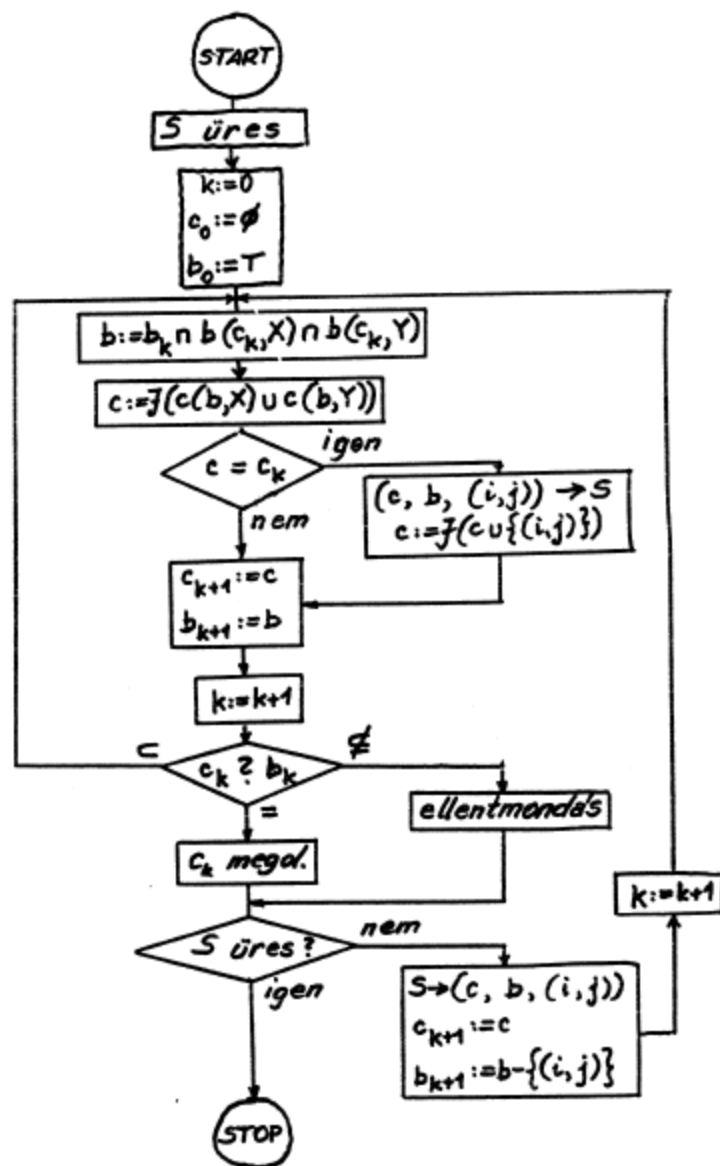
$c(b_1, Y)$



$c(b_1, X) \cup c(b_1, Y)$

- információ tárolás olyan helyzetekről, amikor az egyértelmű folytatás nem lehetséges
- írás: $(c, b, (i, j)) \rightarrow S$
(tetszőleges $(i, j) \in b \setminus c$)
- olvasás: $S \rightarrow (c, b, (i, j))$

☞



Feladat

- $H=(3,3,4,2,1)$; $V=(2,4,3,3,1)$
- Rekonstruáljuk Ryser algoritmusával.
- Egyértelmű-e a megoldás? Miért?
- Rekonstruáljuk a mag-burok algoritmussal.

Kumulált vektorok

		$\tilde{V}$							
		1	5	6	7	8	9		
H	1							$\tilde{H}$	1
	1								2
	2								4
	2								6
	3								9
		1	4	1	1	1	1		
		V							

$$\tilde{H} = (\tilde{h}_1, \dots, \tilde{h}_m):$$

$$\tilde{h}_1 = h_1, \quad \tilde{h}_i = \tilde{h}_{i-1} + h_i, \quad i = 2, \dots, m$$

$$\tilde{V} = (\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n):$$

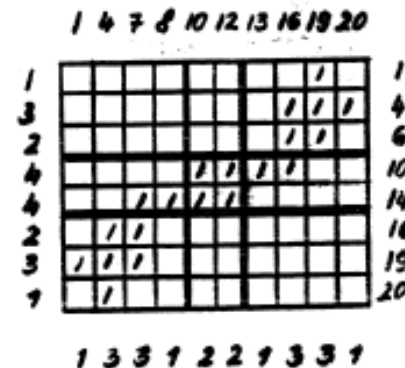
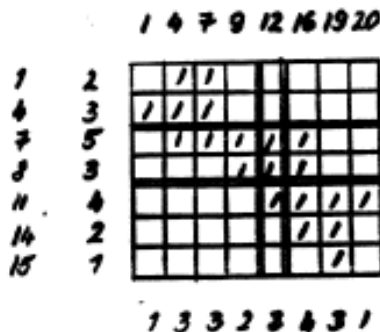
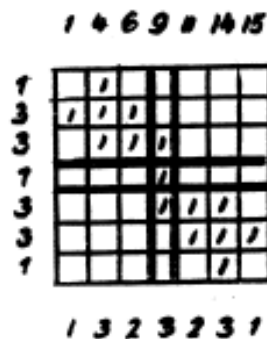
$$\tilde{v}_1 = v_1, \quad \tilde{v}_j = \tilde{v}_{j-1} + v_j, \quad j = 2, \dots, n$$

$$T = \sum_{i=1}^m h_i = \sum_{j=1}^n v_j$$

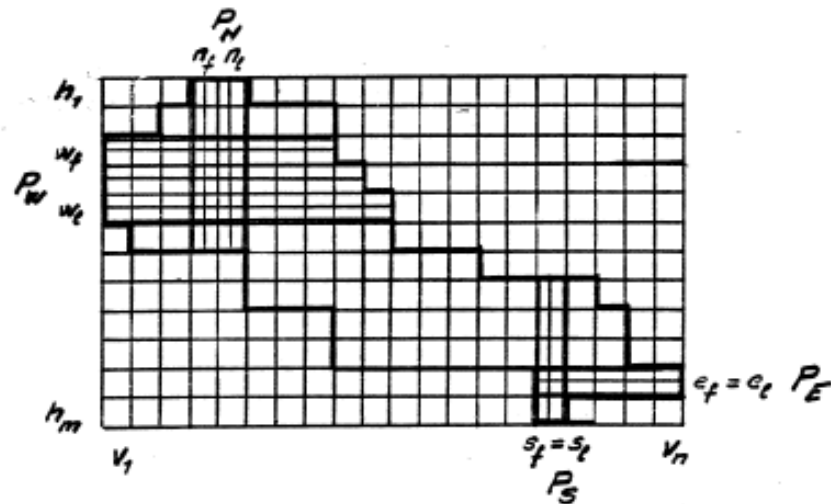
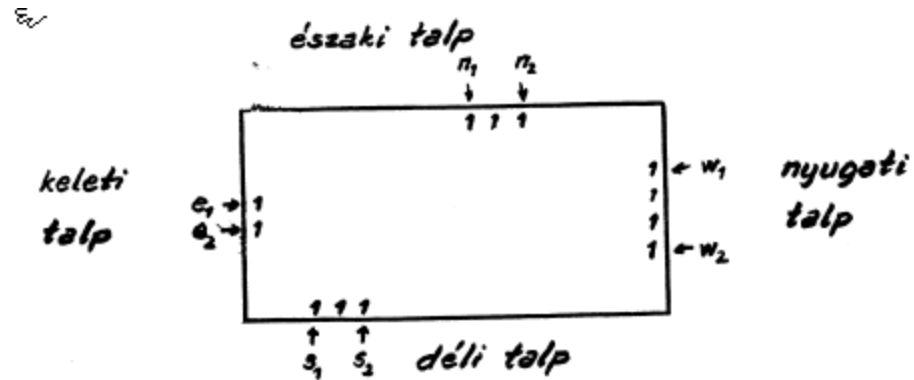
Medián

- i -edik sor *medián sor*, ha $\tilde{h}_{i-1} \leq T / 2 \leq \tilde{h}_i$
- j -edik oszlop *medián oszlop*, ha $\tilde{v}_{j-1} \leq T / 2 \leq \tilde{v}_j$
- *medián*: a medián sorok és oszlopok metszete
- $\mathcal{M}(A) \subseteq \{(i,j) \mid a_{ij}=1\}$

Példák:



Talpak



Gerinc

Def.: $\mathcal{G}(A)$: azok az (i,j) pozíciók, amelyekre

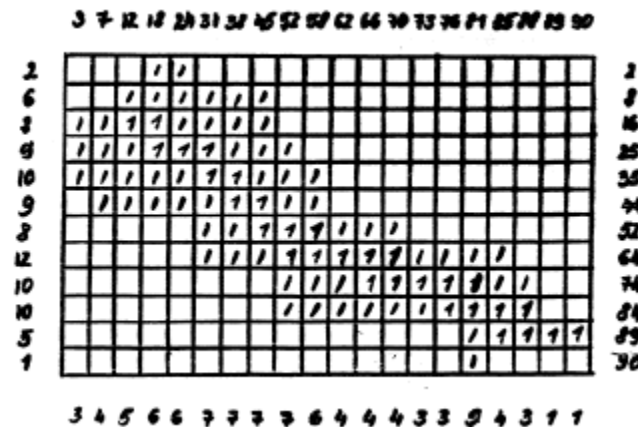
$$(n_1 \leq j \leq s_2 \text{ vagy } w_1 \leq i \leq e_2), v_j \geq h_{i-1}, h_i \geq v_{j-1}$$

vagy

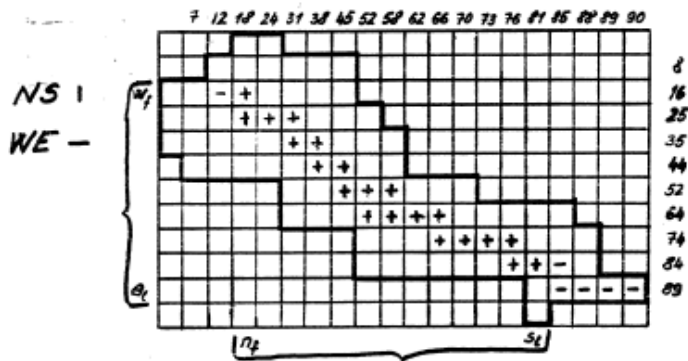
$$(s_1 \leq j \leq n_2 \text{ vagy } e_1 \leq i \leq w_2), h_i \geq T - v_j, T - v_{j-1} \geq h_{i-1}.$$

Tétel: Legyen A egy konvex poliaminó.

$$\mathcal{G}(A) \subseteq \{(i,j) \mid a_{ij} = 1\}$$

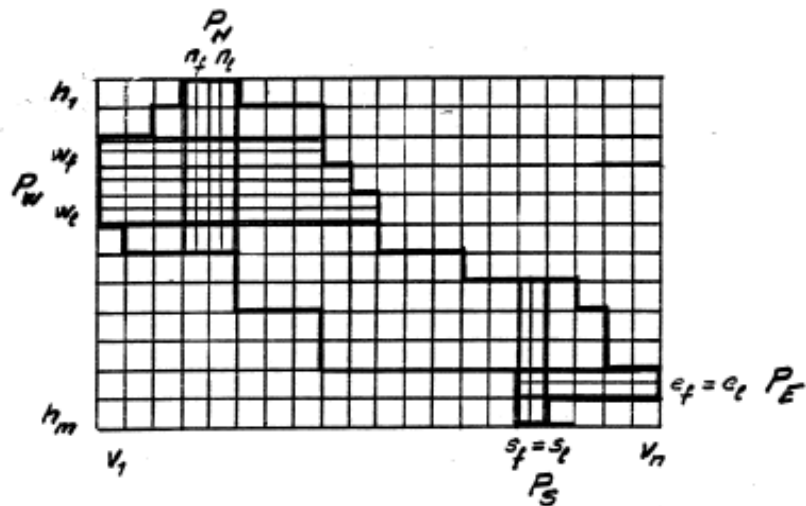


$$\left. \begin{array}{l} \text{NS} \left\{ \begin{array}{l} n_1 \leq j \leq s_1, \quad v_j \geq h_{i-1}, \quad h_i \geq v_{j-1}, \text{ or} \\ s_1 \leq j \leq n_1, \quad h_i \geq A - v_j, \quad A - v_{j-1} \geq h_{i-1}, \text{ or} \end{array} \right. \\ \text{WE} \left\{ \begin{array}{l} w_1 \leq i \leq e_1, \quad v_j \geq h_{i-1}, \quad h_i \geq v_{j-1}, \text{ or} \\ e_1 \leq i \leq w_1, \quad h_i \geq A - v_j, \quad A - v_{j-1} \geq h_{i-1} \end{array} \right. \end{array} \right\} \Rightarrow (i,j) \in \mathcal{G}$$

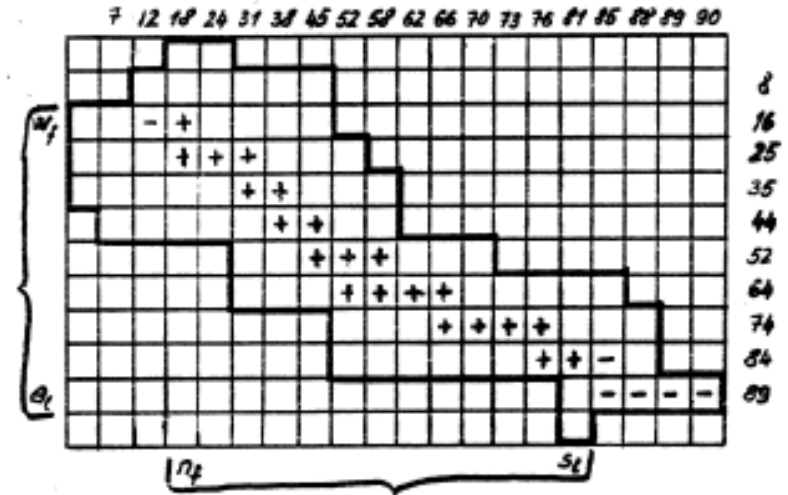


Megjegyzés: 8-összefüggőség esetén a gerinc definíciójában éles operátorokat kell alkalmazni

Talp+Gerinc



NS 1
WE -



- $P_N \cup P_S \cup NS$ 4-összefüggő és minden sorban van eleme
- $P_E \cup P_W \cup WE$ 4-összefüggő és minden oszlopban van eleme

Feltöltő operátorok

- Mag kiterjesztés
 - összefüggés alapján: $[1???1] \rightarrow [11111]$
 - koherencia alapján: $h_i=7$ $[??1111??] \rightarrow [??11111??]$
- Burok csökkentés
 - összefüggés alapján: $[10???0] \rightarrow [100000]$
 - koherencia alapján: $h_i=3$ $[??11??] \rightarrow [0?11?0]$
 - koherencia alapján: $h_i=3$ $[0??0] \rightarrow [0000]$

Rekonstrukció

Minden (P_N, P_S) láb-pozícióra

számítsuk ki NS -t

$$K = P_N \cup P_S \cup NS$$

S = a befoglaló téglalap

alkalmazzuk a feltöltő operátorokat, amíg lehet

ha $K=S$, akkor megoldást találtunk

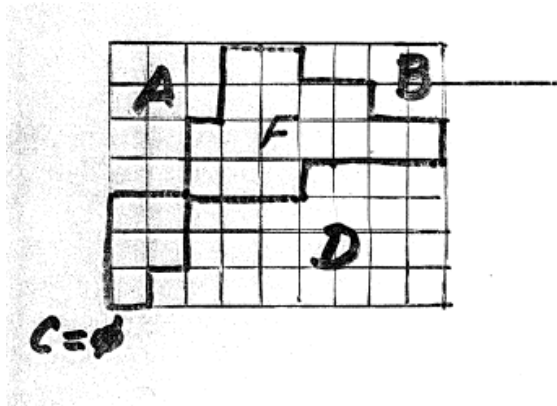
ha $K \subset S$, akkor 2SAT kifejezéssel keressük a megoldást

2SAT kifejezések

- literál: logikai változó vagy negáltja
- 2SAT kifejezés: diszjunkciók konjunkciója és minden tag 2 literálból áll
- 2SAT probléma: van-e egy adott 2SAT kifejezésnek olyan kiértékelése, melyre a formula igaz? (P-beli probléma)

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (\neg x_1 \vee \neg x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

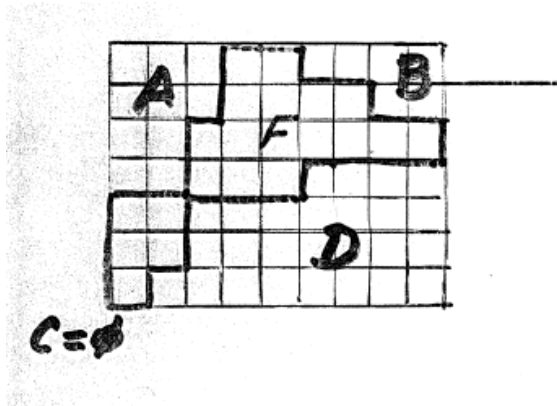
Rekonstrukció 2SAT kifejezésként



Sarkok:

$$\begin{aligned}
 Cor = & \bigwedge_{i,j} (a_{ij} \Rightarrow a_{i-1,j} \wedge a_{ij} \Rightarrow a_{i,j-1}) \wedge \\
 & \bigwedge_{i,j} (b_{ij} \Rightarrow b_{i-1,j} \wedge b_{ij} \Rightarrow b_{i,j+1}) \wedge \\
 & \bigwedge_{i,j} (c_{ij} \Rightarrow c_{i+1,j} \wedge c_{ij} \Rightarrow c_{i,j-1}) \wedge \\
 & \bigwedge_{i,j} (d_{ij} \Rightarrow d_{i+1,j} \wedge d_{ij} \Rightarrow d_{i,j+1}),
 \end{aligned}$$

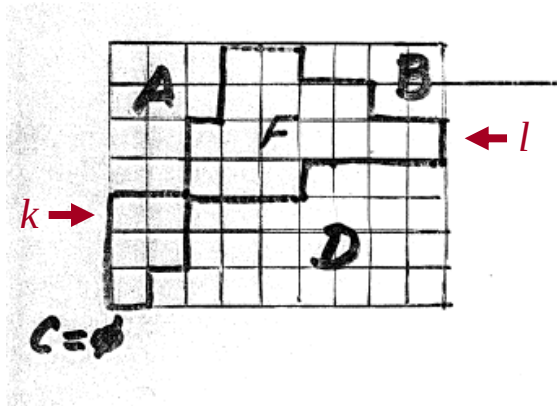
Rekonstrukció 2SAT kifejezésként



Diszjunktság:

$$Dis = \bigwedge_{i,j} \{x_{i,j} \Rightarrow \overline{y_{i,j}} \mid \text{for symbols } X, Y \in \{A, B, C, D\}, X \neq Y\},$$

Rekonstrukció 2SAT kifejezésként

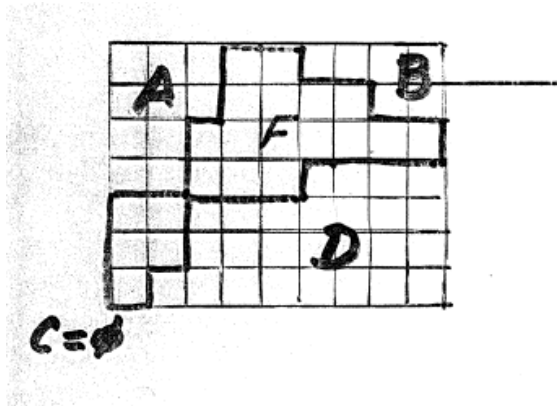


Érintés:

F érinti a diszkrét téglalapot (k,l) -nél, ha $(k,1), (l,n) \in F$

$$Anc = \overline{a_{k,1}} \wedge \overline{b_{k,1}} \wedge \overline{c_{k,1}} \wedge \overline{d_{k,1}} \wedge \overline{a_{l,n}} \wedge \overline{b_{l,n}} \wedge \overline{c_{l,n}} \wedge \overline{d_{l,n}},$$

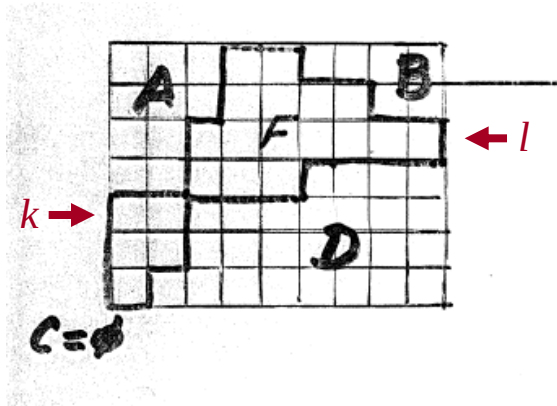
Rekonstrukció 2SAT kifejezésként



Alsó korlátok oszlopokra:

$$LBC = \bigwedge_{i,j} (a_{ij} \Rightarrow \overline{c_{i+v_j,j}} \wedge a_{ij} \Rightarrow \overline{d_{i+v_j,j}}) \wedge \bigwedge_{i,j} (b_{ij} \Rightarrow \overline{c_{i+v_j,j}} \wedge b_{ij} \Rightarrow \overline{d_{i+v_j,j}}) \wedge \bigwedge_j (\overline{c_{v_j,j}} \wedge \overline{d_{v_j,j}}),$$

Rekonstrukció 2SAT kifejezésként



Felső korlátok sorokra:

$$UBR = \bigwedge_j \left(\bigwedge_{i \leq \min\{k,l\}} (\overline{a_{i,j}} \Rightarrow b_{i,j+h_i}) \wedge \bigwedge_{l \leq i \leq k} (\overline{a_{i,j}} \Rightarrow d_{i,j+h_i}) \right) \wedge$$

$$\bigwedge_j \left(\bigwedge_{k \leq i \leq l} (\overline{c_{i,j}} \Rightarrow b_{i,j+h_i}) \wedge \bigwedge_{\max\{k,l\} \leq i} (\overline{c_{i,j}} \Rightarrow d_{i,j+h_i}) \right).$$

Rekonstrukció 2SAT kifejezésként

$$F_{k,l}(H, V) := \text{Cor} \wedge \text{Dis} \wedge \text{Anc} \wedge \text{LBC} \wedge \text{UBR}$$

2SAT kifejezés

Tétel: $F_{k,l}(H, V)$ kifejezés kielégíthető csakkor ha van olyan F realizáció, ami a tartó téglalapot éppen (k, l) -nél érintő hv-konvex 8-összefüggő b. mátrix.

Algoritmus:

```
for  $k, l = 1, \dots, m$ 
{
  if  $F_{k,l}(H, V)$  kielégíthető
  then output  $F = \overline{A \cup B \cup C \cup D}$ 
}
```

Rekonstrukció 2SAT kifejezésként

Lemma: F hv-konvex polinomiró csakkor ha

$$\overline{F} = A \cup B \cup C \cup D,$$

ahol A, B, C és D diszjunkt sarkok úgy,
hogy

$$(i-1, j-1) \in A \Rightarrow (i, j) \notin D,$$

$$(i-1, j+1) \in B \Rightarrow (i, j) \notin C.$$

$$\text{Con.} = \bigwedge_{i,j} (a_{ij} \Rightarrow \overline{d_{i+1,j+1}} \wedge b_{ij} \Rightarrow \overline{c_{i+1,j-1}})$$

"összefüggőség"

$$F_{k,l}(H, V) := \text{Cor} \wedge \text{Dis} \wedge \text{Con} \wedge \text{Anc} \wedge \text{LBC} \wedge \text{UBR}$$

Összevetés – 4-összefüggő eset

Table 1

Average execution times of the algorithms A_4 , B_4 , C_4 depending on the size of the matrix^a

Size $m \times n$	Algorithm	First solution (s)	All solutions (s)
20×20	A_4	0.003	0.003
	B_4	0.068	0.377
	C_4	0.003	0.006
40×40	A_4	0.007	0.008
	B_4	0.673	6.045
	C_4	0.007	0.008
60×60	A_4	0.015	0.018
	B_4	2.296	28.842
	C_4	0.015	0.018
80×80	A_4	0.027	0.031
	B_4	5.152	92.953
	C_4	0.027	0.031
100×100	A_4	0.042	0.048
	B_4	7.528	190.810
	C_4	0.042	0.048

^a Each set of test data consists of 1000 hv-convex polyominoes generated with the given sizes uniformly.

37

A – mag-burok, B – 2SAT, C – hibrid

Összevetés – 8-összefüggő eset

Table 2

Average execution times of the algorithms A_8 , B_8 , C_8 depending on the size of the matrix^a

Size $m \times n$	Algorithm	First solution (s)	All solutions (s)
20×20	A_8	0.006	0.006
	B_8	0.063	0.359
	C_8	0.007	0.009
40×40	A_8	0.009	0.010
	B_8	0.620	5.952
	C_8	0.009	0.010
60×60	A_8	0.018	0.021
	B_8	2.328	29.274
	C_8	0.022	0.064
80×80	A_8	0.029	0.033
	B_8	5.790	90.548
	C_8	0.029	0.033
100×100	A_8	0.044	0.050
	B_8	10.233	198.854
	C_8	0.044	0.050

^a Each set of test data consists of 1000 hv-convex 8-connected discrete sets.

A – mag-burok, B – 2SAT, C – hibrid