matematikai verseny is. (Lapunk országos versenyei ezek folytatásának tekinthetők.) A felszabadulás után ismét Szegeden Soós Paula lelkes és áldozatkész fáradozása hozott létre feladatíveket, majd SURÁNYI Jánossal megindították a KÖZÉPISKOLAI MATEMATIKAI LAPOK új sorozatát. Az első próbálkozás még sok nehézséggel küzdött és el is akadt. Népi demokráciánk nagy fejlődése azóta lehetővé tette, hogy teljes erővel fogjunk a kultúra fejlesztéséhez is. Így ma a BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT lapjaként már biztos alapokon indul a Lap további útjára.

A középiskolai matematikai folyóiratokat pompásan kiegészítette a vele egyidőben alapított matematikai tanulóverseny, melynek szintén igen nagy része van a matematika fejlődésében Magyarországon. 1894-ben ugyanis a Mathematikai és Physikai Társulat akkori elnökét, báró EÖTVÖS Lórándot, a fizika híres professzorát kultuszminiszterré nevezték ki. Ennek megünnepléséül a Társulat évenként megismétlődő matematikai versenyt szervezett az azévben érettségizett tanulók számára. Az „Eötvös-verseny" és a lapok remekül egészítették ki egymást. A lapok feladatai nyújtották a legjobb előkészületet a versenyre, amelynek nyertesei általában a lapok legszorgalmasabb feladat-megoldói közül kerültek ki.

Ezzel a versenyszervezéssel is remekelt a magyar matematika. A műegyetem kiváló tanárai: KŐNIG Gyula, RADOS Gusztáv és KÜRSCHÁK József szervezték meg a versenyt oly nagyszerűen, hogy külföldön is felfigyeltek rá. A versenyt kezdettől fogva tehetségkutatónak gondolták, tudva, hogy a matematikai tehetség már igen ifjú korban és aránylag csekély előismerettel is feltűnik. A feladatokat tehát ebben a szellemben választották. A francia „Concours général" tanulságai szerint az eredmény igen nagy mértékben függ a feladatok érdekességétől. Ezért sok olyan feladatot tűztek ki, melyek megérthetők matematikai előismeretek nélkül is. A versenyfeladatok között gyakran szerepeltek nagyjelentőségű tételek elemi úton bizonyítható részletei. Ezek széles perspektívát nyitottak, amint ez KÜRSCHÁK jólismert könyvében* feltűnően ki van emelve. KÜRSCHÁK Józsefről nevezte most el a BOLYAI JÁNOS MATEMATIKAI TÁRSULAT felújított versenyeit, melyet továbbra is megrendez minden évben.

Az eredmény nem maradt el. A nyertesek sorában ott találjuk ismert matematikusaink nagy részét FEJÉR Lipóttal, HAAR Alfréddal, RIESZ Marcellel, SZEGŐ Gáborral az élen, hogy csak néhány nevet említsünk. Érdemes ezt összehasonlítani a száz évnél régebben fennálló angol Mathematical Tripos nevű versennyel, melynek nyertesei között CAYLEY az egyetlen elsőrangú matematikus, hogy lássuk a mi versenyeink komoly jelentőségét.

A tanügyi hatóságok is rendeztek évente országos középiskolai tanulmányi versenyeket minden tárgyból, így matematikából is. Ezek színvonala azonban már lényegesen alacsonyabb volt.

Kedves fiatal olvasó! Az elmondottakból láthattad, hogy az elszigetelten dolgozó magyar matematikusnak, BOLYAI Farkasnak keserű panasza, hogy magyar földön nem terem meg a matematika, már rég a múlté. Az ugart felszántották, a palánta megfogamzott, terebélyes fává növekedett és termi gyümölcseit matematikusok, természettudósok, technikusok és rajtuk keresztül az egész magyarság és a haladó népek számára. Rajtad áll, hogy tovább gyarapodjék és a magyar matematika nagy multját és szép jelenét a jövő felülmúlja.

Obláth Richard.

* Kürschák József: *Matematikai versenytételek*, Szeged, 1929., mely az 1928-ig tatott versenyek tételeit és a velük kapcsolatos kérdéseket dolgozza fel.

Bizonyítsuk be Csebysev tételét!

Az első évfolyamban feladatsorozatot indítottunk CSEBYSEV tételének bebizonyítására, mely azonban a lappal együtt abbamaradt. Tekintettel a tétel érdekességére és a bizonyítás egyszerű voltára, most újra elindítjuk. Megoldással közöljük azt a néhány feladatot, melynek megoldása már az első évfolyamban megjelent, a többieket pedig újra ki fogjuk tűzni folytatólagosan.

*

Hallottatok-e a világhírű PAFNUTIJ LVOVICS CSEBYSEV orosz matematikus tételéről? Arról, amelyik azt mondja ki, hogy bármely n egész szám és kétszerese, $2n$ között van legalább egy prímszám. (Pl. 2 és 4 között a 3, 3 és 6 között az 5, 4 és 8 között az 5 is, a 7 is, 5 és 10 között a 7, 6 és 12 között a 7 is, a 11 is. Még akkor is igaz a tétel, ha $n=1$, feltéve, hogy a „közöttet" úgy értjük, hogy $2n$ is beleszámítson; ez ugyanis $n=1$ esetén 2, tehát prímszám, de csak akkor.) Aki hallott róla, az is azt gondolja bizonyosan, hogy borzasztó nehéz lehet ezt a tételt bebizonyítani. Talán csak akkor lehet remélnye az embernek, hogy valaha is megértheti a bizonyítását, ha érettségi után matematikus-hallgatónak iratkozik be az egyetemre, vagy még akkor sem lehet. Pedig illő, hogy legalábbis hazánkban minden, a matematika iránt érdeklődő diák közkincse legyen a CSEBYSEV-tétel, mert ERDŐS PÁL, magyar matematikus, másodéves egyetemi hallgató korában olyan egyszerű bizonyítást adott rá, hogy valamennyien megérthetitek. Nemcsak, hogy megérthetitek, hanem egy kis irányítással magatok is rájöhettek az ő bizonyítására. Kitűzök most és még néhány számban egy-két feladatot; aki ezeket megoldja, végezetül majd be tudja bizonyítani CSEBYSEV tételét. Olyan élménye lesz a bizonyítás, amit egyhamar nem felejt el.

*

A prímszámokra vonatkozó tételek bizonyításának kulcsa mindig egy egyenlet, esetleg egyenlőtlenség, amelynek egyik oldalán az ismeretlen, egyelőre még titokzatos prímszámok szerepelnek, a másik oldalán pedig a jólismert egész számok. CSEBYSEV ilyen kulcs gyanánt LEGENDRE egy azonosságát használja, amely azt mondja meg, hogyan lehet az első n (pozitív) egész szám szorzatát prímtényezőire bontani. Ezt a szorzatot $n!$-sal (mondd: n faktoriális) szokás jelölni; tehát $1! = 1$, $2! = 1.2 = 2$, $3! = 1.2.3 = 6$, $4! = 1.2.3.4 = 24$, stb. Arról nevezetes az $n!$, hogy ennyiféleképpen lehet n diákot egy sorba állítani. De CSEBYSEV nem e miatt a tulajdonsága miatt gondolt arra, hogy $n!$-sal dolgozzék, hanem azért, mert definiciójában az egész számok egyformán szerepelnek, tehát várható, hogy n-nel szabályosan növekszik; de ugyanakkor *szorzat*, tehát várható, hogy könnyű lesz prímtényezőire felbontani, mégpedig mindenféle, kevés és sok törzstényezőből álló számoknak szorzata, tehát várható, hogy törzstényezős felbontásában is lesz valami szabályosság. Ismerkedjünk meg közelebbről $n!$-sal!

1. *Bontsuk fel prímtényezőkre* 10!-*t és* 20!-*t, a nélkül, hogy előbb elvégeznők a szorzást.*

Megoldás:

$$10! = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10 =$$
$$= 2.3.2^2.5.(2.3).7.2^3.3^2.(2.5) = 2^8.3^4.5^2.7,$$

$$20! = 10!.11.12.13.14.15.16.17.18.19.20 =$$
$$= (2^8.3^4.5^2.7).11.(2^2.3).13.(2.7).(3.5).2^4.17.(2.3^2).19.(2^2.5) =$$
$$= 2^{18}.3^8.5^4.7^2.11.13.17.19.$$

2. *Határozzuk meg* 100! *prímtényezős felbontásában* 2, 3, 5 *és* 7 *kitevőjét.*

Megoldás: 100!-t már nemhogy kiszámítani, de még felírni sem volna türelmünk. Mégis el tudjuk képzelni, hogy ha felírnók az első 100 pozitív egész szám szorzataként, akkor úgy kaphatnók meg prímtényezős felbontását, hogy minden egyes (összetett) tényezője helyébe beírnók annak prímtényezős felbontását és a 2, 3, 5, 7 s a többi prímszámok hatványait összegyűjtve, kitevőiket összeadnók. Igy például 2 kitevője azon számok száma 1-től 100-ig, amelyekben a 2 az első hatványon szerepel, hozzáadva azon számok számának kétszeresét, amelyekben a 2 a második hatványon szerepel, meg azon számok háromszorosát, melyekben a harmadik hatványon szerepel, stb. A 2 csak azon számoknak a prímtényezős felbontásában szerepel, amelyek párosak; ilyen van 100-ig 50. De ezek közül 25 osztható 4-gyel, tehát csak a többi 25-ben szerepel az első hatványon a 2. A 25 4-gyel osztható szám közül 12 osztható 8-cal is, tehát csak a többi 13-ban szerepel a második hatványon a 2. A 12 8-cal osztható szám közül 6 osztható 16-tal is, ezek közül 3 32-vel is, ezek közül 1 64-gyel is, úgyhogy 6 olyan szám van, amelyik a harmadik, 3 olyan, amelyik a negyedik, 2 olyan, amelyik az ötödik és 1 olyan (t. i. a 64), amelyik a hatodik hatványon tartalmazza prímtényezős felbontásában a 2-t. E szerint 2 kitevője a 100! prímtényezős felbontásában:

$$25 + 2.13 + 3.6 + 4.3 + 5.2 + 6.1 = 97.$$

Hasonlóan, minthogy 100-ig 33 3-mal osztható szám van, ezek közül 11 osztható 9-cel (tehát a többi 22 tartalmazza a 3-at az első hatványon), 3 osztható 27-tel (tehát a többi 8 tartalmazza a második haványon), 1 oszható 81-gyel (tehát a többi 2 tartalmazza a 3-at a harmadik, ez az 1 pedig a negyedik hatványon), ezért 3 kitevője 100! felbontásában

$$22 + 2.8 + 3.2 + 4.1 = 48.$$

Minthogy 100-ig 20 5-tel osztható és ezek között 4 25-tel osztható szám van, tehát 16 tartalmazza az 5-öt az első, 4 pedig a második hatványon, továbbá, minthogy 100-ig 14 7-tel és ezek között 2 49-cel osztható szám van, tehát 12 tartalmazza a 7-et az első, 2 pedig a második hatványon, ezért 5 kitevője $16 + 2.4 = 24$, 7-é pedig $12 + 2.2 = 16$ a 100! prímtényezős felbontásában. E szerint ez a felbontás így kezdődik:

$$100! = 2^{97}.3^{48}.5^{24}.7^{16}\ldots$$

3. *Hány* 0-*ra végződik* 100! ? *Hát* 1000! ?

Megoldás: Minden szám annyi 0-ra végződik, ahányadik hatványával még osztható a 10-nek. 10^k prímtényezős felbontása $2^k.5^k$, tehát egy szám akkor és csakis akkor osztható vele, ha prímtényezős felbontásában 2 is, 5 is legalább a k-adik hatványon szerepel. A legnagyobb ilyen k a kérdéses szám prímtényezős felbontásában a 2 és az 5 kitevője közül a kisebbik (ha véletlenül egyenlők, akkor közös értékük). Mivel 100! felbontásában 2 kitevője 97, 5-é pedig 24, ezért 100! 24 0-ra végződik. 1000! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 249, mert 1000-ig 200 5-tel, 40 25-tel, 8 125-tel és 1 625-tel osztható szám van, tehát 160 tartalmazza az 5-öt az első, 32 a második, 7 a harmadik és 1 a negyedik hatványon és $160+2\cdot32+3\cdot7+4\cdot1=249$. A 2 kitevője nagyobb ennél, hiszen 1000-ig 500 páros szám van s ezek mindegyike legalább első hatványon tartalmazza a 2-t. Ezért 1000! 249 0-ra végződik.

4. *Határozzuk meg $(2^n)!$ és $(2^n-1)!$ prímtényezős felbontásában a 2 kitevőjét.*

Megoldás: Az $1,2,3,\ldots,2^n$ számok között 2^{n-1} páros van, ezek közül 2^{n-2} 4-gyel osztható, 2^{n-3} 8-cal, 2^{n-4} 16-tal, ..., végül egyetlen egy 2^n-nel osztható. Így közülük $2^{n-1}-2^{n-2}$ tartalmazza a 2-t az első, $2^{n-2}-2^{n-3}$ a második, $2^{n-3}-2^{n-4}$ a harmadik, ..., végül 1 az n-edik hatványon. E szerint a 2 kitevője a $(2^n)!$ prímtényezős felbontásában

$$2^{n-1}-2^{n-2}+2(2^{n-2}-2^{n-3})+3(2^{n-3}-2^{n-4})+\ldots+n\cdot1=$$
$$=2^{n-1}-2^{n-2}+2\cdot2^{n-2}-2\cdot2^{n-3}+3\cdot2^{n-3}-\ldots-(n-1)+n=$$
$$=2^{n-1}+2^{n-2}+2^{n-3}+\ldots+1=2^n-1.$$

Minthogy $(2^n-1)!=(2^n)!:2^n$, azért prímtényezős felbontásában a 2 kitevője n-nel kevesebb, mint $(2^n)!$-ban, vagyis 2^n-n-1.

5. *Fejezzük ki az algebra nyelvén, hogyan határozhatjuk meg $n!$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevőjét.*

Megoldás: Az $1,2,3,\ldots,n$ számok között annyi p-vel osztható van, ahány egész-szer megvan a p az n-ben, azaz $\left[\frac{n}{p}\right]$*, annyi p^2-tel osztható, ahány egész-szer a p^2 megvan az n-ben, azaz $\left[\frac{n}{p^2}\right]$, hasonlóan p^3-nel $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ számú osztható, s. í. t.; végül, ha $p^k\leqq n<p^{k+1}$, akkor p^k-nal $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ számú osztható, p magasabb hatványával azonban egy sem. E szerint az $1,2,3,$

* Olv. „$\frac{n}{p}$ egész része." Ez a legnagyobb olyan egész számot jelenti, mely még nem nagyobb $\frac{n}{p}$-nél. Lásd erre vonatkozólag a 85—89. feladatokat, I. évf. 49—51. és 71—72. lap.

$\ldots, n$ számok között $\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]$ számúnak a prímtényezős felbontása tartalmazza a p-t az első hatványon, $\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^3}\right]$ számúé a másodikon, $\left[\frac{n}{p^3}\right]-\left[\frac{n}{p^4}\right]$ számúé a harmadikon, s. í. t., $\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]$ számúé a $(k-1)$-ediken és $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ számúé a k-adikon. Így az $n!$ prímtényezős felbontásában a p kitevője

$$\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]+2\left(\left[\frac{n}{p^2}\right]-\left[\frac{n}{p^3}\right]\right)+3\left(\left[\frac{n}{p^3}\right]-\left[\frac{n}{p^4}\right]\right)+\ldots+$$
$$+(k-1)\left(\left[\frac{n}{p^{k-1}}\right]-\left[\frac{n}{p^k}\right]\right)+k\left[\frac{n}{p^k}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]-\left[\frac{n}{p^2}\right]+2\left[\frac{n}{p^2}\right]-2\left[\frac{n}{p^3}\right]+$$
$$+3\left[\frac{n}{p^3}\right]-\ldots-(k-1)\left[\frac{n}{p^k}\right]+k\left[\frac{n}{p^k}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots+$$
$$+\left[\frac{n}{p^k}\right]=\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots,$$

ahol az összeg az $\left[\frac{n}{p^k}\right]$ tagon túl is folytatható, hiszen a többi tagja úgyis 0. Az eredményt utólag még így is igazolhatjuk: $\left[\frac{n}{p}\right]$ jelenti az $1,2,3,\ldots,n$ számok közül a p-vel oszthatók, $\left[\frac{n}{p^2}\right]$ a p^2-tel, $\left[\frac{n}{p^3}\right]$ a p^3-nel oszthatók számát, s. í. t. Ha tehát egy szám p-vel osztható, de p^2-tel nem, akkor az $\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\left[\frac{n}{p^3}\right]+\ldots$ összegben csak egyszer vettük számba, t. i. az első tagban; ha p^2-tel osztható, de p^3-nel már nem, akkor kétszer vettük számba, t. i. az első és második tagban; ha p^3-nel is osztható, de p^4-nel nem, akkor háromszor vettük számba, t. i. az első, második és harmadik tagban, és így tovább; minden számot annyiszor vettünk számba, amennyi a prímtényezős felbontásában a p kitevője, így az összeg e kitevők összege, vagyis $n!$ felbontásában p hatványkitevője.

Megjegyzések: A $p^k\leqq n<p^{k+1}$ egyenlőtlenség $k\leqq\frac{\log n}{\log p}={}^p\log n<k+1$ alakban írható; tehát az ennek eleget tevő egész szám $k=\left[\frac{\log n}{\log p}\right]=[{}^p\log n]$.

Numerikusan adott n és p esetén célszerűbb a számítást így berendezni: legyen $\left[\frac{n}{p}\right]=n_1$, $\left[\frac{n_1}{p}\right]=n_2$, $\left[\frac{n_2}{p}\right]=n_3, \ldots$; akkor $n!$ prímtényezős felbontásában a p prímszám kitevője: n_1+n_2+ $+n_3+\ldots+n_k$.

Ugyanis $\left[\frac{n}{p^2}\right]=\left[\frac{\frac{n}{p}}{p}\right]=\left[\frac{\left[\frac{n}{p}\right]}{p}\right]=\left[\frac{n_1}{p}\right]=n_2$, $\left[\frac{n}{p^3}\right]=\left[\frac{\frac{n}{p^2}}{p}\right]=$ $=\left[\frac{\left[\frac{n}{p^2}\right]}{p}\right]=\left[\frac{n_2}{p}\right]=n_3, \ldots,$ mert általában $\left[\frac{x}{p}\right]=\left[\frac{[x]}{p}\right]$*

*

Az 5. feladat megoldásával a Legendre-féle

$$n!=2^{\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\ldots}\cdot 3^{\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]+\left[\frac{n}{27}\right]+\ldots}\cdot 5^{\left[\frac{n}{5}\right]+\left[\frac{n}{25}\right]+\left[\frac{n}{125}\right]+\ldots}\ldots$$

azonosságban (ahol a prímszámok persze n-ig mennek) olyan kulcshoz jutottunk, amely alkalmas egyes, a prímszámokra vonatkozó kérdések megoldására. De vajjon hogyan forgassuk ezt a kulcsot, hogy a Csebysev-tétel nyitját megtaláljuk? Mit kezdjünk $n!$-sal, hogy éppen az n és $2n$ közötti prímszámokról tudósítson bennünket?

Csebysev eredeti bizonyítása egy nagyon bonyolult, az $n!$ segítségével képezett kifejezés vizsgálatán alapul. Erdős (és már előtte az indus Ramanujan is) a Csebysev-féle kifejezés helyett a sokkal egyszerűbb

$$\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{1.2\ldots n(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n.1.2.3\ldots n}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$$

kifejezést használja. Ezt a kifejezést $\binom{2n}{n}$-nel (mondd: $2n$ alatt n) szokás jelölni: általában $\binom{m}{n}$-nel az $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ kifejezést jelöljük. Ez arról nevezetes, hogy egy m tagú osztályból ennyiféleképpen lehet kijelölni egy n tagú küldöttséget, így $\binom{m}{n}$ csak látszólag tört, valójában mindig egész szám az értéke. De Erdős sem azért gondolt arra, hogy $\binom{2n}{n}$ segítségével fogjon hozzá a Csebysev-tétel bizonyításához, mert ha egy $2n$ tagú

* Lásd 85. feladat, I. évf. 49. l.

osztálynak pontosan a felét visszük kirándulni, akkor éppen $\binom{2n}{n}$ féleképpen lehet kijelölni, hogy kik jussanak a kirándulók közé. Hanem azért, mert $\binom{2n}{n}=\frac{(n+1)(n+2)\ldots 2n}{1.2.3\ldots n}$ meg kell, hogy érezze, hogy n és $2n$ között vannak prímszámok. Hiszen ezekkel a prímszámokkal minddel osztható, mert a számlálója osztható velük, de a nevezője nem; az n-ig terjedő prímszámok azonban a nevezőjében is előfordulnak, így ezek közül sok kiesik egyszerűsítés közben. Várható hát, hogy ha feltételezzük, hogy n és $2n$ között nincs prímszám, akkor $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásából sokkal kisebb értéket kapunk $\binom{2n}{n}$ számára, mint amekkora valójában. Ismerkedjünk meg hát közelebbről a $\binom{2n}{n}$-nel!

6. Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor $[2a]-$ $-2[a]$ értéke vagy 0, vagy 1.

7. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ mindig egész szám.

8. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ törzstényezős felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb $2n$-nél. (A hatványról van szó, nem a hatványkitevőről!)

9. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásában a $\sqrt{2n}$-nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek (azaz vagy nem szerepelnek, vagy csak első hatványon).

10. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható a $\frac{2}{3}n$ és n közötti prímszámokkal (n-et beleértve, ha prímszám; $\frac{2}{3}n$-et akkor sem értve bele, ha n osztható 3-mal és $\frac{2}{3}n$ prímszám).

Kalmár László

$a = b \cdot b, a > b^2$, mert $b, a > b$. Mivel a számjegy, ez egyenlőtelenség b-re azt adja, hogy $b^2 a < a \leqq 9$ tehát $b < 3$. $b=1$ nem lehet, mert ez esetben egy egész szám: a egyenlő lenne egy törttel: $1, a$; így $b = 2$.

$b \cdot b, a$ egész számot ad. Ez csak úgy lehet, hogy $b \cdot a$ osztható tízzel. Mivel $b=2$, $a=5$ kell legyen. És valóban: $5:2 = 2, 5$.

II. megoldás: Irjuk a feltételt ilyen alakban:

$$\frac{a}{b} = b + \frac{a}{10}$$

Innen $10a = 10b^2 + ab$ és a-t kifejezve $a = \dfrac{10b^2}{10-b}$.

Itt a egész szám és 10-nél kisebb. Utóbbiból $10 - b > b^2$ kell legyen, tehát b legfeljebb 2. Nem lehet $b=1$, mert akkor a-ra törtet kapnánk, tehát $b=2$, $a=5$.

Bizonyítsuk be Csebysev tételét.

Emlékezzünk, azért kezdtünk $\binom{2n}{n}$-nel foglalkozni, mert azt reméltük, ez a szám megérzi, hogy vannak prímszámok n és $2n$ között; vagyis, ha feltételezzük, hogy n és $2n$ között nincs prímszám, akkor $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásából kisebb érték adódik $\binom{2n}{n}$ számára, mint amekkora valójában. Nézzük meg hát most, milyen egyenlőtlenség adódik $\binom{2n}{n}$ számára a 9. és 10. feladatok megoldásával bizonyított tételek segítségével.

11. Tegyük fel, hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $\binom{2n}{n}$ nem lehet nagyobb, mint $2n$-nek annyiadik hatványa, ahány prímszám van $\sqrt{2n}$-ig, megszorozva a $2n/3$-ig terjedő prímszámok szorzatával.

Ha az így kapott egyenlőtlenséget sikerül megcáfolni, akkor bebizonyítottuk, lehetetlen, hogy ne legyen n és $2n$ között prímszám. Igen ám, de a kapott egyenlőtlenségben még két ismeretlen valami szerepel: a prímszámok száma $\sqrt{2n}$-ig és a prímszámok szorzata $2n/3$-ig. Ezekre próbáljunk olyan egyenlőtlenségeket megállapítani, aminek segítségével a 11. feladatban szereplő egyenlőtlenségből egyszerűbb (de még mindig megcáfolható) egyenlőtlenséget kaphatunk.

12. Mutassuk meg, hogy $n \geqq 14$ esetén n-ig (n-et is beleértve, ha prímszám) legfeljebb $\frac{n}{2} - 1$ számú prímszám van. (Az 1 nem számít prímszámnak.)

A prímszámok szorzatának vizsgálatára megint a $\binom{2n}{n}$-et vesszük igénybe. Hiszen ez osztható az n és $2n$ közötti prímszámokkal, tehát azok szorzatával is.

13. Mutassuk meg, hogy ha n legalább 5, akkor $\binom{2n}{n}$ kisebb, mint 4^{n-1}.

14. Mutassuk meg, hogy ha egyáltalában van n és $2n$ között prímszám, akkor az ilyen prímszámok szorzata kisebb, mint 4^{n-1}. (Itt az $n = 1$ eset kivételével.)

15. Jelöljük P_n-el az n számig terjedő prímszámok szorzatát. Mutassuk meg, hogy $P_n \leqq 4^n$.

16. Tegyük fel ismét, hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $\binom{2n}{n}$ nem lehet nagyobb mint $(2n)^{\frac{\sqrt{2n}}{2}-1} 4^{\frac{2n}{3}}$ feltéve, hogy $n \geqq 100$.

Kalmár László

Új feladatok.

(A síkgörbék fonalas szerkesztéséről, a körsorokról szóló, a Csebysev-tételhez vezető és a Simson-egyenesekre vonatkozó feladatokat lásd a megfelelő cikkeknél.)

177. Milyen n értéktől lesz $\binom{2n}{n} < 4^{n-2}$ ill. $\binom{2n}{n} < 4^{n-3}$?

187. Melyek azok a számok, melyek felírhatók legalább 3 egymásutáni természetes szám összegeként?

188. Legyenek $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{2n-1}, a_{2n}$ tetszőleges egész-számok.

Mutassuk meg, hogy

$$a_1 a_2 \dots a_{2n} (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2n-1}^2 - a_{2n}^2)$$

osztható 6-tal.

Molnár J.

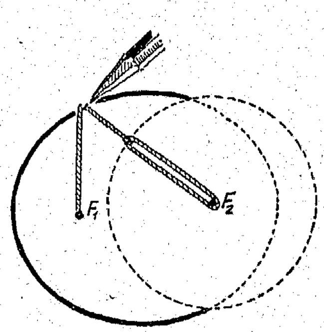
Nem csak két fókusz, hanem három és több fókusz is szerepelhet különböző súlyokkal. A 3. ábra utolsó fonalmenetéről pl. leolvashatjuk, hogy ott az F_1 fókusz egyszeres súlyú, az F_2 3-szoros és í. t. Így a görbe egyenlete: $PF_1 + 3PF_2 + \ldots = k$. (Írjuk be a hiányzó tagokat!)

Az említett görbék mind olyan görbék, melyen fekvő pontoknak az $F_1 F_2, F_3 \ldots F_n$ rögzített pontoktól való távolságaikat adott állandókkal szorozva állandó összeget kapunk, azaz melyekre

$$q_1 PF_1 + q_2 PF_2 + q_3 F_3 + \ldots + q_n PF_n = k,$$

ahol $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$ és k adott állandók. Egy egyenesen fekvő fokuszú ilyen görbék fonalas szerkesztése a XVII. század végén TSCHIRNHAUS hollandi matematikusnál található először[3].

Vizsgáljuk meg most, hogy milyen görbéket kapunk, ha pontok helyébe valamilyen görbét teszünk. Keressük azon pontok geometriai helyét, melyek távolságainak összege egy adott ponttól és egy adott körtől véve állandó (k). Ennek fonalas szerkesztése is egyszerű. A kört helyettesíthetjük egy hurokkal (5. ábra). A fonal egyik végét kössük az F_1-hez, a másik végét pedig a hurokhoz. A fonalat feszítsük ki ceruzánkkal és mozgassuk úgy, hogy a fonal kifeszítve maradjon. Megállapíthatjuk, hogy a görbe vonal, amit kaptunk, egy ellipszis íve. Ugyanis egy tetszőleges P pont távolságainak összege F_1-től és a kör F_2 középpontjától, ha r a kör sugara, $k + r$ és ez állandó. Ha a fonal hossza nagyobb, mint $F_1F_2 + r$, akkor teljes ellipszist kapunk. Ha azonban a fonal hosszát ennél a távolságnál kisebbre vesszük, akkor az ellipszis csak a körig fut. (Hogy folytatódik onnan?) A szerkesztést elvégezhetjük úgy is, hogy hurok helyett F_2 körül r sugárral kört rajzolunk, s az F_1 és F_2-höz rögzített fonal hosszát $k + r$-nek vesszük, de az ellipszist ekkor csak az előre lerajzolt körig rajzolhatjuk.



5. ábra.

Még akkor is meg tudjuk szerkeszteni a görbét, ha egy vagy több fókusz helyébe kör helyett valamilyen más Tschirnhaus-féle görbét teszünk. Például megrajzolhatjuk azon pontok mértani helyét, melyek távolságainak összege egy ponttól és egy Descartes-féle oválistól állandó. Ekkor az oválist a szerkesztéshez föntebb használt fonalmenettel helyettesítjük és a ceruza számára szolgáló hurokhoz, meg az adott ponthoz kötünk adott hosszúságú fonaldarabot.

[3] Műve: „Medicina mentis" (1695. Leipzig, első kiadás: 1686. Amsterdam). A kutatás módszereit vizsgálva példaképpen használja ezeket a görbéket.

Aki kíváncsi a keletkező görbékre, rajzolja meg őket. Ez bizonyosan meg fogja könnyíteni a választ az alábbi kérdésekre:

201. A cikkben nem tárgyaltuk meg teljesen azon pontok geometriai helyét, melyek egy ponttól és egy körtől vett távolságainak összege állandó. Adjuk a kérdés teljes tárgyalását, minden lehetőséget figyelembe véve.

202. Adva legyen két — F_1, F_2 középponttal rendelkező — K_1, K_2 kör. Jelöljük egy tetszőleges pont távolságát a két körtől d_1, ill. d_2-vel.

Mi a mértani helye azon pontoknak, melyekre $d_1 : d_2$ állandó?

Molnár József

Bizonyítjuk be Csebysev tételét (III.)

Az alábbiakban közöljük az 1. számban kitűzött feladatok megoldását.

6. *Mutassuk meg, hogy ha a pozitív szám, akkor* $[2a] - 2[a]$ *értéke vagy 0, vagy 1.*

Megoldás: Ha a egész szám, akkor $2[a] = 2a$ és $[2a] = 2a$, tehát a vizsgálandó különbség $[2a] - 2[a] = 0$.

Ha a nem egész szám, legyen a benne foglalt legnagyobb egész szám: $[a] = a_0$, és így $a = a_0 + x$, ahol $0 < x < 1$. $2[a]$ értéke nem függ x-től, hanem bármely x-re $2[a] = 2a_0$. De $[2a]$ értékét már befolyásolja x értéke, ugyanis

$$[2a] = [2(a_0 + x)] = [2a_0 + 2x] = 2a_0 + [2x],$$

tehát

$$[2a] - 2[a] = 2a_0 + [2x] - 2a_0 = [2x].$$

Ha $2x < 1$, azaz $x < \frac{1}{2}$, akkor $[2x] = 0$, ha $1 \leq 2x < 2$, azaz $\frac{1}{2} \leq x < 1$, akkor $[2x] = 1$.

7. *Mutassuk meg, hogy* $\binom{2n}{n}$ *mindig egész szám.*

Megoldás: Határozzuk meg egy p prímszám kitevőjét a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ kifejezés számlálójában és nevezőjében. Ha az derül ki, hogy a számlálóban minden p prímszám magasabb, vagy legalább akkora kitevőn szerepel, mint a nevezőben, akkor a nevező minden tényezőjével egyszerűsíthetünk és így $\binom{2n}{n}$ értékéül egész számot kapunk.

A számlálóban $(2n)!$-ban egy p prímszám kitevője az 5. feladat megoldásából nyert Legendre-féle azonosság szerint

$$s_p = \left[\frac{2n}{p}\right] + \left[\frac{2n}{2p^2}\right] + \dots$$

A nevezőben $(n!)^2$-ben minden p prímszám kitevője a kétszerese az $n!$-ban szereplő kitevőnek, vagyis

$$n_p = 2\left[\frac{n}{p}\right] + 2\left[\frac{n}{p^2}\right] + \dots$$

A számlálóban és nevezőben levő kitevők különbsége

$$s_p - n_p = \left(\left[\frac{2n}{p}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \left(\left[\frac{2n}{p^2}\right] - 2\left[\frac{n}{p}\right]\right) + \dots \qquad (1)$$

Ez a kifejezés az előző feladatban szereplő $[2a] - 2[a]$ alakú kifejezések összege. Mivel ezeknek értéke 0 vagy 1, így összegük nem lehet negatív szám. Tehát valóban a nevezőben lévő kitevő legfeljebb akkora, mint a számlálóban lévő. Ez viszont az előzőek alapján éppen azt jelenti, hogy $\binom{2n}{n}$ egész szám.

8. *Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ törzstényezős felbontásában egyik prímszám hatványa sem lehet nagyobb $2n$-nél.*

Megoldás: Nézzük meg legfeljebb hányadik hatványon fordulhat elő egy p prímszám. A kitevőben szereplő végtelen sok tagból álló összeg tagjai valahonnan kezdve mind 0-val egyenlők. Honnan? Biztosan eltűnnek a tagok attól a kitevőtől kezdve, amelyre $\frac{2n}{p^r} \geqq 1$ és $\frac{2n}{p^{r+1}} < 1$. A két egyenlőtlenséget összevetve kapjuk, hogy $p^r \leqq 2n < p^{r+1}$. Tehát a fenti (1) kifejezésnek legfeljebb r tagja jön számításba. Ezek a tagok mind 0-val vagy 1-gyel egyenlők, tehát összegük legfeljebb r. Vagyis p legfeljebb r-edik hatványon szerepel, viszont p^r a fenti egyenlőtlenség alapján $2n$-nél kisebb, vagy vele egyenlő.

9. *Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ prímtényezős felbontásában $\sqrt{2n}$-nél nagyobb prímszámok legfeljebb első hatványon szerepelnek.*

Megoldás: Ha $p > \sqrt{2n}$, akkor már $p^2 > 2n$, a 7. feladatban $s_p - n_p$-nek csak egy tagja lehet, ez is vagy 0 vagy 1, tehát $\binom{2n}{n}$ már p^2-tel sem osztható.

10. *Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n}$ nem osztható $\frac{2n}{3}$ és n közötti prímszámokkal, ha $n > 2$.*

Megoldás: Az állítás bizonyítására azt kell igazolnunk, hogy minden olyan p prímszám, ami $\frac{2n}{3}$ és n között van, a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ tört számlálójában és nevezőjében ugyanazon a kitevőn szerepel.

Legyen p egy ilyen prímszám, akkor $2p$ nagyobb $\frac{4n}{3}$-nál, méginkább n-nél, tehát $n!$ tényezői közt már nem fordul elő. Így $n!$ törzstényezői közt p az első hatványon, tehát $(n!)^2$-ben második hatványon szerepel. $(2n)!$-ban p ugyancsak a második hatványon szerepel: ugyanis ha $\frac{2n}{3} < p$, akkor $3p > 2n$, tehát $3p$ nem szerepel a számlálóban, viszont $2p$ még előfordul, hiszen $2p < 2n$. $(2n)!$-nek p-vel osztható tényezői p és $2p$. Szorzatuk $2p^2$, csak akkor lehet p-nek 2-nél magasabb hatványával osztható, ha $p = 2$ volna. Azonban p nagyobb $\frac{2n}{3}$-nál, s így $n \geqq 3$ folytán $p > 2$. $n = 2$ esetén $\binom{4}{2} = 6$ osztható 2-vel, pedig eleget tesz a kívánt egyenlőtlenségnek.

Most már csak a 16. feladatban szereplő egyenlőtlenség megcáfolása van hátra; ha ez sikerül, akkor, legalább is $n \geqq 100$ esetén, képtelenség, hogy ne legyen prímszám n és $2n$ között. Ezért mindenekelőtt azt nézzük meg, minél nem lehet a $\binom{2n}{n}$ kisebb.

17. Mutassuk meg, hogy $\binom{2n}{n} \geqq \frac{4^n}{2n}$.

18. Tegyük fel ismét, hogy $n \geqq 100$ és hogy n és $2n$ között nincs prímszám. Mutassuk meg, hogy akkor $2^{\sqrt{2n}} \leqq (2n)^{\frac{3}{2}}$ kellene legyen.

Ezt az egyenlőtlenséget most már nem lesz nehéz megcáfolnunk. Ugyanis legalább is valamilyen n-től kezdve, a baloldal nagyobb kell, hogy legyen, mint a jobboldal, hiszen n a baloldalon (ha gyökjel alatt is, de mégis csak) a kitevőben szerepel, a jobboldalon meg csak alapként.

19. Mutassuk meg, hogy:

a) ha $u \geqq 4$ és u egész szám, akkor $2^u \geqq 3\,(u+1)$;

b) ha $u \geqq 4$, akkor $2^u > 3\,u$ (akár egész szám az u, akár nem);

c) ha $u \geqq 12$, akkor (megint, akár egész szám az u, akár nem), $2^u \geqq u^3$.

20. Mutassuk meg, hogy $n \geqq 100$ esetén a 18. feladatban szereplő egyenlőtlenség nem állhat.

21. Mutassuk meg, hogy n és $2\,n$ között ($2\,n$-et beleértve) mindig van prímszám; azaz: bizonyítsuk be Csebysev tételét.

No lám, nem is volt nehéz!

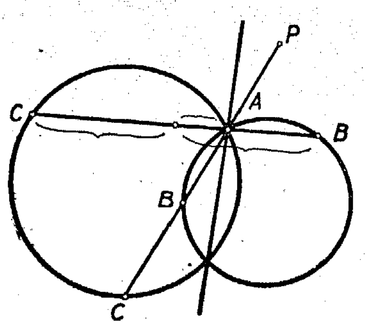
Kalmár László

Feladatmegoldások.

a) Körsorokra vonatkozó feladatok.

1. *Bizonyítsátok be, hogy ha egy P pont nincs rajta két egymást metsző kör hatványvonalán, akkor más lesz a hatványa az egyik és a másik körre nézve.*

Megoldás: Ha a két kör metszi egymást, akkor legyen egyik metszéspontjuk A. Mivel P nincs rajta a két kör közös húrján, sem meghosszabbításán, így a PA egyenes metszi mindegyik kört még egyszer két különböző B és C pontban. Egyikük A-ba is eshet, ha PA érinti az egyik kört. Ha P kívül van a BC közön, akkor $PB \neq PC$ és így $PA \,.\, PB \neq PA \,.\, PC$. Ha P a B és C pont közt van, akkor lehet $PB = PC$, de akkor P elválasztja például a C pontot A-tól és B-től. Ekkor P az A-n és B-n átmenő körön kívül van, az A-n és C-n átmenőnek viszont a belsejében. Egy belső és egy külső pont hatványára viszont soha sem szoktuk azt mondani, hogy egyenlők.



Megkülönböztetésül a belső pont hatványát szokás negatív előjelűnek is venni, annak jelzésére, hogy itt két P-ből ellenkező irányba induló távolság szorzatáról van szó, míg külső pont hatványát a ponttól egyirányba haladó távolságok szorzata adja.

E megoldás kapcsán felvetődik a következő kérdés: Mi a mértani helye azoknak a pontoknak, melyeknek két metsző körre vonatkozó hatványa ellenkező előjellel egyenlő?

2. *Bizonyítsátok be, hogy az A és B pontokon át írható körsort derékszögben metsző k kör az A, B pontokhoz tartozó egyik Apollonius kör.*

Megoldás: Tudjuk, hogy az A és B pontokon átmenő körsort derékszögben metsző kör középpontja rajta van a körsor AB hatványvonalán, és megfordítva, ha egy kör, amelynek középpontja az AB egyenesen van, a körsor egy körét derékszögben metszi, akkor derékszögben metszi az egész körsort. Így elég azt bizonyítanunk, hogy olyan kör, melynek középpontja az AB egyenesen van, és az AB mint átmérő fölé írt kört (a körsor legkisebb körét) derékszögben metszi, az az A és B pontokhoz tartozó egyik Apollonius-kör. Legyen az A és B ponton átmenő kör középpontja O, és a rá merőleges k köré O_1, ennek metszéspontja a két kör centrálisával C és D, a két kör egyik metszéspontja pedig M. A k kört érinti az OM egyenes, így

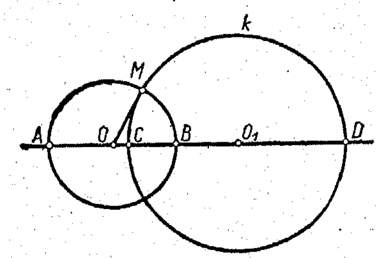
$$OM^2 = OC\,.\,OD \qquad OM = AO,$$

tehát

$$AO^2 = OC\,.\,OD,$$

vagy másképp írva:

$$\frac{AO}{OC} = \frac{OD}{AO}.$$



Ebből kapjuk, hogy

$$\frac{AO + OC}{AO - OC} = \frac{OD + AO}{OD - AO}$$

és minthogy $AO = OB$

$$\frac{AO + OC}{OB - OC} = \frac{OD + AO}{OD - OB},$$

vagy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$