Ein Beitrag zum Entscheidungsproblem.

Von László Kalmár in Szeged.

Einleitung.

Vorliegende Arbeit enthält eine Untersuchung über das Entscheidungsproblem (erster Stufe) der mathematischen Logik, d. h. über das Problem, ein Verfahren aufzufinden, durch welches man von einem beliebigen Zählausdruck entscheiden kann, ob es einen Individuenbereich gibt, wo derselbe erfüllbar[1]) ist und, wenn ja, wie dann ein solcher Individuenbereich beschaffen sein soll.[2]) Obwohl dieses höchst tiefliegende Problem noch sehr weit von einer Lösung steht (gewisse Gründe lassen es sogar vermuten, daß eine vollständige Lösung desselben unmöglich ist[3])), so liegt doch eine

[1]) Statt Erfüllbarkeit kann man hier auch nach Allgemeingültigkeit fragen; oft wird das Entscheidungsproblem in diesem Sinne gefaßt. Beide Fassungen sind einander „dual" und bekanntlich gleichwertig. Wird im folgenden doch eine Unterscheidung der beiden Fassungen des Entscheidungsproblems benötigt, so werden wir für die Fassung des Textes das Wort *Erfüllbarkeitsproblem* gebrauchen.

[2]) Diese schärfere Fassung des Entscheidungsproblems wurde von Bernays und Schönfinkel formuliert: P. Bernays und M. Schönfinkel, Zum Entscheidungsproblem der mathematischen Logik, *Math. Annalen*, **99** (1928), S. 342—372, insb. S. 344. — Indem man von dem trivialen Fall eines leeren Individuenbereiches systematisch absieht, kann die fragliche Beschaffenheit des Individuenbereiches nur in einer unteren Abgrenzung seiner Kardinalzahl bestehen, vgl. a. a. O., S. 344. — In der Terminologie schließen wir uns an die angeführte Arbeit, oder an das Werk: D. Hilbert und W. Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlin, 1928) an.

[3]) In der Tat würde die allgemeine Lösung des Entscheidungsproblems nach K. Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **38** (1931),

Reihe von interessanten Ergebnissen betreffs dieses Problems in der Literatur vor. Diese Ergebnisse sind hauptsächlich von zweierlei Art: 1) zum Teil beziehen sie sich auf die Lösung gewisser *Spezialfälle* des Entscheidungsproblems; 2) zum Teil bestehen sie aber aus gewissen *Reduktionssätzen*, d. h. aus Sätzen, welche die Lösung des Entscheidungsproblems auf die Lösung eines Spezialfalles desselben zurückführen. Die Untersuchungen in den beiden Richtungen verlaufen natürlich parallel; die Ergebnisse erster Art sollen eben den Weg für die Untersuchungen in der zweiten Richtung zeigen.

So läßt sich das Entscheidungsproblem für *endliche* Individuenbereiche, deren Kardinalzahl eine gegebene Anzahl nicht übersteigt, durch ein sehr einfaches klassisches Verfahren[4]) lösen; andererseits darf man sich, vermöge eines Löwenheimschen Satzes[5]) ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf höchstens *abzählbare* Individuenbereiche beschränken. Für Zählausdrücke, welche ausschließlich Funktionen *eines* Argumentes enthalten, wurde das Entscheidungsproblem von Löwenheim (a. a. O. [5]), Satz 4, S. 459—462) und Behmann[6]) gelöst; andererseits lässt sich nach Löwenheim (a. a. O. [5]), Satz 6, S. 463—470) das Entscheidungsproblem auf den Spezialfall zurückführen, daß der gegebene Zählausdruck ein *binärer* ist, d. h. nur logische Funktionen von höchstens *zwei* Argumenten enthält.

Für Zählausdrücke von gewissen speziellen *Formen* wurde das Entscheidungsproblem durch die Untersuchungen von Bernays,

S. 173—198, die Tatsache mit sich bringen, daß gewisse Axiomensysteme, die man bisher als vermutlich widerspruchsfrei betrachtet hat, einen Widerspruch enthalten.

[4]) Vgl. z. B. W. Ackermann, Über die Erfüllbarkeit gewisser Zählausdrücke, *Math. Annalen*, **100** (1928), S. 638—649, insb. S. 640.

[5]) L. Löwenheim, Über Möglichkeiten im Relativkalkül, *Math. Annalen*, **76** (1915), S. 447—470, insb. Satz 2, S. 450—456. Vgl. auch Th. Skolem, *a)* Logisch-kombinatorische Untersuchungen über die Erfüllbarkeit oder Beweisbarkeit mathematischer Sätze usw., *Det Kgl. Norske Videnskapsselskaps Skrifter, Mat.-Naturv. Klasse*, 1920, No. 4, 36 S., insb. S. 3—10; *b)* Über einige Grundlagenfragen der Mathematik, *Skrifter det Norske Videnskaps-Akademi, Oslo, Mat.-Naturv. Klasse*, 1929, No. 4, 49 S., insb. S. 13—28, wobei derselbe Satz 1-23 einfacher und von verschiedenen Gesichtspunkten aus bewiesen ist.

[6]) H. Behmann, Beiträge zur Algebra der Logik, insbesondere zum Entscheidungsproblem, *Math. Annalen*, **86** (1922), S. 163—229, insb. S. 186—210.

SCHÖNFINKEL, ACKERMANN und SKOLEM gelöst. Bekanntlich[7]) kann man jeden Zählausdruck auf eine Normalform bringen, so daß am Anfang ein System von unverneint nebeneinandergestellten Klammerzeichen steht. Wir denken im folgenden jeden Zählausdruck $\mathfrak{A}$ auf diese Normalform gebracht; das voranstehende Klammerzeichensystem nennen wir nach GÖDEL[8]) das *Präfix* von $\mathfrak{A}$. BERNAYS und SCHÖNFINKEL[9]) haben nun zunächst gezeigt, daß in Hinsicht auf das Erfüllbarkeitsproblem diejenigen Zählausdrücke als die einfachsten zu betrachten sind, welche ein Präfix von der Form

$$(1) \qquad (Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_m)(y_1)(y_2)\ldots(y_n)$$

besitzen (m oder n kann auch Null bedeuten), bei denen also kein Allzeichen vor einem Seinzeichen steht; für solche Zählausdrücke läßt nämlich das Erfüllbarkeitsproblem eine höchst einfache Lösung zu. Ferner haben sie eine Lösung des Erfüllbarkeitsproblems für den wesentlich schwierigeren Fall der Zählausdrücke mit einem Präfix von der Form

$$(x)(Ey)$$

erbracht.[10]) Sodann hat ACKERMANN (a. a. O. [4]), S. 644—649) die Erfüllbarkeitsfrage für den allgemeineren Fall eines Präfixes von der Form

$$(2) \qquad (x)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)$$

oder noch allgemeiner

$$(Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_m)(y)(Ez_1)(Ez_2)\ldots(Ez_n)$$

erledigt; für den Fall (2) hat SKOLEM,[11]) unabhängig von ACKERMANN, eine einfachere Lösung gegeben.

Es erhebt sich nun die Frage, ob man nicht einen, diesen BERNAYS—SCHÖNFINKEL—ACKERMANN—SKOLEMschen Resultaten ent-

[7]) Vgl. z. B. HILBERT—ACKERMANN (a. a. O. [2])), S. 63—65.

[8]) K. GÖDEL, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatshefte für Math. und Phys.*, **37** (1930), S. 349—360.

[9]) A. a. O. [2]), S. 359—360; hier wird die duale Formulierung angewandt.

[10]) A. a. O. [2]), S. 360—370 (in dualer Formulierung); vgl. auch ACKERMANN, a. a. O. [4]), S. 641—644.

[11]) TH. SKOLEM, Über die mathematische Logik, *Norsk Matematisk Tidsskrift*, **10** (1928), S. 125—142, insb. S. 135—136. Vgl. auch das Referat von SKOLEM über die in der Fußnote [4]) angeführte Arbeit von ACKERMANN, *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*, **54** (1931), S. 57, wo eine Vereinfachung des ACKERMANNschen Lösungsverfahrens angegeben wurde.

sprechenden Reduktionssatz im obigen Sinne aufstellen kann. Ein solcher Satz sollte also besagen, daß man sich beim Erfüllbarkeitsproblem ohne Einschränkung der Allgemeinheit auf Zählausdrücke mit einem Präfix von einer gewissen speziellen Form beschränken darf. Ein derartiger Satz wurde in der Tat von SKOLEM (a. a. O. [5]) *a*), S. 4—6) bewiesen, indem er gezeigt hat, daß es zu jedem Zählausdruck $\mathfrak{A}$ einen anderen $\mathfrak{A}'$ gibt, so daß das Präfix von $\mathfrak{A}'$ die Form

$$(3) \qquad (x_1)(x_2)\ldots(x_m)(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)$$

besitzt und daß $\mathfrak{A}$ dann und nur dann in einem Individuenbereich erfüllbar ist, falls dasselbe für $\mathfrak{A}'$ gilt.

In der vorliegender Arbeit wird ein anderer Satz dieser Art bewiesen. Ich zeige nämlich, daß *man sich beim Erfüllbarkeitsproblem auf Zählausdrücke beschränken darf, deren Präfix die Form*

$$(4) \qquad (Ex_1)(Ex_2)\ldots(Ex_{m-1})(y_1)(y_2)(Ex_m)(y_3)(y_4)\ldots(y_n)$$

besitzt. Dies dürfte insofern nicht ohne Interesse sein, indem das Präfix (4) viel näher an der — in Hinsicht auf das Erfüllbarkeitsproblem günstigsten — Form (1) steht als das Präfix (3); das letztere könnte man ja, da es in einem gewissen Sinne das Gegenteil von (1) bildet, als die in dieser Hinsicht ungünstigste Präfixenform bezeichnen.

Ausführlicher: wir werden ein Verfahren angeben, welches zu jedem Zählausdruck $\mathfrak{A}$ einen anderen Zählausdruck $\mathfrak{B}$ mit den folgenden Eigenschaften konstruieren läßt:

a) $\mathfrak{B}$ besitzt ein Präfix von der Form (4).

b) Ist $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich I erfüllbar, so ist auch $\mathfrak{B}$ erfüllbar in einem (anderen) Individuenbereich K, welcher durch $\mathfrak{A}$ und I eindeutig bestimmt ist, und zwar derart, daß zu einem endlichen I ein endliches K gehört.

c) Ist $\mathfrak{B}$ in einem Individuenbereich I erfüllbar, so ist $\mathfrak{A}$ in einer gewissen Teilmenge von I (als Individuenbereich) erfüllbar, also auch (vgl. Fußnote [2])) in I selbst.

Dadurch wird das Problem der Erfüllbarkeit von $\mathfrak{A}$ in der Tat auf das entsprechende Problem für $\mathfrak{B}$ zurückgeführt. Denn die Lösung des letzteren kann — gemäß den oben erwähnten Ergebnissen von LÖWENHEIM, BERNAYS und SCHÖNFINKEL (vgl. die Fußnoten [2]) und [5])) — nur eine der folgenden drei Formen haben. Entweder ist $\mathfrak{B}$ überhaupt in keinem Individuenbereich erfüllbar;

oder ist $\mathfrak{B}$ zwar in keinem endlichen, wohl aber in jedem unendlichen Individuenbereich erfüllbar; oder aber gibt es eine endliche Anzahl λ derart, daß $\mathfrak{B}$ in einem Individuenbereich dann und nur dann erfüllbar ist, wenn die Kardinalzahl desselben $\geqq \lambda$ ist. In den beiden ersten Fällen gilt dasselbe für $\mathfrak{A}$; und im dritten Fall ist $\mathfrak{A}$ gewiß in jedem Individuenbereich erfüllbar, deren Kardinalzahl $\geqq \lambda$ ist; es bleibt daher nur die Erfüllbarkeit von $\mathfrak{A}$ in denjenigen Individuenbereichen zu untersuchen, deren Kardinalzahl $< \lambda$ ist und dies führt ja, wie schon erwähnt, auf ein gelöstes Problem.

In **I.** werde ich die Konstruktion von $\mathfrak{B}$ angeben. Sodann werde ich in **II.** diese Konstruktion derart modifizieren, daß auch folgendes bestehe:

d) Der zu einem binären Zählausdruck $\mathfrak{A}$ gehörige Zählausdruck $\mathfrak{B}$ ist auch selbst binär.

Hierdurch wird das Erfüllbarkeitsproblem auf den Spezialfall von *binären* Zählausdrücken mit einem Präfix von der Form (4) zurückgeführt; $\mathfrak{A}$ darf man ja nach einem oben erwähnten LÖWENHEIMschen Ergebnis als binär voraussetzen. Die (wesentlich einfachere) Konstruktion in I. erfüllt die Forderung *d)* nicht, da sie auch mit einer gewissen dreigliedrigen logischen Funktion operiert; und, falls man $\mathfrak{B}$ nach dem LÖWENHEIMschen Verfahren nachträglich in einen binären Zählausdruck überführt, so verliert sein Präfix die Form (4).

I.

1. Es sei ein Zählausdruck $\mathfrak{A}$ gegeben; wir werden einen Zählausdruck $\mathfrak{B}$ konstruieren, welcher die in der Einleitung formulierten Eigenschaften *a), b)* und *c)* besitzt. Wir dürfen voraussetzen, daß $\mathfrak{A}$ ein Präfix von der Form (3) besitzt; sonst würden wir das anzugebende Verfahren auf den aus $\mathfrak{A}$ durch das in der Einleitung erwähnte SKOLEMsche Verfahren entstandenen Zählausdruck anwenden.[12])

[12]) Die Voraussetzung, daß das Präfix von $\mathfrak{A}$ die Form (3) haben soll, dient nur zur formalen Vereinfachung der Schreibweise. Die Konstruktion von $\mathfrak{B}$ kann man auch ohne diese Voraussetzung ausführen; vgl. die Konstruktion in **II**, wobei die fragliche Voraussetzung nicht mehr gestattet ist. Zur praktischen Ausführung der Konstruktion von $\mathfrak{B}$ empfiehlt es sich, den Umweg über das SKOLEMsche Verfahren zu ersparen.

Es sei also $\mathfrak{A}$ von der Form

$$(x_\mu)_1^m (Ey_\nu)_1^n \, \mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

dabei wurden statt $(x_1)(x_2)\ldots(x_m)$ bzw. $(Ey_1)(Ey_2)\ldots(Ey_n)$ die Abkürzungen $(x_\mu)_1^m$, $(Ey_\nu)_1^n$ angewandt; dgl. weiter unter $(y_{\nu\mu})_{1,\,1}^{n,\,m}$ statt $(y_{11})(y_{12})\ldots(y_{1m})(y_{21})(y_{22})\ldots(y_{2m})\ .\ .\ .\ (y_{n1})(y_{n2})\ldots(y_{nm})$. Hier ist $\mathfrak{a}$ ein aus den logischen Funktionszeichen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ und aus den Individuenvariabeln $x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ durch Einsetzung (der Individuenvariabeln in die Leerstellen der Funktionszeichen) und durch die Operationen $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$ des Aussagenkalküls aufgebauter Ausdruck.

Ist $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich I erfüllbar, so gibt es n Funktionen $y_1 = \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $y_2 = \eta_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots$, $y_n = \eta_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ von je m Argumenten, die in I definiert sind und Elemente von I als Werte annehmen[13]), so daß bei geeigneter Definition der logischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ in I die Aussage

$$\begin{aligned}(5)\quad & \mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ & \qquad , \eta_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \eta_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))\end{aligned}$$

für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aus I richtig ist.[14])

2. Es bezeichne I_μ für $\mu = 1, 2, \ldots, m$ die Menge der mathematischen Funktionen (vgl. Fußnote [13])) von μ Argumenten über I; I_0 bezeichne I selbst; ferner sei $K = I_0 + I_1 + I_2 + \ldots + I_m$. Für endliches I ist auch K endlich.[15])

[13]) Solche Funktionen nennen wir *mathematische Funktionen* (Individuenfunktionen) über I (im Gegensatz zu den *logischen Funktionen* (Satzfunktionen)).

[14]) Diese Formulierung der Erfüllbarkeit des Zählausdruckes $\mathfrak{A}$ im Individuenbereich I wurde zuerst von SKOLEM (für Untersuchungen über das Entscheidungsproblems verwertet (a. a. O. [5]), *a)* und *b)*), obwohl schon das von LÖWENHEIM (a. a. O. [5])) angewandte SCHRÖDERsche Verfahren der „Ausführung" von logischen „Summen" auf denselben Gedanken beruht. — Wir wenden ohne Bedenken das Auswahlprinzip an; vgl. hierzu aber die Ausführungen von SKOLEM, a. a. O. [5]) *b)*, § 4 (S. 23—29), welche sich auch auf unseren Fall übertragen lassen.

[15]) Bezeichnet ι die Kardinalzahl von I, dann hat K die Kardinalzahl $\iota + \iota^\iota + \iota^{\iota^2} + \ldots + \iota^{\iota^m}$. Wir legen gar kein Gewicht darauf, diese Kardinalzahl möglichst zu vermindern. Übrigens könnte eine wesentliche Verminderung derselben einerseits durch Identifizierung der Elemente von $I_0 + I_1 + I_2 + \ldots + I_{m-1}$ mit gewissen Elementen von I_m, andererseits durch Beschränkung auf gewisse spezielle (durch die η_ν bestimmte) Funktionen erzielt werden.

Wir definieren nun die logischen Funktionen[16]) $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ (mit einer Leerstelle) und Ψ (mit drei Leerstellen) folgendermaßen in K. $\Phi_\mu(x)$ sei dann und nur dann richtig, falls x zu I_μ gehört $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, m)$; $\Psi(\eta, x, \zeta)$ soll dann und nur dann eine richtige Aussage sein, falls x ein Element von I, η ein Element von einem der $I_1, I_2, \ldots, I_m$, etwa von I_μ, ist und ζ dasjenige (eindeutig bestimmte) Element von $I_{\mu-1}$ ist, für welches die beiden Elemente $\eta(x, x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1})$ und $\zeta(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1})$ (von I) für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ aus I identisch sind.[17])

Dann gilt, I, wie immer (vgl. Fußnote [2])), als nichtleer vorausgesetzt,

$$(6) \qquad (Et)\,\Phi_0(t)$$

und

$$(7) \qquad (u)(v)(Ew)\sum_{\mu=1}^{m}\Big\{\big(\Phi_\mu(u) \,\&\, \Phi_0(v)\big) \rightarrow \big(\Phi_{\mu-1}(w) \,\&\, \Psi(u, v, w)\big)\Big\},$$

wobei das Summenzeichen die Konjunktion der entsprechenden Glieder andeuten soll; in (6) und (7) sollen sich die Klammerzeichen über K erstrecken.

3. Ferner gilt, wenn man die Funktionen η_ν auch mit $y_{\nu 0}$ bezeichnet, die Aussage

$$(8) \qquad \sum_{\nu=1}^{n} \Phi_m(y_{\nu 0}).$$

Setzen wir die in I definierten logischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ nach K durch die Festsetzung fort, daß sie an jeder neuen Stelle eine falsche Aussage repräsentieren; dann gilt, für beliebige Elemente $x_\mu, y_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$ aus K, die Aussage

$$(9) \qquad \left(\sum_{\mu=1}^{m}\Phi_0(x_\mu) \,\&\, \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\Psi(y_{\nu,\mu-1}, x_\mu, y_{\nu\mu})\right) \rightarrow \mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm}).$$

In der Tat, aus dem Vorderglied von (9) folgt, daß die x_μ Ele-

[16]) $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_m, \Psi$ sollen von den in $\mathfrak{A}$ vorkommenden Funktionszeichen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ verschieden sein; desgleichen weiter unten $\Phi_0, \Phi_1, \ldots, \Phi_{m_k}$, $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m_k}$, X_1, X_2, Ω.

[17]) Die Identität zweier Elemente einer Menge werden wir üblicherweise durch das Gleichheitszeichen andeuten. Im Falle $\mu = 1$ soll natürlich statt $\zeta(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1})$ einfach ζ stehen.

mente von I sind und daß die $y_{\nu\mu}$ diejenigen mathematischen Funktionen von $m-\mu$ Argumenten über I bedeuten, für welche bei beliebigen $s_{\mu+1}, s_{\mu+2}, \ldots, s_m$ aus I

$$y_{\nu\mu}(s_{\mu+1}, s_{\mu+2}, \ldots, s_m) = \eta_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_\mu, s_{\mu+1}, s_{\mu+2}, \ldots, s_m)$$

gilt; insbesondere sind die $y_{\nu m}$ Elemente von I und zwar ist für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$y_{\nu m} = \eta_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_m);$$

also gilt nach (5) die Aussage

$$\mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm}).$$

Daher gilt

$$(10) \qquad \left\{\begin{aligned} &(Ey_{\nu 0})_1^n\,(x_\mu)_1^m\,(y_{\nu\mu})_{1,1}^{n,m}\Big\}\sum_{\nu=1}^{n}\Phi_m(y_{\nu 0}) \,\&\\ &\qquad \&\left[\left(\sum_{\mu=1}^{m}\Phi_0(x_\mu) \,\&\, \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\Psi(y_{\nu,\mu-1}, x_\mu, y_{\nu\mu})\right) \rightarrow\right.\\ &\qquad\qquad \left.\rightarrow \mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm})\right]\end{aligned}\right\},$$

wobei die Klammerzeichen sich wieder über K erstrecken.

4. Also gilt bei der obigen Definition der logischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ und $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, \Psi$ in K die Konjunktion der Aussagen (6), (7) und (10); diese Konjunktion läßt sich aber auf die Normalform

$$(11) \qquad \left\{\begin{aligned} &(Et)(Ey_{\nu 0})_1^n\,(u)(v)(Ew)\,(x_\mu)_1^m\,(y_{\nu\mu})_{1,1}^{n,m}\Big\}\Phi_0(t) \,\&\\ &\qquad \& \sum_{\mu=1}^{m}\Big[\big(\Phi_\mu(u) \,\&\, \Phi_0(v)\big) \rightarrow \big(\Phi_{\mu-1}(w) \,\&\, \Psi(u, v, w)\big)\Big] \,\&\\ &\& \sum_{\nu=1}^{n}\Phi_m(y_{\nu 0}) \,\&\left[\left(\sum_{\mu=1}^{m}\Phi_0(x_\mu) \,\&\, \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{m}\Psi(y_{\nu,\mu-1}, x_\mu, y_{\nu\mu})\right) \rightarrow\right.\\ &\qquad\qquad \left.\rightarrow \mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm})\right]\end{aligned}\right\}$$

bringen.[18])

Betrachtet man nun $F_1, F_2, \ldots, F_l, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, \Psi$ wiederum als Zeichen für variable Funktionen, so wird (11) ein Zählausdruck; wir nennen denselben $\mathfrak{B}$. Dann besitzt $\mathfrak{B}$ offenbar

[18]) Vgl. Gödel, a. a. O. [8]), S. 351, Hilfssatz 4.

von den in der Einleitung formulierten Eigenschaften *a), b), c)* die erste; und die Eigenschaft *b)* wurde eben bewiesen. Es bleibt daher nur der Beweis der Eigenschaft *c)* übrig.

5. Es sei nun der Zählausdruck $\mathfrak{B}$ in einem Individuenbereich I erfüllbar. Dann kann man also die logischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_l, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m, \Psi$ derart in I definieren, daß (6), (7) und (10) je eine richtige Aussage repräsentieren, falls die Klammerzeichen sich über I erstrecken. Es sei L die Menge derjenigen Elemente t von I, für die $\Phi_0(t)$ besteht. Wir zeigen, daß der Zählausdruck $\mathfrak{A}$ im (wegen (6) nicht leeren) Individuenbereich L erfüllbar ist.

Wegen (7) gibt es eine mathematische Funktion $w = \psi(u, v)$ über I, welches, falls u eine der Aussagen $\Phi_1(u), \Phi_2(u), \ldots, \Phi_m(u)$, etwa $\Phi_\mu(u)$ erfüllt und v zu L gehört, der beiden Aussagen $\Phi_{\mu-1}(\psi(u, v))$ und $\Psi(u, v, \psi(u, v))$ genügt. Ferner gibt es wegen (10) solche Elemente $y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ von I, welche die Aussagen

$$(12) \qquad \Phi_m(y_{10}), \Phi_m(y_{20}), \ldots, \Phi_m(y_{n0})$$

erfüllen und so beschaffen sind, daß, so oft $x_1, x_2, \ldots, x_m$ Elemente von L sind und $y_{\nu\mu}$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$ derart aus I gewählt werden, daß die Aussagen

$$(13) \qquad \Psi(y_{\nu, \mu-1}, x_\mu, y_{\nu\mu}) \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots, n)$$

sämtlich richtig sind, so gilt auch die Aussage

$$\mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm}).$$

Man wähle nun der Reihe nach für $\nu = 1, 2, \ldots, n$

$$y_{\nu 1} = \psi(y_{\nu 0}, x_1),\ y_{\nu 2} = \psi(y_{\nu 1}, x_2), \ldots, y_{\nu m} = \psi(y_{\nu, m-1}, x_m);$$

dann gelten wegen (12) die Aussagen

$$\Phi_{m-1}(y_{\nu 1}), \Phi_{m-2}(y_{\nu 2}), \ldots, \Phi_0(y_{\nu m}) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und auch die Aussagen (13) sind erfüllt. Insbesondere gelten die Aussagen $\Phi_0(y_{1m}), \Phi_0(y_{2m}), \ldots, \Phi_0(y_{nm})$; d. h. $y_{1m}, y_{2m}, \ldots, y_{nm}$ sind Elemente von L. Wir haben also n mathematische Funktionen über L definiert:

$$\begin{aligned}
y_{1m} &= \psi(\ldots \psi(\psi(y_{10}, x_1), x_2) \ldots, x_m) = \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
y_{2m} &= \psi(\ldots \psi(\psi(y_{20}, x_1), x_2) \ldots, x_m) = \eta_2(x_1, x_2, \ldots, x_m),\\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\\
y_{nm} &= \psi(\ldots \psi(\psi(y_{n0}, x_1), x_2) \ldots, x_m) = \eta_n(x_1, x_2, \ldots, x_m),
\end{aligned}$$

derart, daß für beliebige Elemente $x_1, x_2, \ldots, x_m$ von L die Aussage

$$\mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_m;\ \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_m), \\ \eta_2(x_1, x_2, \ldots, x_m), \ldots, \eta_n(x_1, x_2, \ldots, x_m))$$

gültig ist. Daher ist der Zählausdruck $\mathfrak{A}$ im Individuenbereich L erfüllbar, wodurch auch die Eigenschaft *c)* bewiesen ist.

II.

6. Es sei ein *binärer* Zählausdruck $\mathfrak{A}$ gegeben; wir werden einen Zählausdruck $\mathfrak{B}$ konstruieren, welcher wieder binär ist und auch die Eigenschaften *a), b), c)* besitzt. $\mathfrak{A}$ ist von der Form[19])

$$(x_{\mu_1})_1^{m_1}(Ey_{\nu_1})_1^{n_1}(x_{\mu_2})_{m_1+1}^{m_2}(Ey_{\nu_2})_{n_1+1}^{n_2} \ldots (x_{\mu_k})_{m_{k-1}+1}^{m_k}(Ey_{\nu_k})_{n_{k-1}+1}^{n_k}\ \mathfrak{a}(F_1, \\ F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_{m_k};\ y_1, y_2, \ldots, y_{n_k}),$$

wobei $\mathfrak{a}$ einen aus den ein- und zweistelligen logischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_l$ und aus den Individuenvariabeln $x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}$; $y_1, y_2, \ldots, y_{n_k}$ durch Einsetzung und durch Anwendung der Operationen $\overline{}$, &, $\vee$, $\rightarrow$ aufgebauten Ausdruck bezeichnet. (Im Falle $m_1 = 0$ bzw. $n_k = n_{k-1}$ soll $(x_{\mu_1})_1^{m_1}$ bzw. $(Ey_{\nu_k})_{n_{k-1}+1}^{n_k}$ wegbleiben und auch an den übrigen Formeln weiter unten sollen evidente Modifikationen angebracht werden.)

Es sei $\mathfrak{A}$ in einem Individuenbereich I erfüllbar; dann gibt es n_k mathematische Funktionen über I:

$$\begin{aligned}
&y_1 = \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}),\ y_2 = \eta_2(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}),\\
&\qquad\qquad \ldots, y_{n_1} = \eta_{n_1}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}),\\
&y_{n_1+1} = \eta_{n_1+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_2}),\ y_{n_1+2} = \eta_{n_1+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_2}),\\
&\qquad\qquad \ldots, y_{n_2} = \eta_{n_2}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_2});\\
&\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\\
&y_{n_{k-1}+1} = \eta_{n_{k-1}+1}(x_1, x_2, \ldots x_{m_k}),\ y_{n_{k-1}+2} = \eta_{n_{k-1}+2}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}),\\
&\qquad\qquad \ldots, y_{n_k} = \eta_{n_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k});
\end{aligned}$$

so daß, bei einer geeigneten Definition der logischen Funktionen

[19]) Wir dürfen jetzt nicht mehr voraussetzen, daß das Präfix von $\mathfrak{A}$ die Form (3) besitzt; denn das in der Einleitung erwähnte SKOLEMsche Verfahren, welches $\mathfrak{A}$ in einem in Bezug auf die Erfüllbarkeit gleichwertigen Zählausdruck mit einem Präfix von der Form (3) überführt, hebt den binären Charakter von $\mathfrak{A}$ auf. (Und die LÖWENHEIMsche Konstruktion, welche wiederum zu einem binären Zählausdruck führt, zerstört die Form des Präfixes.)

$F_1, F_2, \ldots, F_l$ in I, für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}$ aus I die Aussage

$$\mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l; x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}; \eta_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}), \ldots, \eta_{n_k}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_k})) \tag{14}$$

besteht.[20])

7. Bezeichnen wir wieder, für $\mu = 1, 2, \ldots, m_k$, die Menge der mathematischen Funktionen von μ Argumenten über I mit I_μ; ferner bezeichne I'_μ für $\mu = 1, 2, \ldots, m_k$ die Menge aller geordneten Paare (η, x), wo η zu I_μ und x zu I gehört. Endlich sei, abweichend von der Definition von K in **I**, $K = I + I_1 + I_2 + \ldots + I_{m_k} + I'_1 + I'_2 + \ldots + I'_{m_k}$.

Die logischen Funktionen $\Phi_0, \Phi_\mu, \Phi'_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, m_k)$ (von einem Argument) und $\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \Omega$ (von zwei Argumenten) seien in K wie folgt definiert. $\Phi_\mu(x)$ bestehe dann und nur dann, falls x zu I_μ gehört (wobei I_0 wieder I selbst bezeichnet); $\Phi'_\mu(x)$ soll dann und nur dann bestehen, falls x ein Element von I'_μ ist. $\mathrm{X}_1(w, \eta)$ sei dann und nur dann richtig, falls η zu einem der I_μ, w zum entsprechenden I'_μ gehört und zwar von der Form (η, x) ist (x Element von I); $\mathrm{X}_2(w, x)$ bestehe dann und nur dann, falls x ein Element von I, w ein Element eines der I'_μ und zwar von der Form (η, x) ist, wobei η zum entsprechenden I_μ gehört. Endlich soll $\Omega(w, \zeta)$ dann und nur dann eine richtige Aussage repräsentieren, falls w ein Element (η, x) von einem der I'_μ ist (also η Element von I_μ, x Element von I) und ζ dasjenige (eindeutig bestimmte) Element des entsprechenden $I_{\mu-1}$ ist, für welches die beiden Elemente $\eta(x, x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1})$ und $\zeta(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1})$ von I für alle Werte von $x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$ aus I identisch sind.

Dann gelten die beiden Aussagen

$$(Et)\,\Phi_0(t) \tag{15}$$

und

$$\left\{\begin{aligned} &(u)(v)(Ew) \sum_{\mu=1}^{m_k} \Big\{\Big[\big(\Phi_\mu(u) \,\&\, \Phi_0(v)\big) \rightarrow \\ &\qquad\qquad \rightarrow \big(\Phi'_\mu(w) \,\&\, \mathrm{X}_1(w, u) \,\&\, \mathrm{X}_2(w, v)\big)\Big] \,\& \\ &\qquad\qquad \& \Big[\Phi'_\mu(u) \rightarrow \big(\Phi_{\mu-1}(w) \,\&\, \Omega(u, w)\big)\Big]\Big\}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

wobei die Klammerzeichen sich über K erstrecken.

[20]) Vgl. Fußnote [14]).

8. Es gilt ferner die Aussage

$$\left\{\begin{aligned} &(Ey_{\nu 0})_1^{n_k} (x_\mu)_1^{m_k} (y_{\nu_1 \mu_1})_{1,\ 1}^{n_1,\ m_1} (y_{\nu_2 \mu_2})_{n_1+1,\ 1}^{n_2,\ m_2} \ldots (y_{\nu_k \mu_k})_{n_{k-1}+1,\ 1}^{n_k,\ m_k} \\ &\quad (z_{\nu_1 \mu_1})_{1,\ 1}^{n_1,\ m_1} (z_{\nu_2 \mu_2})_{n_1+1,\ 1}^{n_2,\ m_2} \ldots (z_{\nu_k \mu_k})_{n_{k-1}+1,\ 1}^{n_k,\ m_k} \\ &\qquad \Big\{ \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\nu_\varkappa = n_{\varkappa-1}+1}^{n_\varkappa} \Phi_{m_\varkappa}(y_{\nu_\varkappa 0}) \,\&\, \Big\} \Big[\sum_{\mu=1}^{m_k} \Phi_0(x_\mu) \,\& \\ &\qquad \& \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\nu_\varkappa = n_{\varkappa-1}+1}^{n_\varkappa} \sum_{\mu_\varkappa=1}^{m_\varkappa} \Big(\mathrm{X}_1(z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa, \mu_\varkappa - 1}) \,\& \\ &\qquad\qquad \& \mathrm{X}_2(z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, x_{\mu_\varkappa}) \,\&\, \Omega(z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}) \Big) \Big] \rightarrow \\ &\qquad \rightarrow \mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_{m_k};\ y_{1 m_1}, \ldots, y_{n_1 m_1}, \\ &\qquad\qquad\qquad \ldots, y_{n_{k-1}+1, m_k}, \ldots, y_{n_k m_k}) \Big\} \Big\} \end{aligned}\right. \tag{17}$$

(n_0 bedeutet 0, die Klammerzeichen erstrecken sich wieder über K). Wählt man nämlich der Reihe nach $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n_k}$ für $y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n_k 0}$, so werden zunächst für

$$\nu_1 = 1, 2, \ldots, n_1;\ \nu_2 = n_1 + 1, n_1 + 2, \ldots, n_2;\ \ldots;\ \nu_k = n_{k-1} + 1, n_{k-1} + 2, \ldots, n_k$$

bzw. Aussagen

$$\Phi_{m_1}(y_{\nu_1 0}),\ \Phi_{m_2}(y_{\nu_2 0}), \ldots, \Phi_{m_k}(y_{\nu_k 0})$$

erfüllt. Es seien ferner x_μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m_k)$ und $y_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k;\ \nu_\varkappa = n_{\varkappa-1} + 1, n_{\varkappa-1} + 2, \ldots, n_\varkappa,\ \mu_\varkappa = 1, 2, \ldots, m_\varkappa)$ solche Elemente von K, welche die Aussagen

$$\Phi_0(x_\mu);\ \mathrm{X}_1(z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa, \mu_\varkappa - 1}),\ \mathrm{X}_2(z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, x_{\mu_\varkappa}),\ \Omega(z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}, y_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa})$$

erfüllen, sonst aber beliebig sind. Dann gehören die x_μ zu I; ferner ist $z_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}$ mit dem geordneten Paar $(y_{\nu_\varkappa, \mu_\varkappa - 1}, x_{\mu_\varkappa})$ identisch; endlich ist $y_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}$ diejenige mathematische Funktion von $m_\varkappa - \mu_\varkappa$ Argumenten über I, für welche bei beliebigen $s_{\mu_\varkappa+1}, s_{\mu_\varkappa+2}, \ldots, s_{m_\varkappa}$ aus I

$$y_{\nu_\varkappa \mu_\varkappa}(s_{\mu_\varkappa+1}, s_{\mu_\varkappa+2}, \ldots, s_{m_\varkappa}) = \eta_{\nu_\varkappa}(x_1, x_2, \ldots, x_{\mu_\varkappa}, s_{\mu_\varkappa+1}, s_{\mu_\varkappa+2}, \ldots, s_{m_\varkappa})$$

besteht; insbesondere ist also für $\nu_\varkappa = n_{\varkappa-1} + 1, n_{\varkappa-1} + 2, \ldots, n_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$

$$y_{\nu_\varkappa m_\varkappa} = \eta_{\nu_\varkappa}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_\varkappa}).$$

Daher gilt dann wegen (14) die Aussage

$$\mathfrak{a}(F_1, F_2, \ldots, F_l;\ x_1, x_2, \ldots, x_{m_\varkappa};\ y_{1 m_1}, \ldots, y_{n_1 m_1}, \ldots, y_{n_{k-1}+1, m_k}, \ldots, y_{n_k m_k}). \tag{18}$$

9. Hieraus folgt, daß die Konjunktion der Aussagen (15), (16) und (17), oder, auf Normalform gebracht (vgl. Fußnote [18])), die folgende Aussage erfüllt ist:

$$
\left\{
\begin{aligned}
&(Et)\,(Ey_{\nu 0})_1^{n_k}\,(u)\,(v)\,(Ew)\,(x_\mu)_1^{m_k} \\
&\left.\begin{aligned}
&(y_{\nu_1\mu_1})_{1,\ 1}^{n_1,\ m_1}\,(y_{\nu_2\mu_2})_{n_1+1,\ 1}^{n_2,\ \ m_2}\ldots(y_{\nu_k\mu_k})_{n_{k-1}+1,\ 1}^{n_k,\ \ m_k} \\
&(z_{\nu_1\mu_1})_{1,\ 1}^{n_1,\ m_1}\,(z_{\nu_2\mu_2})_{n_1+1,\ 1}^{n_2,\ \ m_2}\ldots(z_{\nu_k\mu_k})_{n_{k-1}+1,\ 1}^{n_k,\ \ m_k}
\end{aligned}\right\}\Phi_0(t)\ \& \\
&\qquad \& \sum_{\mu=1}^{m_k}\Big\{\Big[\big(\Phi_\mu(u)\,\&\,\Phi_0(v)\big)\rightarrow \\
&\qquad\qquad\qquad \rightarrow\big(\Phi'_\mu(w)\,\&\,X_1(w,u)\,\&\,X_2(w,v)\big)\Big]\ \& \\
&\qquad\qquad \&\ \Big[\Phi'_\mu(u)\rightarrow\big(\Phi_{\mu-1}(w)\,\&\,\Omega(u,w)\big)\Big]\Big\}\ \& \\
&\qquad \& \sum_{\varkappa=1}^{k}\ \sum_{\nu_\varkappa=n_{\varkappa-1}+1}^{n_\varkappa}\Phi_{m_k}(y_{\nu_\varkappa 0})\ \&\ \Big\{\Big[\sum_{\mu=1}^{m_k}\Phi_0(x_\mu)\ \& \\
&\qquad \& \sum_{\varkappa=1}^{k}\ \sum_{\nu_\varkappa=n_{\varkappa-1}+1}^{n_\varkappa}\ \sum_{\mu_\varkappa=1}^{m_\varkappa}\big(X_1(z_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa},y_{\nu_\varkappa,\mu_\varkappa-1})\ \& \\
&\qquad\qquad\qquad \&\ X_2(z_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa},x_{\mu_\varkappa})\,\&\,\Omega(z_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa},y_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa})\big)\Big]\rightarrow \\
&\qquad\qquad \rightarrow\mathfrak{a}(F_1,F_2,\ldots,F_l;\ x_1,x_2,\ldots,x_{m_k};\ y_{1m_1},\ldots,y_{n_k m_k})\Big\}\Big\}.
\end{aligned}
\right.
$$

Diese Aussage fassen wir wieder als einen Zählausdruck auf, indem wir $F_1, F_2, \ldots, F_l, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m_k}, \Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_{m_k}, X_1, X_2, \Omega$ wiederum als Funktionsvariable betrachten. Dieser Zählausdruck — wir nennen ihn $\mathfrak{B}$ — besitzt offenbar die Eigenschaft *a)* und nach dem eben bewiesenen auch die Eigenschaft *b)*; außerdem ist er auch binär.

10. Um auch die Eigenschaft *c)* für den Zählausdruck $\mathfrak{B}$ zu beweisen, nehmen wir an, daß derselbe in einem Individuenbereich I erfüllbar ist. Daraus folgt, daß die Aussagen (15), (16) und (17) bei geeigneter Wahl der logischen Funktionen $F_1, F_2, \ldots, F_l, \Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_{m_k}, \Phi'_1, \Phi'_2, \ldots, \Phi'_{m_k}, X_1, X_2, \Omega$ richtig werden; die Klammerzeichen erstrecken sich dabei über I. Wegen (15) ist die durch die Aussagenfunktion $\Phi_0(t)$ charakterisierte Teilmenge L von I nicht leer. Wir zeigen, daß der Zählausdruck $\mathfrak{A}$ im Individuenbereich L erfüllbar ist.

Wegen (16) gelten die beiden Aussagen

$$(u)\,(v)\,(Ew)\sum_{\mu=1}^{m_k}\Big\{\big(\Phi_\mu(u)\,\&\,\Phi_0(v)\big)\rightarrow\big(\Phi'_\mu(w)\,\&\,X_1(w,u)\,\&\,X_2(w,v)\big)\Big\}$$

und

$$(u)\,(Ew)\sum_{\mu=1}^{m_k}\Big\{\Phi'_\mu(u)\rightarrow\big(\Phi_{\mu-1}(w)\,\&\,\Omega(u,w)\big)\Big\}.$$

Es gibt also eine mathematische Funktion $\varphi(u,v)$ derart, daß, falls u eine der Aussagen $\Phi_\mu(u)$ $(\mu=1,2,\ldots,m_k)$ erfüllt und v zu L gehört, die Aussagen $\Phi'_\mu(\varphi(u,v))$, $X_1(\varphi(u,v),u)$, $X_2(\varphi(u,v),v)$ gelten, ferner gibt es eine mathematische Funktion $\chi(u)$ derart, daß, falls für u eine der Aussagen $\Phi'_\mu(u)$ gilt, dann auch die Aussagen $\Phi_{\mu-1}(\chi(u))$ und $\Omega(u,\chi(u))$ erfüllt sind. Wegen (17) gibt es gewisse Elemente $y_{\nu 0}=y_\nu$ $(\nu=1,2,\ldots,n_k)$ von I, für welche die Aussagen

$$
\begin{gathered}
\Phi_{m_1}(y_1),\Phi_{m_1}(y_2),\ldots,\Phi_{m_1}(y_{n_1}),\Phi_{m_2}(y_{n_1+1}),\Phi_{m_2}(y_{n_1+2}),\ldots,\Phi_{m_2}(y_{n_2}),\\
\ldots,\ \Phi_{m_k}(y_{n_{k-1}+1}),\ \Phi_{m_k}(y_{n_{k-1}+2}),\ldots,\Phi_{m_k}(y_{n_k})
\end{gathered}\tag{19}
$$

richtig sind und die auch die folgende Beschaffenheit haben. Wenn $x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}$ beliebige Elemente von L sind, wenn ferner die Elemente $y_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa}$ $(\nu_\varkappa=n_{\varkappa-1}+1, n_{\varkappa-1}+2, \ldots, n_\varkappa,\ \mu_\varkappa=1,2,\ldots,m_\varkappa;\ \varkappa=1,2,\ldots,k)$ von I so gewählt werden, daß die Aussagen

$$X_1(z_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa},y_{\nu_\varkappa,\mu_\varkappa-1}),\ X_2(z_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa},x_{\mu_\varkappa}),\ \Omega(z_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa},y_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa})$$

erfüllt sind, dann gilt für diese Elemente auch die Aussage (18). Nun kann man zu beliebigen Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_{m_k}$ von L solche $y_{\nu_\varkappa\mu_\varkappa}$ finden; nach dem Vorangehenden genügt es nämlich hierzu der Reihe nach

$$
\begin{gathered}
z_{\nu_\varkappa 1}=\varphi(y_{\nu_\varkappa 0},x_1),\ y_{\nu_\varkappa 1}=\chi(z_{\nu_\varkappa 1});\ z_{\nu_\varkappa 2}=\varphi(y_{\nu_\varkappa 1},x_2),\ y_{\nu_\varkappa 2}=\chi(z_{\nu_\varkappa 2}),\\
\ldots,\ z_{\nu_\varkappa m_\varkappa}=\varphi(y_{\nu_\varkappa,m_\varkappa-1},x_{m_\varkappa}),\ y_{\nu_\varkappa m_\varkappa}=\chi(z_{\nu_\varkappa m_\varkappa})\\
(\nu_\varkappa=n_{\varkappa-1}+1,\ n_{\varkappa-1}+2,\ldots,n_\varkappa \text{ für } \varkappa=1,2,\ldots,k)
\end{gathered}
$$

zu wählen. Wegen (19) gilt dann der Reihe nach

$$
\begin{gathered}
\Phi'_{m_\varkappa}(z_{\nu_\varkappa 1}),\ \Phi_{m_\varkappa-1}(y_{\nu_\varkappa 1}),\ \Phi'_{m_\varkappa-1}(z_{\nu_\varkappa 2}),\ \Phi_{m_\varkappa-2}(y_{\nu_\varkappa 2}),\\
\ldots,\ \Phi_1(z_{\nu_\varkappa m_\varkappa}),\ \Phi_0(y_{\nu_\varkappa m_\varkappa}),
\end{gathered}
$$

d. h. die durch die Festsetzungen

$$y_{\nu_\varkappa m_\varkappa} = \chi(\varphi(\ldots \chi(\varphi(\chi(\varphi(y_{\nu_\varkappa 0}, x_1)), x_2)) \ldots, x_{m_\varkappa})) =$$
$$= \eta_{\nu_\varkappa}(x_1, x_2, \ldots, x_{m_\varkappa})$$

werden n_k mathematische Funktionen über L definiert, welche die Aussage (14) erfüllen. Damit ist die Erfüllbarkeit des Zählausdruckes $\mathfrak{A}$ im Individuenbereich L und somit die Eigenschaft *c)* bewiesen.

(*Eingegangen am 22. Dezember 1931.*)