HOZZÁSZÓLÁS

SZELE TIBOR előadásához

RÉDÉI LÁSZLÓ lev. tag:

Szele Tibor elhangzott előadásában kitűnő ismertetést adott az utóbbi években végzett hazai fontosabb algebrai kutatásainkról. Néhány apró, kiegészítő megjegyzésen kívül hozzászóló azt az észrevételt teszi, hogy kutatóink a csoportelméleten kívül az algebra egyéb ágait is szinte hasonló mértékben művelték, így a gyűrűelméletben éppen *Szele Tibornak* is becses kutatásai vannak, s igen jelentősek *Fuchs László* idevágó vizsgálatai. Egyébként pedig sokszor megítélés dolga, hogy egy-egy vizsgálatot hova számítunk, így például *Hajós György* csoportelméleti tétele a gyűrűelméletbe is tartozik. Egyáltalán az algebra fejezetei egymástól alig határolhatók el. Hazánkban az algebrának régi, érdemekben gazdag multja van, elég erre nézve *Hunyadi Jenő, König Gyula, Kürschák József, Bauer Mihály* nevét említeni. Mai algebristáink is jólesö megnyugvással elmondhatják, hogy sikeres munkával ápolták a tradiciókat. Örvendetes idősebb s fiatal algebristáinknak nagy száma, főleg az elmult évtizedekkel való összehasonlításban, amikor ismert különböző okokból sok tudós volt kénytelen kivándorolni az országból. Nem véletlen, hogy a Magyar Tudományos Akadémiának támogatása, s ezen keresztül Népi Demokráciánknak tudománypártoló politikája meghozta áldásos gyümölcsét. Mint mindennemű tudományos kutatóinkat, úgy bennünket algebristákat is a tudománynak ez a megbecsülése sarkaljon további munkára.

A MATEMATIKA ALAPJAIVAL KAPCSOLATOS ÚJABB EREDMÉNYEK

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

A tudomány célja a valóság megismerése, avégett, hogy a valóságot az emberiség általános jólétének megvalósítása és fokozása érdekében megváltoztathassuk. E cél felé való törekvésben fontos szerepe van a matematikának: absztrakció segítségével megállapítani az anyagi világ térformáinak és mennyiségi viszonyainak különböző körülmények között egyaránt érvényes törvényeit. A matematika az elméleti természettudományok nélkülözhetetlen eszköze; ezek nélkül pedig a kísérleti természettudós sötétben tapogatódznék, legfeljebb rutinjára bízhatná magát.

Ha azonban megnézzük a matematikusnak munkamódszerét, amikor a kísérleti természettudós számára az utat megvilágító elmélet építése során egy-egy problémát igyekszik megoldani, akkor azt látjuk, hogy ő maga többnyire sötétben tapogatódzó, pusztán rutinjára támaszkodó kísérleti módszerrel dolgozik. Ötletszerűen végigpróbálja a felvetődő gondolatokat, hátha valamelyik célhoz vezet. Vajjon nem lehetséges-e olyan tudomány, amely eközben utat mutasson a matematikusnak, hasonlóan, mint ahogyan a matematika és a rá épülő elméleti természettudományok, elsősorban az elméleti fizika, utat mutat a kísérleti természettudósnak a maga kísérletezése közben?

Ilyen tudomány szerepét van hivatva betölteni *a matematika alapjainak tudománya.* Hogy teljesen betölthesse, a matematika különböző területein dolgozó matematikusok matematizálásának általánosított tapasztalatává kell válnia. Egy-két lépést már megtett ebben az irányban és az erre vonatkozó kutatásokba néhány magyar matematikus is belekapcsolódott.

E tekintetben számos haladó tradicióra tekinthetünk vissza. Ezek között időrendben is, de jelentőségüknél fogva is első helyen állnak a két Bolyai kutatásai *a geometria alapjaira* vonatkozólag. *Bolyai János*, az orosz *Lobacsevszkij*-vel egyidőben, a hiperbolikus geometria felépítésével megtette a legfontosabb lépést a párhuzamosság axiómájának a geometria többi axiómájától való függőségére vonatkozó több évezredes probléma megoldása felé. Appendixe címében jogosan állapította meg *Kant* idealista kijelentéseivel szemben, hogy az a kérdés, hogy a valóságos világban milyen geometria érvényes, az *Euklides*-féle-e, vagy nem, a priori soha el nem dönthető, tehát kísérleti úton vizsgálandó. Jól tudjuk, milyen fontos szerepe volt *Bolyai János* e megállapításának a modern fizika kialakulásában.

Nagy érdeklődést mutatott a matematika alapjai iránt *König Gyula;* ő volt az első, aki *Hilbert bizonyításelméleti* gondolatait megértette és *Hilbert*et sok tekintetben megelőzve továbbfejlesztette. Fia, a fasiszták által halálba üldözött *König Dénes,* gráfelméleten kívül elsősorban *halmazelmélettel* foglalkozott, a matematikának olyan ágával, amelyet sokan a matematika alapjaihoz számítanak.

A matematika alapjainak tudománya terén ma működő magyar matematikusok — eltekintve néhány halmazelméleti kutatástól — elsősorban a *matematikai logika* kérdéseivel foglalkoznak. Munkásságuk ismertetése során nem szorítkozhatom az utolsó évre, mert az idevágó kutatásokban szereplő fogalmak és problémák nem közismertek a matematikusok között és így azok megértése végett régebbi kutatásokat is figyelembe kell vennünk.

A matematikai logika egyik fontos teendője, hogy a *következmény* fogalmának matematikai szempontból szabatos, a matematika legkülönbözőbb területein, mindenféle következtetésre egyaránt alkalmazható meghatározását adja. Közelfekvő azt is megkívánni, hogy adott állításokról (tételekről, feltevésekről vagy sejtésekről) a meghatározás alapján mindig el lehessen dönteni véges számú lépésben, vajjon egy további adott állítás következményük-e. A matematikai logika az ilyen meghatározás kérdését az u. n. *eldöntésproblémára* vezeti vissza.

Az eldöntésprobléma annak a feltételeit keresi, hogy egy adott *logikai formula* bármely halmazon *azonosan igaz* legyen; ezzel ekvivalens másik (u. n. duális) alakjában annak feltételeit keresi, hogy egy adott logikai formulához legyen olyan halmaz, amelyen *kielégíthető.* A logikai formulák, amelyekről itt szó van, olyan formulák, amelyek *logikai függvényekből* u. n. *logikai műveletek* és *kvantorok* segítségével épülnek fel.

Logikai függvényen olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amely egy tetszőleges halmazon (u. n. individuumtartományon) van értelmezve, értékei pedig logikai értékek, vagyis egy kételemű halmaz elemei, amelyeket „igaz"-nak és „hamis"-nak nevezünk. Logikai függvényre példa az az $F(x)$ függvény, amely a természetes számok halmazán úgy van értelmezve, hogy értéke „igaz", ha x prímszám, „hamis", ha x összetett szám; vagy az a $G(x, y, z)$ függvény, amely a sík pontjai halmazán úgy van értelmezve, hogy értéke „igaz", ha x, y, z egy egyenesen fekvő pontok, különben „hamis".

Logikai műveleten olyan egy- vagy többváltozós függvényt értünk, amelynek független változói is a logikai értékek halmazán futnak át, értékei is logikai értékek. Pl. a *negáció* művelete az az egyváltozós $\overline{X}$ függvény, amelynek értéke „igaz", ha X értéke „hamis", viszont „hamis", ha X értéke „igaz"; a *konjunkció* művelete az a kétváltozós $X \& Y$ függvény, amelynek értéke akkor és csak akkor „igaz", ha X értéke is, Y értéke is „igaz", máskülönben „hamis"; az *implikáció* művelete az a kétváltozós $X \rightarrow Y$ függvény, amelynek értéke akkor és csak akkor „hamis", ha X értéke „igaz", Y értéke „hamis", és minden más esetben „igaz".

Kvantornak nevezzük a következő két, logikai függvényeken végezhető függvényoperációt:

$$(x)F(x) = \begin{cases} \text{„igaz", ha } F \text{ azonosan „igaz",} \\ \text{„hamis" minden más esetben} \end{cases}$$

(u. n. *általános kvantor*); és

$$(Ex)F(x) = \begin{cases} \text{„hamis", ha } F \text{ azonosan „hamis",} \\ \text{„igaz" minden más esetben} \end{cases}$$

(u. n. *exisztenciális kvantor*). Többváltozós logikai függvényre alkalmazva egy kvantort, eggyel kevesebb változós függvényt kapunk; pl. $(x)F(x, y)$ csak y-tól függ, az x u. n. *kötött változó* (mint $\int_a^b f(x, y)\,dx$-ben az x).

Egy logikai formula értéke attól függ, melyik halmazt választjuk individuumtartomány gyanánt, hogyan definiáljuk rajta a formulában szereplő logikai függvényeket és az individuumtartomány mely elemeit helyettesítjük a formulában szereplő, nem kötött (u. n. *szabad*) változók helyére. Azonosan igaznak nevezünk egy logikai formulát egy halmazon, ha bárhogy definiáljuk ezen a halmazon a formulában szereplő logikai függvényeket, mindig (a szabad változók bármely értékére) „igaz" lesz az értéke; kielégíthetőnek nevezünk egy logikai formulát egy halmazon, ha lehet úgy definiálni ezen a halmazon a formulában szereplő logikai függvényeket, hogy (a szabad változók alkalmas értékeire) „igaz" legyen az értéke. Pl.

$$(x)(F(x) \rightarrow F(x))$$

bármely halmazon azonosan igaz,

$$((x)\overline{F(x, x)} \,\&\, (x)(y)(z)((F(x, y) \,\&\, F(y, z)) \rightarrow F(x, z))) \rightarrow (Ex)(y)\overline{F(x, y)},$$

mint könnyen látható, bármely *véges* halmazon azonosan igaz formula; a

$$((x)\overline{F(x, x)} \,\&\, (x)(y)(z)((F(x, y) \,\&\, F(y, z)) \rightarrow F(x, z))) \,\&$$
$$\&\, (x)(y)(F(x, y) \rightarrow (Ez)(F(x, z) \,\&\, F(z, y)))$$

formula kielégíthető a valós (vagy a racionális) számok halmazán („igaz" lesz az értéke, ha F-et úgy definiáljuk, hogy $F(x, y)$ akkor és csak akkor legyen „igaz", ha $x < y$, különben „hamis").

A logikai formulák bizonyos *speciális osztályaira* meg van oldva az eldöntésprobléma, azaz ezekhez az osztályokhoz van olyan algoritmus, amelynek segítségével bármely adott, a kérdéses osztályhoz tartozó formuláról véges számú lépésben el lehet dönteni, hogy azonosan igaz-e (bármely halmazon), ill. hogy kielégíthető-e (alkalmas halmazon). Az eldöntésprobléma *redukcióelmélete* viszont az eldöntésproblémát speciális formula-osztályokra vonatkozó, vagyis a kérdéses osztályokhoz tartozó formulák azonosan igaz, ill. kielégíthető voltának feltételeit kérdező eldöntésproblémára igyekszik visszavezetni. Az eldöntésproblémára vonatkozó magyar kutatások legnagyobb része az eldöntésprobléma redukcióelméletére vonatkozik.

Az általánosság megszorítása nélkül feltételezhetjük, hogy a logikai formulában, amelyről szó van, nincs szabad változó, továbbá maga a formula *prenex* alakú. Ezen azt értjük, hogy úgy keletkezik, hogy logikai függvényekre előbb logikai műveleteket alkalmazunk, majd az így keletkező **M** formulában egymásután kvantorokkal kötjük le a változókat. A kvantorok alkalmazása előtt keletkező **M** formulát a kész formula *magvának* nevezzük, a kész formulában a mag előtt álló kvantorok sorozatát a kérdéses prenex formula *prefixumának*. Pl.

$$(x)F(x, x) \mathbin{\&} (x)(y)(F(x, y) \to F(y, x))$$

nem prenex formula,

$$(x)(y)(Ez)(F(x, y) \to (G(x, z) \mathbin{\&} G(z, y)))$$

prenex formula, prefixuma $(x)(y)(Ez)$, magva $F(x, y) \to (G(x, z) \mathbin{\&} G(z, y))$.

Rövidebb kifejezésmód kedvéért nevezzük egy prenex formula *típusának* a Π és Σ jeleknek azt a sorozatát, amely úgy keletkezik, hogy a formula prefixumában minden általános kvantort Π, minden exisztenciális kvantort Σ jellel pótolunk; a típusban az egymásutáni Π vagy Σ jelek „szorzatát" hatványjelöléssel rövidítjük. Pl. az említett prenex formula típusa $\Pi^2\Sigma$.

Kalmár az 1932-es zürichi nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadásával olyan vizsgálatokat kezdett, amelyek az eldöntésprobléma visszavezetésére irányulnak olyan formulák kielégíthetőségének kérdésére, amelyekben csak *egyetlenegy* logikai függvény szerepel és az is *kétváltozós*. Egyúttal igyekezett azt is elérni, hogy a formula típusa minél egyszerűbb legyen. Így később bebizonyította, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető olyan formulák kielégíthetőségének kérdésére, amelyek egyetlenegy, kétváltozós, logikai függvényt tartalmaznak és emellett $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^n$ (Ackermann-féle) típusúak. (*Ackermann* csak azt bizonyította be, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^n$ típusú, de akárhány logikai függvényt tartalmazó formulák kielégíthetősége kérdésére; hasonló eredményekről nevezték el a később említendő típusokat is). Később, *Surányi*val közösen, bebizonyították a megfelelő redukciós tételt $\Pi^3\Sigma^n$ (Gödel-féle), $\Pi^n\Sigma$ és $\Pi^2\Sigma\Pi^n$ (Pepis-féle) típusú, egyetlen, kétváltozós, logikai függvényt tartalmazó formulákra vonatkozóan. Legutóbbi dolgozataiban *Kalmár* a megfelelő redukciós tételt $\Pi^2\Sigma^n\Pi$ és $\Pi\Sigma^n\Pi^2$ típus esetére is bebizonyította.

Surányi 1943-ban írt doktori disszertációjában az eldöntésprobléma redukcióelméletének teljesen új fejezetét nyitotta meg. Az addigi redukciótételek mindegyike vagy csak az általános, vagy csak az exisztenciális kvantorok számát redukálja adott számra. *Surányi*nak sikerült először bebizonyítania olyan redukciótételt, amely *egyidejűleg* mindkét számot adott számra redukálja (de a formula magvában szereplő logikai függvények számát nem). Bebizonyította, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető olyan formulák kielégíthetőségének kérdésére, amelyek akár $\Pi^3\Sigma$, tehát egyidejűleg Gödel-féle és Pepis-féle, akár $\Pi^2\Sigma\Pi$ típusúak. Legújabb dolgozataiban (speciális) Ackermann-féle $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^2$; $\Pi\Sigma^2\Pi^2$ típusú formulák kielégíthetőségének kérdésére redukálta az eldöntésproblémát, továbbá, ha megengedjük, hogy a formulában határozatlan logikai függvényeken kívül az a kétváltozós rögzített logikai függvény is szerepeljen, amelynek értéke akkor és csak akkor „igaz", ha $x = y$, akkor $\Pi\Sigma^5\Pi$ és $\Sigma\Pi\Sigma^4\Pi$ típusú formulák esetén is bebizonyította a megfelelő tételt. Emellett az is elérhető, hogy egyváltozós logikai függvényeken kívül a $\Sigma\Pi\Sigma\Pi^2$ és $\Pi\Sigma^2\Pi^3$ típusok esetén legfeljebb hét, a $\Pi\Sigma^5\Pi$ és $\Sigma\Pi\Sigma^4\Pi$ típusok esetén legfeljebb négy kétváltozós logikai függvény szerepeljen a formula magvában (az utóbbi esetben nem számítva az említett rögzített függvényt).

Más természetű, nem a formula típusára, hanem az *individuumtartomány számosságára* vonatkozó redukciótételt bizonyított be *Kalmár* az I. Magyar Matematikai Kongresszuson: megmutatta, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető arra a kérdésre, mely logikai formulákhoz van olyan *véges* halmaz, amelyen az adott formula kielégíthető. (Előzőleg *Löwenheim* azt bizonyította be, hogy az eldöntésprobléma visszavezethető a megszámlálható individuumtartományokon való kielégíthetőség kérdésére; további redukció lehetősége azért látszott valószínűtlennek, mert adott véges n számosság esetén meg van oldva az a kérdés, mely formulák elégíthetők ki valamely n elemű halmazon.)

Az eldöntésprobléma redukcióelméletének eredetileg az volt a célja, hogy olyan speciális esetére redukálja az eldöntésproblémát, amelyet már sikerül megoldani. Az a remény, hogy ezt sikerül elérni, *Church* tétele folytán szétfoszlott; e tétel ugyanis azt mondja ki, hogy *nincsen olyan algoritmus*, amelynek segítségével bármely adott formuláról véges számú lépésben el lehetne dönteni, azonosan igaz-e, ill. kielégíthető-e. E tétel bizonyításához természetesen előbb szabatosan definiálni kellett az *algoritmus* fogalmát, amelyet a matematikus mindennapi munkájában éppenúgy rutinjára támaszkodva szokott alkalmazni szabatos definició nélkül, mint a következmény fogalmát. *Church* maga megkerülte ezt a magábanvéve is jelentős feladatot azzal, hogy önkényesen azt nevezte megengedett algoritmusnak, amely egy bizonyos, általa felállított axiómarendszerben kifejezhető. Ez szabatosan definiálható fogalom ugyan, csak éppen az nem magától értetődő, hogy fedi az algoritmusnak a matematikus mindennapi praxisában használt fogalmát. Az algoritmus fogalmának kielégítőbb szabatos definicióját adta *Kleene*, amennyiben visszavezette azt az olyan számelméleti függvény fogalmára, amelynek minden adott helyen véges számú lépésben ki lehet számítani az értékét s azt javasolta, hogy ez utóbbi fogalmat a *rekurzív függvény* fogalmának egy jelentős általánosításával azonosítsuk. Az algoritmus fogalmának olyan szabatos definicióját, amelyről nyilvánvaló, hogy fedi a mindennapi fogalmat, *Markov* szovjet matematikus adta meg az I. Magyar Matematikai Kongresszuson. Meg lehet mutatni, hogy az algoritmus fogalmának e három definiciója ekvivalens.

*Church*nek azt a tételét, hogy vannak algoritmussal meg nem oldható problémák, az idealista filozófusok úgy állították be, hogy az matematikai bizonyítéka az agnoszticizmusnak, tehát cáfolata a dialektikus materializmus azon állításának, hogy a világ megismerhető. (*Church* első példája algoritmussal meg nem oldható problémára más volt, nem az eldöntésprobléma.) *Church* tételét ebből a szempontból nagy „haladásnak" tekintették *Gödel* egy régebbi tételéhez képest, amely csak azt mondja ki, hogy adott axiómarendszerhez (ha az bizonyos, pontosan megfogalmazható, de igen általános feltételeknek eleget tesz) van olyan probléma, amely *ebben az axiómarendszerben* nem oldható meg. Beállításuk szerint a Gödel-tétel a tudásnak csak egy-egy axiómarendszerre vonatkozó *relatív* határát fedi fel, ezzel szemben a Church-tétel azt bizonyítja, hogy a tudásnak *abszolút* határa van. A matematika alapjai körül folyó ideológiai harcban tehát hasonló szerep jutott a Church-tételnek, mint a Heisenberg-féle bizonytalansági relációnak az elméleti fizika körül folyó ideológiai harcban.

E kérdések tisztázására tehát kívánatos volt *Gödel* és *Church* tételeinek eredeti, igen bonyolult és nehezen áttekinthető bizonyítását egyszerűsíteni, a Gödel-tétel feltételeit, továbbá a két tételnek egymáshoz való viszonyát tisztázni. *Kalmár* 1943-ban egyszerű bizonyítást adott a Gödel-tételre; újabb dolgozataiban bizonyítását az axiómarendszerre vonatkozó, az eredetinél általánosabb feltételek esetére is kiterjesztette és megmutatta, hogy módszere *Rosser* egy analóg tételének bizonyítására is felhasználható.

A Church-tételre vonatkozólag *Péter Rózsa* megmutatta, hogy a Gödel-tétel egy általánosan megfogalmazott alakjából *egyszerűen következik*. Ezt a meglepő tényt tovább elemezve, *Kalmár* az amsterdami filozófiai kongresszuson megmutatta, hogy a Church-tétel egyenesen *speciális esete* az általánosan megfogalmazott Gödel-tételnek. Ezzel kiderült, hogy a Church-tétel agnoszticista beállítása helytelen, a Church-tétel sem mond ki többet, mint a Gödel-tétel, t. i. azt, hogy ha pontosan előírjuk, milyen módszereket szabad használni, akkor mindig maradnak olyan problémák, amiket nem tudunk megoldani. Ez azt mutatja, hogy ahhoz, hogy a matematikai problémákat sorra mindet megoldjuk, módszereinket is állandóan fejlesztenünk kell. Ez a következtetés teljes összhangban van a dialektikus materializmussal, amely nem azt állítja, hogy a világ egyszersmindenkorra, pontosan előírható módszerekkel megismerhető (ezt a mechanikus materializmus állította), hanem azt, hogy nincs olyan, a valóságra vonatkozó probléma, amelyet módszereink kellő fejlődése során meg ne lehetne oldani.

A Church-tétel agnoszticista beállítása egy tudatos ferdítésen alapul: t. i. hogy a Church-tétel ugyanolyan értelemben vett probléma abszolút megoldhatatlanságát mutatja ki, mint amilyen értelemben vett probléma relatív megoldhatatlanságáról szól a Gödel-tétel. Valójában a Church-tétel nem is egy problémára, hanem egy *problémaseregre* vonatkozik, hiszen pl. minden egyes

logikai formula kielégíthetőségének kérdése külön-külön probléma. Egy végtelen sok problémából álló problémasereg algoritmussal való megoldhatatlansága semmiképpen sem jelenti a valóság megismerhetetlenségét; hiszen a valóság megismerése a megismerési folyamat fejlődésének minden egyes fokán csak véges számú probléma megoldását kívánja. Igaz, hogy a matematikus egyes esetekben végtelen sok problémát is meg tud oldani egyidejűleg (t. i. valamilyen paramétertől függő problémát e paraméter bármely értékére). Így pl. van olyan algoritmus, amelynek segítségével bármely adott racionális együtthatójú polinomról véges számú lépésben el tudjuk dönteni, reducibilis-e a racionális számok testében (ebben a problémaseregben maga a polinom a paraméter). Az, hogy ez bizonyos problémaseregek esetén sikerül, nagyon hasznos a valóság megismerése szempontjából, mert ilyen esetben nem kell a sereg minden egyes problémájával külön foglalkozni (csak a paraméter helyébe a megfelelő értéket behelyettesíteni az általános megoldásban). Azonban semmi okunk sincs elvárni, hogy bármely problémasereghez legyen ilyen általános megoldás. Ha valamely problémasereghez nincs, az azt mutatja, hogy már ahhoz is módszereink állandó dialektikus fejlődésére van szükség, hogy a kérdéses sereghez tartozó problémákat sorra mind meg tudjuk oldani. Így pl. az eldöntésproblémára vonatkozó Church-tétel azt mutatja, hogy a dialektikus fejlődés szükségessége már a logikában is fennáll: ahhoz, hogy bárhogyan megadott állításokról eldönthessük, következményük-e egy további állítás, logikai módszereinket is állandóan fejlesztenünk kell.

Ezenkívül annak, hogy valamely problémaseregről sikerül bebizonyítani, hogy nincs olyan algoritmus, amelynek segítségével a sereg bármely adott problémáját meg lehet oldani, az a jelentősége is megvan, hogy ez megkíméli a matematikust attól a hiábavaló munkától, hogy az ilyen problémasereghez megoldó algoritmust keressen; hasonlóan, mint ahogy a Ruffini—Abel-tétel megóvja az algebristát attól, hogy hiába keresse az általános ötödfokú egyenlet algebrai megoldását, vagy a π transzcendenciájának bizonyítása attól, hogy a kör négyszögesítésével foglalkozzék. Ily módon a Church-féléhez hasonló megoldhatatlansági tételek alkalmasak arra, hogy a matematikust tájékoztassák arról, milyen irányban végezze, jobban mondva, milyen irányban ne végezze gondolat-kísérleteit; mintegy segítik abban, hogy a maga kutatásának *selejtjét csökkentse*. Természetesen csak akkor van egy megoldhatatlansági tételnek ilyen szempontból jelentősége, ha a matematikusokat tényleg foglalkoztató problémaseregnek algoritmikus megoldhatatlanságára vonatkozik.

A Church-tétel folytán az eldöntésprobléma minden egyes redukciótétele példát szolgáltat algoritmussal meg nem oldható problémaseregre. Ha ugyanis az eldöntésprobléma visszavezethető valamely speciális esetére, akkor ehhez a speciális esetéhez nincs megoldó algoritmus. Így pl. *Kalmár* fent említett tétele, amely szerint az eldöntésprobléma visszavezethető arra a kérdésre, hogy mely logikai formulákhoz van olyan véges halmaz, ahol kielégíthetők, vagy duális alakjában, hogy mely logikai formulák azonosan igazak minden véges halmazon, új bizonyítást szolgáltat *Trahtyenbrot* szovjet matematikusnak arra a más módszerrel bebizonyított tételére, hogy nincs olyan algoritmus, amellyel bármely adott logikai formuláról el lehetne dönteni, azonosan igaz-e bármely véges halmazon.

A matematikusokat tényleg foglalkoztató nem logikai természetű problémaseregek közül az első, amelyről sikerült kimutatni, hogy nem oldható meg algoritmussal, *az asszociatív rendszerek szóproblémája* volt. Ez a probléma (-sereg) arra vonatkozik, hogy egy adott, véges számú báziselem segítségével felépíthető, véges számú generáló relációval definiált asszociatív rendszerben mely relációk állnak fenn. *Markov* szovjet és *Post* amerikai matematikusnak sikerült egyidejűleg egymástól függetlenül megadni olyan, a fenti értelemben végesen definiált asszociatív rendszereket, amelyeknek szóproblémája nem oldható meg algoritmussal. *Kalmár* e tételt mindkét szerző bizonyításánál egyszerűbb, az algebrista számára könnyebben követhető úton bizonyította be akadémiai székfoglaló előadásában.

Számos matematikai logikai kutatásnak fontos segédeszköze a *rekurzív függvények* fogalma. Rekurzívnak nevezünk egy függvényt, ha változóinak nemnegatív egész értékeire a 0 konstansból és az $x+1$ függvényből kiindulva véges számú rekurzióval és helyettesítéssel (függvény, ill. függvények függvényeinek képezésével) definiálható. A rekurzió (más néven teljes indukcióval való definíció) fogalmát többféleképpen lehet szabatosan megfogalmazni és így a rekurzív függvények különböző osztályaihoz jutunk, amelyeknek különböző szerepük jutott halmazelméleti, ill. matematikai logikai kutatásokban.

Így *Hilbert* a *kontinuumproblémát* úgy próbálta megoldani, hogy a számelméleti, azaz olyan függvényeket, amelyeknek változói is a nemnegatív egész számok halmazán futnak át, értékei is nemnegatív egész számok, a második számosztály rendszámai szerint haladó osztályokba igyekezett sorolni, úgy, hogy minden osztályba megszámlálhatóan végtelen sok függvény jusson és egy számelméleti függvény se maradjon ki. Ha ez sikerülne, akkor be volna bizonyítva a kontinuum számosságára vonatkozó Cantor-féle sejtés, mert a számelméleti függvények kontinuum-számosságú halmazt alkotnak. *Hilbert* osztályozásában fontos szerepe van a számelméleti függvények definiciója alakjának. Így az első osztályba azokat a függvényeket sorolta, amelyek egy változó szerinti rekurziók és helyettesítések sorozatával definiálhatók, csupa számelméleti függvényen át. A második osztályba azokat a függvényeket sorolta, amelyeknek hasonló rekurzív definiciójához már olyan függvényoperációk is kellenek, amelyeknek egyes változói számelméleti függvényeken futnak át (más változói viszont a nemnegatív egész számokon; a rekurzió persze mindig ilyen változó szerint történik). Ilyen függvényoperációra példa az iteráció: az $f=f(z)$ egyváltozós függvény n-edik iteráltjának értéke az x helyen, $I(f; n, x)$, így definiálható n szerinti rekurzióval:

$$I(f; 0, x)=x,$$
$$I(f; n+1, x)=f(I(f; n, x));$$

a Hilbert-féle második osztályba tartozó számelméleti függvényre pedig az a $g(x, y, n)$ függvény, amely a következő rekurzióval definiálható az I függvényoperáció segítségével:

$$g(x, y, 0)=y+1,$$
$$g(x, y, n+1)=I(g(x, z, n); y, x),$$

ahol I első argumentuma a $g(x, z, n)$ függvény, *mint z függvénye*. A Hilbert-féle harmadik osztályba azok a számelméleti függvények tartoznak, amelyeknek rekurzív definiciójához az említett fajta függvényoperációkon kívül olyan operációk is kellenek, amelyeknek egyes változói ilyen függvényoperációkon futnak át stb. *Hilbert*nek ezen az úton nem sikerült bebizonyítania a Cantor-féle sejtést; azonban egyes gondolatait felhasználva és lényegesen továbbfejlesztve *Gödel* később bebizonyította, hogy a Cantor-féle sejtés nem cáfolható meg a halmazelmélet Zermelo—Fraenkel-féle axiómarendszerében (feltéve, hogy ez az axiómarendszer ellentmondástalan).

Gödel fentemlített (adott axiómarendszerben megoldhatatlan problémákra vonatkozó) *tételének* bizonyításához szintén lényegesen felhasználta a rekurzív függvény fogalmát. *Gödel* a kérdéses tétel bizonyítását egy bizonyos axiómarendszerre végezte el (csak kimondta, hogy más hasonló axiómarendszerekre is érvényes). Megmutatta, hogy ebben az axiómarendszerben egyrészt minden rekurzív függvény kifejezhető, másrészt bizonyos, az axiómarendszerre vonatkozó állítások (pl. hogy egy véges formulasorozat egy adott formula bizonyítása-e ebben az axiómarendszerben) az axiómarendszer formuláinak és véges formulasorozatainak egy bizonyos megszámlálásánál fellépő sorszámok rekurzív függvényei közötti egyenletekkel fejezhetők ki. Ebből a két tényből *Gödel* tétele az átlós módszer egy bonyolult alkalmazása segítségével adódik.

Mint már említettem, *Kleene* is a rekurzív függvény fogalmának egy lényeges általánosítását használja fel az *algoritmus fogalmának* szabatos meghatározásához. *Ackermann* egy, a természetes számok egy bizonyos ε_0 típusú jólrendezésével kapcsolatos transzfinit rekurzióval definiált számelméleti függvényt használ fel az *aritmetika ellentmondástalanságának* bizonyításához. A már említett *Markov—Post-tétel* Kalmár-féle bizonyítása ugyancsak a Kleene-féle értelemben vett általános rekurzív függvény fogalmát használja fel. Újabban *Specker* és *Goodstein* az *analízis* fogalmainak és tételeinek élesítésére is alkalmazták a rekurzív függvény fogalmát (pl. egy x_n sorozat rekurzív módon konvergál egy x számhoz, ha van olyan *rekurzív f* függvény, hogy $|x_n-x|<\frac{1}{k}$, mihelyt $n>f(k)$).

Ezekből a példákból is látszik, milyen fontos kérdés a rekurzív függvény fogalma különféle szabatos meghatározásai során előálló különféle függvényosztályok viszonyának tisztázása. E területen *Péter Rózsa* végzett alapvető kutatásokat. A zürichi matematikai kongresszuson tartott előadásában, majd későbbi dolgozataiban a rekurzív függvények különböző osztályairól megmutatta, hogy azonosak azzal a függvényosztállyal, amelyet *Gödel* használ fentemlített tételének bizonyításában, az u. n. *primitív rekurzív függvények* osztályával. E függvényosztály esetén rekurzión egy f függvénynek egy adott g függvény és egy másik adott h függvény segítségével való

$$f(0, x, y, \ldots) = g(x, y, \ldots),$$
$$f(n+1, x, y, \ldots) = h(n, x, y, \ldots, f(n, x, y, \ldots))$$

alakú definícióját értjük. *Péter Rózsa* megmutatta, hogy ha megengedjük, hogy itt a második egyenletben $f(n, x, y, \ldots)$ helyett f-nek olyan értékei is szerepeljenek, amelyeknek első argumentuma ugyan n, vagy n-nél kisebb szám, de $x, y, \ldots$ helyett tetszőleges más argumentumok állnak, akár olyanok is, amelyek megint tartalmazzák f-et, de mindig csak úgy, hogy f első argumentumában n, vagy n-nél kisebb szám áll, akkor ugyanehhez a függvényosztályhoz jutunk. Ilyen definícióra példa:

$$f(0, x) = x,$$
$$f(n+1, x) = n + x + f(n, x^2) + f(n, f(n, x)).$$

Ebből következik, hogy a Hilbert-féle első osztály (bár látszólag általánosabban van definiálva) egybeesik a primitív rekurzív függvények osztályával. Egy másik dolgozatában *Péter Rózsa* olyan rekurzió jellegű módszerekkel foglalkozik, amelyekkel *nem primitív rekurzív függvényekhez* lehet jutni. Az első példát nem primitív rekurzív függvényre *Ackermann* adta u. n. *kétszeres,* vagyis n helyett egyidejűleg két változó szerint haladó rekurzió segítségével; példája (lényegtelen módosítástól eltekintve) a fenti, a Hilbert-féle második osztályba tartozó $g(x, y, n)$ függvény, amely kétszeres rekurzióval így definiálható:

$$g(x, m, 0) = m + 1,$$
$$g(x, 0, n+1) = x,$$
$$g(x, m+1, n+1) = g(x, g(x, m, n+1), n).$$

Péter Rózsa lényegesen egyszerűsítette *Ackermann* bizonyítását és egy másik, elvileg még egyszerűbb, ha nem is olyan elegáns függvényhez vezető eljárást is adott nem primitív rekurzív függvénynek kétszeres rekurzió segítségével való szerkesztésére. Ez az eljárás az *átlós módszer* egy érdekes (megszámlálható halmazon belül való) alkalmazása. Később ezeket az eredményeket *többszörös*, vagyis egyidejűleg több változó szerint haladó rekurziókra is átvitte: ezeket is egyszerű *normálalakra* hozta (amely bizonyos értelemben megfelel az egyszeres rekurziók visszavezetésének primitív rekurziókra), továbbá bebizonyította, hogy a $k+1$-szeres rekurzió *kivezet* a k-szorosan rekurzív függvények köréből. Megmutatván, hogy a k-szoros rekurzív függvények azonosak azokkal a számelméleti függvényekkel, amelyek a nemnegatív egész számoknak egy

bizonyos ω^k rendtípus szerinti jólrendezésével kapcsolatos *transzfinit rekurzióval* definiálhatók, a nemnegatív egész számoknak egy ω^ω típusú jólrendezése segítségével olyan számelméleti függvényt szerkesztett, amely *nem definiálható többszörös rekurziókkal.*

Péter Rózsa belekapcsolódott azokba a vizsgálatokba is, amelyek a rekurzív függvényeknek az analízisre való alkalmazására vonatkoznak. Megmutatta, hogy ahhoz, hogy egy r pozitív valós szám a Specker-féle értelemben rekurzív szeletet alkosson, azaz, hogy legyen olyan f rekurzív függvény, hogy (pozitív egész m és n esetén) $\frac{m}{n} > r$ akkor és csak akkor álljon, ha $f(m, n) = 0$, szükséges és elegendő, hogy $[nr]$, mint n függvénye, rekurzív függvény legyen. Megmutatta, hogy ehhez elegendő, hogy r egy bizonyos, általa bevezetett, értelemben *rekurzív módon* legyen *irracionális* (vagy, hogy racionális legyen); a valós számok több szokásos sorfejtéséről megmutatta, hogy rekurzív módon irracionális szám kifejtésében az együttható az indexnek rekurzív függvénye. (Ezekben a vizsgálatokban „rekurzív" többféleképpen is érthető.)

Mindezekből látható, hogy *Péter Rózsa* lényeges eredményekkel gazdagította a rekurzív függvények elméletét és így hivatott volt ez elmélet első kézikönyvét megírni. E könyve, amely Akadémiánk kiadásában jelent meg, a szakkörökben általános érdeklődést váltott ki. A könyv írása számos új kérdést hozott felszínre; jelenleg ezek megoldásán dolgozik. Legutóbbi, megjelenés alatt lévő dolgozatában tisztázta a többszörösen rekurzív függvények viszonyát a Hilbert-féle *második osztályba* tartozó függvényekkel (e vizsgálatai az oslói nemzetközi matematikai kongresszuson tartott előadására nyúlnak vissza) és nagy érdeklődésre számot tartó problémákat vetett fel a Hilbert-féle második és magasabb osztályokba tartozó függvényekre vonatkozólag. *Péter Rózsa* e vizsgálataiból világos, hogy a Hilbert-féle osztályozásban erőltetett dolog *egy változó* szerint haladó rekurziókra szorítkozni; ha az osztályozást úgy módosítjuk, hogy többszörös rekurziókat is megengedünk, akkor a második osztály egy jól körülírható része az első osztályba kerül át (viszont minden, az első osztályban akárhányszoros rekurzióval definiált függvény a második osztályban megengedett módon már egyszeres rekurziókkal definiálható); továbbá, hogy az új osztályozás esetén az elsőnél magasabb osztályba tartozó függvények szerkesztésénél lényeges szerepet játszanak az olyan többváltozós függvények, amelyek *változóinak száma nem állandó,* hanem egyik változójuk értékétől függ, hogy hány változót kell megadni, hogy a függvény értéke meg legyen határozva (ilyen függvény pl. $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{x_1}$).

*Kalmár*nak a Gödel-tételre adott egyszerűbb bizonyításában a primitív rekurzív függvény fogalma helyett egy egyszerűbb fogalom szerepel: az *elemi* (számelméleti) *függvény* fogalma. Elemi függvényeknek nevezzük azokat a függvényeket, amelyek olyan kifejezéssel definiálhatók, amely a változókból és adott természetes számokból véges számú összeadás, aritmetikai kivonás, szorzás, aritmetikai osztás, szumma- és produktumképzés segítségével keletkezik. Itt aritmetikai kivonáson a különbség abszolút értékének, aritmetikai osztáson a hányados egész részének képzését értjük. Pl.

$$\max(x, y) = \frac{x+y+|x-y|}{2} = \left[\frac{(x+y)+|x-y|}{2}\right],$$

$$\min(x, y) = \frac{x+y-|x-y|}{2} = \left[\frac{|(x+y)-|x-y||}{2}\right],$$

$$\operatorname{res}(x, y) = x - y\left[\frac{x}{y}\right] = \left|x - y\left[\frac{x}{y}\right]\right|,$$

$$d(x) = \sum_{i=1}^{x} |1 - \min(1, \operatorname{res}(x, i))| =$$

$$= \sum_{i=1}^{x} \left|1 - \left[\frac{\left|\left(1+\left|x-i\left[\frac{x}{i}\right]\right|\right) - \left|1 - \left|x-i\left[\frac{x}{i}\right]\right|\right|\right|}{2}\right]\right|,$$

$$x! = \prod_{i=1}^{x} i$$

elemi függvények.

Minthogy nemcsak a Gödel-tétel bizonyításában, hanem más kutatásokban is pótolni lehet a primitív rekurzív függvényeket elemi függvényekkel, felvetődik az a kérdés, nem azonos-e az elemi függvények osztálya a primitív rekurzív függvények osztályával. Ezt a kérdést *Béreczki Ilona* oldotta meg, amennyiben az I. Magyar Matematikai Kongresszuson bebizonyította, hogy az

$$f(x, 0) = 1,$$

$$f(x, n+1) = x^{f(x, n)}$$

primitív rekurzióval definiált függvény (amely hasonló iterációval jön létre a hatványozásból, mint a hatványozás a szorzásból, vagy a szorzás az összeadásból) *nem elemi függvény.* Előadásához hozzászólva *Markov* és *Egerváry* egy-egy problémát vetettek fel; az előbbi *Bereczki* eredményének az elemi függvény fogalmának általánosítására való kiterjesztésére, az utóbbi egy speciálisabb függvényosztályra vonatkozik. *Bereczki* jelenleg, miután *Egerváry* problémáját már megoldotta, egyrészt *Markov* problémájával, másrészt a rekurzív függvényekre vonatkozó bizonyos tételeknek az elemi függvényekre való átvitelével foglalkozik.

Ezekből látszik, hogy bár a magyar matematikusok a matematikai logika terén számos kutatásba bekapcsolódtak, lényegében még mindig csak egyes részletproblémák megoldásánál tartanak. Ez nem a magyar matematikai logika fejletlenségének jele, hanem annak, hogy a matematikai logika általában gyerekcipőben jár ahhoz a szerephez képest, ami a matematikus számára kutatásai során utat mutató elmélet kialakításában rá vár. Ahhoz, hogy ezt a szerepét betölthesse, egyrészt a matematikai logikusoknak kellene a matematika

különböző egyéb területein szélesebbkörű matematizálási tapasztalatokat gyűjteniök, másrészt az ilyen tapasztalatokkal bőven rendelkező matematikusoknak is le kellene küzdeniök ellenkezésüket a matematikai logikával szemben.

Eddig egyoldalúan csak a matematikai logika terén elért magyar eredményekről beszéltem, holott a matematikai logika korántsem meríti ki a matematika alapjainak tudományát. Ennek oka azonban az, hogy a magyar matematikusok keveset foglalkoznak a matematika alapjai tudományának más területeivel. Pedig sok teendő volna még, elsősorban a dialektikus materializmusnak a matematikára való alkalmazása terén. *Alexits* és *Fenyő* idevágó úttörő munkája szinte folytatás nélkül maradt. Kívánatos volna e munka új, az újabb szovjet kutatások figyelembevételével kibővített kiadását megírni már csak azért is, mert a szerzők, mint szóbeli közléseikből tudom, a munka több megállapításával ma már nem értenek egyet. E munkából úgy látszik, mintha a dialektikus materializmus alkalmazása a matematikában, a matematika története jelenségeinek értékelésén kívül, csak a matematikai logikával kapcsolatban volna központi jelentőségű.

Hogy ez nem így van, mutatja a valószínűségszámítás megalapozása körüli ideológiai harc. A valószínűségszámítás nyugaton válságba jutott, mert művelői idealista filozófiából kiindulva próbálták megalapozni. A válság csak akkor szűnt meg, amikor *Kolmogorov* szovjet matematikus a dialektikus materializmus tudatos alkalmazásával új alapot adott a valószínűségszámításnak; ezzel a valószínűségszámítás szabatos matematikai diszciplinává vált. *Rényi* nagy érdeme, hogy *Kolmogorov* elméletét ismertette és a valószínűségszámítás megalapozása körüli ideológiai harcot a dialektikus materializmus alapján részletesen kiértékelte; e tekintetben, különösen a Mises-féle elmélet kritikájában, messzebb jutott el, mint *Gnyegyenko* szovjet matematikus hasonló tárgyú, valamivel később megjelent cikkében. A két munka, amely egymástól függetlenül keletkezett, az alapvető kérdésekben ugyanarra az eredményre jut.

Meg vagyok arról győződve, hogy hasonló feladatok, mint a valószínűségszámítással kapcsolatban, a matematika más ágaival kapcsolatban is vannak. Elsősorban az analízisre gondolok. Az analízis terén aligha lehet válságról beszélni, hiszen e téren, mint *Szőkefalvi-Nagy Béla* tagtársunk előadásából láttuk, egy olyan kis országban is, mint a mienk, egy év alatt jelentős eredmények gazdag termését takaríthatjuk be; másrészt közismert, hogy az analízis eredményeit milyen széles körben lehet alkalmazni. De mégis vannak olyan jelenségek, amelyek azt mutatják, hogy nincs minden rendben az analízis alapjai terén. Ilyen jelenség az, hogy a fizikusok többsége világszerte nem a mai szabatosan felépített analízist alkalmazza, hanem a Newton—Leibniz-féle misztikus differenciálszámítást. Annak okait, hogy miért nem veszik figyelembe a fizikusok az analízis megalapozására vonatkozó újabb eredményeket, véleményem szerint ugyancsak a dialektikus materializmus alkalmazásával kell felderíteni, akkor megtaláljuk, hol a hiba és hogyan lehet rajta segíteni.

Szeretném erre vonatkozólag néhány gondolatomat még röviden ismertetni. Kétségtelen, hogy a Newton—Leibniz-féle alapvetésre erősen rányomta bélyegét *Leibniz* misztikus metafizikus idealizmusa (szembetűnő az analógia a világnak monaszokra való és a mennyiségeknek végtelen kicsi differenciálokra való felbontása között). Azonban az is kétségtelen, hogy ami az analízis megalapozása terén a XVIII. és XIX. században történt, egészen *Weierstrass* logikai szempontból már kifogástalan alapvetéséig, arra is rányomta bélyegét korának idealista filozófiája. Így abban az analízis szabatos megalapozásával összefonódó tendenciában, hogy e diszciplinát önmagában zárt, a szemlélettől és a gyakorlati élettől független rendszerként alapozzák meg, fel lehet ismerni a hanyatló kapitalizmus korának a valóságtól elforduló, a tudomány öncélúságát hirdető filozófiáját. Ennek tudható be, hogy a Weierstrass-féle epszilontika — amit a matematika fejlődése szempontjából csak pozitiven lehet értékelni, hiszen nélküle a matematikának olyan fontos ágai, mint a modern topológia, vagy a halmazelmélet, létre sem jöhettek volna — mostohábban bánt a gyakorlat követelményeivel, mint a Newton—Leibniz-féle misztikus infinitézimális számítás, amely mégis csak a fejlődő kapitalizmus korában keletkezett. Így pl. mit sem ér a fizikus egy olyan sorfejtéssel, amelynek konvergenciája be van ugyan bizonyítva s így lehet annyi tagját venni, hogy azok összege a sor őt érdeklő összegét 3 tizedes pontossággal megközelítse, de vagy semmi felvilágosítást nem kap arra nézve, hány tagját vegye (mert csak úgy derült ki a sor konvergenciája, hogy feltettük, hogy divergens és ellentmondás jött ki), vagy csak olyasmit kap, hogy 1000000 tag biztosan elég erre a célra.

Jellemző az az indokolás, amivel a fizikus menti azt, hogy szabatosság tekintetében nem tart lépést az általa alkalmazott analízis fejlődésével. Nem beszélve arról a rosszabb esetről, amikor a fizikus hisz a misztikus végtelen kis mennyiségek létezésében, azzal indokolja a velük való számolást, hogy az sokkal kényelmesebb, mint az analízis szabatos fogalmainak használata és ha kicsire nem nézünk, közelítőleg úgy is helyes. Exisztenciatételekre pedig nincs szüksége, mert amit ő ki akar számítani, arról úgy is tudja, hogy létezik. A kényelemre való hivatkozás — erre *Rényi* tagtársunk hívta fel a figyelmemet — a Mach-féle „gondolkodással való takarékoskodás" elvének hatása. A megközelítés fogalma természetesen, ha a hibahatárt is megnevezzük, szabatos fogalom, amit a szabatos analízis is használ. Itt azonban rendszerint anélkül hivatkozik a fizikus a közelítő helyességre, hogy számot tudna adni arról, hogy milyen pontosságú a megközelítés (legfeljebb azt a sztereotip választ adja, hogy „magasabbrendű végtelen kis mennyiségektől eltekintve"). A megközelítés e határozatlan fogalmának használata vezetett az elméletileg helyes, de alkalmazásra „kényelmetlen" preciziós matematika és a matematikus véleménye szerint nem szabatos, de az alkalmazásokban helytálló approximációs matematika szétválasztásához. E mögött pedig filozófiai szempontból a kettős igazság idealista-opportunista tanának felelevenítése fedezhető fel.

Természetesen nem mindig áll az, hogy az ily módon felfogott approximációs matematika a gyakorlati alkalmazásban helyes eredményre vezet. Ez azonban a hanyatló kapitalizmus korában ritkán derülhet ki. Ennek két oka van. Ha a megközelítés kielégítő volta a kapitalistának is érdeke (pl. egy híd építésekor, amin a kapitalista is keresztülmegy, ha nem is gyalog, hanem autón), akkor a tízszeres biztonsági tényező biztosítja, hogy akkor sem lesz baj, ha a megközelítés nem elég pontos. Ha pedig „csak" a munkás életéről van szó, akkor a kapitalista is azt mondja, hogy „kicsire nem nézünk". A szocializmus építése korában, amikor felülvizsgáljuk az elavult technikai normákat, igyekszünk az anyaggal takarékoskodni, a selejtet csökkenteni, a munka termelékenységét fokozni, az embert pedig a legfőbb értéknek tartjuk, mind gyakrabban és gyakrabban ki fog derülni, hogy a preciziós matematikától elszakadt approximációs matematika hibás eredményekre vezet. Így előbb-utóbb fel fog merülni az analízis új alapvetésének szükségessége, amely a misztikus fogalmakkal éppúgy végérvényesen szakít, mint a tudomány öncélúságának tévtanával, az approximációs és preciziós matematikát pedig dialektikus egységbe fogja. Jó volna, ha matematikusaink, analistáink éppúgy, mint matematikai logikusaink, *Marx*nak a misztikus, a racionális, valamint az algebrai differenciál- és integrálszámítás kiértékelésére vonatkozó alapvető, sajnos nehezen hozzáférhető írásának áttanulmányozása után az itt felvetett kérdéssel is foglalkoznának és mielőbb eredményeket érnének el az analízis ilyen új megalapozása terén.

Szegedi Tudományegyetem
Bolyai-Intézete.

HOZZÁSZÓLÁSOK

KALMÁR LÁSZLÓ ELŐADÁSÁHOZ

RÉNYI ALFRÉD lev tag:

A Matematikai Bizottság ülésén eddig elhangzott előadások igen értékes és magas színvonalú beszámolók voltak a magyar matematikai tudomány fejlődéséről a matematika egy-egy átfogóbb fejezete terén. Nem véletlen azonban, hogy ezen előadások után nem alakult ki a szó szoros értelmében vett vita, hanem csak olyan hozzászólások hangzottak el, amelyek kiegészítették az előadást. Egy ilyen beszámolóval kapcsolatban ugyanis vita csak úgy alakulhat ki, ha az előadó az elért konkrét eredmények ismertetésén, sőt egyes konkrét még megoldatlan problémák ismertetésén túlmenőleg kísérletet tesz arra, hogy a matematika szóbanforgó fejezetének kijelölje a helyét a matematikán belül és vázolja azt az irányt, amelybe a matematika illető ágának fejlődnie kell, hogy a jövőben fokozottabban tölthesse be azt a szerepet, amelyre hivatott. Nem vitás, hogy *Kalmár László* előadása azon túlmenőleg, hogy világos és sok fontos összefüggésre rámutató beszámolót nyujtott a matematika alapjai terén a legutóbbi időkben magyar matematikusok által elért valóban figyelemreméltó eredményekről, kísérletet tett arra is, hogy a matematika alapjaira vonatkozó kutatások célját és jelentőségét is vázolja és ezzel kapcsolatban kijelölje azt az irányt, amelybe a kutatásokat a jövőben folytatni kell. Ezt előadása jelentős pozitívumának tekintem, ugyanakkor azonban ez az értékes és helyes kísérlet szükségessé teszi a *Kalmár László* által kifejtett álláspont megvitatását is. Ezzel kapcsolatban már elöljáróban meg kell mondanom, hogy *Kalmár László* álláspontjával két lényeges ponton nem értek egyet. Az első kérdés a matematikai logika szerepére vonatkozik. *Kalmár László* előadásából világosan kitűnik, hogy ő — helyesen — a matematikai logikát a matematika alapjaira vonatkozó kutatásoknak csak egyik fontos, de nem egyetlen fejezetének tekinti. A matematika alapjaira vonatkozó kutatások feladataként ugyanakkor azt jelöli meg, hogy utat mutasson a matematikusnak kutató munkájában. Az előadás során azonban később úgy tárgyalta a matematikai logikát, mintha egyedül a matematikai logika volna hivatott, hogy utat mutasson a matematikusnak, hogy „ne tapogatódzzék sötétben", hogy *Kalmár László* saját kifejezését használjam. Ez a felfogás azonban véleményem szerint szerepének indokolatlan eltúlzását jelenti, amit azért tartok különösen veszélyesnek, mert ha a matematikai logika olyan célokat tűz ki maga elé, amelyeket nem teljesíthet, ez gátolja azt, hogy tényleges feladatait — amelyek ugyan szerintem szerényebbek, mint ahogy azt *Kalmár László* megfogalmazta, de azért igen jelentősek — valóban meg is valósítsa. Véleményem szerint a matematikai logika a matematikának csak a formális oldalával foglalkozik és ezen fontos feladatának teljesítése közben a tartalom kérdését, a matematika és a valóság viszonyának kérdését szándékosan nem is érinti. A feladat önmagában véve is jelentős és nem szorul rá, hogy jelentőségét úgy húzzuk alá, hogy olyan szerepet tulajdonítsunk neki, amelyet éppen sajátos jellegénél fogva nem tölthet be. Formális apparátus nélkül nincsen matematika és a formális apparátus jelentőségét lebecsülni teljesen helytelen volna. Azonban más dolog a matematika formális apparátusának jelentőségét elismerni és más dolog elfeledkezni a tartalom kérdéséről. Éppen ez az alapvető ellentét a matematika materialista és idealista felfogása között: az idealista felfogás csak a formát látja, míg a materialista felfogás állandóan szem előtt

tartja, hogy a matematikai formákban, habár közvetve és elvontan, de mégis a valóság, annak mennyiségi viszonyai és térbeli formái tükröződnek — hogy *Engels Kalmár* által is idézett kifejezésével éljek. Ebből azonban nyilvánvalóan következik, hogy a matematikai logika csak a matematika formális kérdéseiben mutathat utat a matematikusnak, a matematika és a valóság viszonyának alapvető kérdéseiben nem. Éppen ezért, véleményem szerint ahhoz, hogy a matematikus „ne tapogatódzzék sötétben" elsősorban nem az szükséges (bár ez is hasznos és fontos), hogy fokozottabban megismerje és alkalmazza a matematikai logika módszereit és eredményeit, hanem ennél sokkal nagyobb jelentősége van annak, hogy megismerje a dialektikus materializmust és tudatosan alkalmazza azt a matematika és a valóság viszonyának kérdéseire, ez segíti a matematikust leginkább abban, hogy „ne tapogatódzzék sötétben".

A másik kérdés, amelyben nem értek egyet *Kalmár László*val, az analízis kérdése. *Kalmár László* párhuzamot vont a valószínűségszámítás és az analízis között. Valójában a helyzet az analízisben ma egészen más, mint a valószínűségszámításban. A valószínűségszámítás századunk első évtizedeiben válságon ment keresztül, a válságból a kiútat szovjet matematikusok találták meg — elsősorban *A. N. Kolmogorov* — és ennek során, a valószínűségszámítás szabatos matematikai elméletének megalkotásában, nagy segítségükre volt, hogy tudatosan alkalmazták a dialektikus materializmust. Hasonló jellegű válságról ma az analízisben nem beszélhetünk. Ilyen jellegű válság valóban volt az analízisben is, azonban ez a mult század első felében volt és a kiútat az analízis szabatos felépítésével *Dedekind, Weierstrass, Cantor* és követőik mutatták meg. Hogy ezt a kérdést világosan lássuk, vizsgáljuk meg, hogy mi jellemzi a matematika valamely fejezetének válságát? A válságokat a matematikában (ugyanúgy, mint a társadalomban) elsősorban ellentmondások fellépése és kiéleződése jellemzi, melyek következtében minden bizonytalanná válik és elmosódik a határ „igaz" és „hamis" között. Az analízis alapvető fogalmaival kapcsolatban a mult század elején valóban felmerültek ellentmondások (gondoljunk *Bolzano* paradoxonaira, vagy a konvergencia-fogalom tisztázatlanságából származó ellentmondásokra, vagy még előbb a XVIII. században a függvény fogalmával kapcsolatos vitákra) és ezeknek az ellentmondásoknak igen nagy történelmi jelentőségük volt: ezeknek az ellentmondásoknak a feloldására irányuló törekvések nagymértékben hozzájárultak az analízis szabatos megalapozásához. Ilyen jellegű ellentmondásokkal ma az analízisben nem találkozunk és ez is mutatja, hogy nem lehet ma válságról beszélni az analízisben. Hivatkozom itt *Kolmogorov*nak az I. Magyar Matematikai Kongresszuson tartott előadására, ahol — a valószínűségszámítás megalapozása terén előttünk álló feladatokat illetőleg — az analízist állította példaképül a valószínűségszámítás elé és azt mondotta: a valószínűségszámítás matematikai elméletének továbbfejlesztésénél arra kell törekednünk, hogy a valószínűségszámítás konkrét kérdéseinek megoldásához ne kelljen visszanyúlnunk a valószínűségszámítás halmazelméleti alapjaira, amelyeken végeredményben az illető konkrét probléma matematikai megoldása nyugszik, mint ahogy egy differenciálegyenlet megoldásánál nem kell a valós számok Dedekind-féle, vagy Cantor-féle elméletéig visszanyúlnunk, bár végső fokon a megoldás egy ilyen elmélet létezését feltételezi. Az analízis, alapjainak szilárdságát illetőleg tehát olyan fokon áll ma, hogy mintaképül szolgálhat más, fiatalabb matematikai diszciplináknak. Ha tehát az analízis megalapozása körül nincsenek nyitott problémák, akkor hogyan értékeljük azokat a problémákat, amelyeket *Kalmár László* felhozott?

A helyzet az, hogy az általa említett problémák valóban megvannak, és abban is egyetértek, hogy ezekkel a problémákkal foglalkozni kell, azonban ezek a problémák nem az analízis megalapozásának a problémái, hanem egyrészt az analízis oktatásával kapcsolatos didaktikai problémák, másrészt a matematika gyakorlati alkalmazásával kapcsolatos általános problémák, amelyek az analízis megalapozásától teljesen függetlenek akkor is, ha az analízissel kapcsolatban lépnek fel leggyakrabban. Nagyon vigyázni kell, hogy ezekben a kérdésekben tisztán lássunk, hiszen e nélkül nem juthatunk egy lépéssel sem előbbre. Nézzünk egy konkrét kérdést: *Kalmár László* beszélt arról, hogy egyes fizikusok idegenkednek az analízis szabatos matematikai elméletétől és szívesebben megmaradnak a végtelen kicsiny mennyiségek misztikus felfogásánál. Kétségtelen, hogy akadnak ilyen fizikusok, ez azonban nem jelenti azt, hogy az analízis alapjaiban van a hiba: helyesebb volna a hibát az ilyen fizikusok matematikai tudásában keresni. Akkor volna indokolt az analízisben keresni a hibát, ha az analízis szabatos matematikai elmélete kevésbbé volna alkalmazható, mint a misztikus differenciálfogalom. Erről azonban szó sincs. Az Alkalmazott Matematikai Intézet munkája során igen sok gyakorlati probléma merült fel és ezek megoldása során minden esetben tekintettel voltunk a gyakorlat követelményei mellett a matematikai szabatosságra is. Azonban egyetlen esetben sem tapasztaltuk, hogy ez a gyakorlati alkalmazhatóság hátrányára lett volna: éppen ellenkezőleg, a matematikai szabatosság mindig a gyakorlat követelményeit szolgálta. A másik kérdés, amit *Kalmár László* érintett a „precíziós" és „approximációs" matematika ellentéte. Valójában nincs kétfajta matematika, hanem csak arról van szó, hogy az elmélet és gyakorlat elszakadása a burzsoá társadalomban a matematika területén is megnyilvánul. Ennek megvannak a társadalmi okai és valóban beszélhetünk a burzsoa tudomány általános válságán belül a burzsoa matematika válságáról is, ami többek között az elmélet és gyakorlat elszakadásában nyilvánul meg, de ez nem az analízis válsága. Nekünk ma, a szocializmus építésének korszakában a matematika területén is az elmélet és gyakorlat egységének megvalósítására kell törekednünk és ez az analízis területén azt jelenti, hogy törekednünk kell olyan problémák megoldására, amelyeknek a gyakorlatban jelentőségük van; törekednünk kell például sorfejtéseknél a maradéktag gyakorlatilag használható megbecsülésére; ehhez azonban nincsen szükség a konvergencia szabatos matematikai fogalmának elvetésére, vagy valamilyen „új" analízisre, — az analízis „új alapvetésére", ahogy *Kalmár* mondta —, hiszen ez az analízis meglévő elméletének keretei között teljes mértékben megvalósítható. Egyetértek abban, hogy „szakítanunk kell a tudomány öncélúságának tévtanával" de ez egészen más kérdés; különbséget kell tenni egy matematikai elmélet és polgári matematikusok vagy filozófusok által ahhoz fűzött idealista filozófiai megjegyzések között. Egyébként is a „tudomány öncélúságának tévtanával" a matematika bármely ágával kapcsolatban találkozunk, így például az algebrával kapcsolatban még nagyobb mértékben, mint az analízissel kapcsolatban. Azt jelenti ez, hogy az algebrában is „új alapvetésre" van szükség? Természetesen egyáltalán nem jelenti azt. Ezzel szemben valóban szükséges, hogy a matematikával kapcsolatos idealista megnyilvánulásokkal, a „matematikai idealizmussal" minden vonalon felvegyük a harcot és ugyanakkor a dialektikus materializmus alapján fokozott gonddal foglalkozzunk a matematika és alkalmazásainak elvi kérdéseivel. Ezzel lényegében visszajutottam ahhoz, amit a matematika alapjaira vonatkozó kutatásokkal kapcsolatban mondottam és abban már egyetértek Kalmár Lászlóval, hogy ezen a téren még igen sok tennivalónk van.

ALEXITS GYÖRGY r. tag:

Kalmár László igen világos előadásának néhány filozófiai jellegű részletéhez szeretnék hozzászólni.

Semmikép sem tudok egyetérteni *Kalmár*nak azzal a megállapításával, hogy a „matematikai logika a matematika alapjainak a tudománya". A matematikai logika a *matematikai gondolkodás formáival*, nem pedig magával az anyagi valósággal foglalkozik. A gondolkodás pedig az anyagi létezésnek egy sajátos módon való visszatükrözése a tudatban (*Lenin*). A matematikai logika tehát a valóság egy sajátos visszatükrözésének *formáit* vizsgálja, nem pedig magát az anyagi valóságot. Ezzel szemben a „matematika tárgyát a valóságos világ térformái és mennyiségi viszonylatai alkotják" (Engels, Anti-Dühring). A matematikai logika, mint a valóság visszatükrözésével foglalkozó tudomány, nem tartalmazhatja tehát a valóság bizonyos viszonyait *közvetlenül* vizsgáló matematikai alapjait, nem lehet „a matematika alapjainak a tudománya".

Kalmár ebben a kérdésben idealista felfogású, mert előbbre helyezi a tudattal foglalkozó matematikai logikát, a lét egyes kérdéseit tárgyaló matematikánál. Ez a nézet megegyezik a logikai objektívizmus felfogásával, amelyet *Leibniz* óta *Bolzano, Husserl, Meinong, Russell* és az összes többi logisztikusok képviseltek. Teljesen helytelen és a dialektikus materializmussal homlokegyenest ellenkező, idealista álláspontot foglal el az, aki a matematikai megismerés formalizmusát tartja a matematika alapjai tudományának.

Ugyanakkor helytelen volna a matematikai logika eredményeinek lekicsinylése is. Kétségtelen, hogy a matematikai logika a matematikai megismerés formáit, különösen a formalizmus határait illetően jelentős eredményeket ért el és ezek között előkelő helyet foglal el *Kalmár* néhány vizsgálata. Különösen érdekes *Kalmár*nak az az eredménye, amely szerint a Church-tétel speciális esete az általánosan fogalmazott Gödel-tételnek. Nem tudok azonban teljesen egyetérteni *Kalmár*nak azzal a felfogásával, mintha *ezzel az eredménnyel* sikerült volna megcáfolni azt az idealista állítást, hogy a tudásnak vannak abszolút határai. Ez a fogalmazás ismét arra mutat, hogy *Kalmár* a matematikai logika eredményeit a valóságra vonatkozó tényeknek gondolja. A Church-tétel *bármilyen* interpretációja — akár ismerjük *Kalmár* eredményét, akár nem — mindenképpen legfeljebb azt jelentheti, hogy a pusztán formális, *axiomatikus megismerésnek* vannak határai. Ez az állítás pedig semmi meglepőt sem tartalmaz, hiszen a formális gondolkodás korlátozott volta a dialektikus materializmus ismerőinek nem jelent különös meglepetést. Az érdekes csupán az, hogy az idealisták ezt a tényt saját módszereik következetes alkalmazásával *kénytelenek* elismerni.

Nem tudok végül egyetérteni az előadás utolsó részének néhány megállapításával sem. Így helytelennek tartom a precíziós és approximációs matematika merev szétválasztásának felfogását. A matematikának ez a két tendenciája az anyagi valóságról való ismereteink különböző fejlődési fokát, nem pedig különböző megismerést jelent. Az olyan állítások pedig, hogy az approximációs matematika „kicsire nem néz" elve a kapitalizmus hanyatló korának felel meg, a Weierstrass-féle epszilontika pedig *Weierstrass* korának a valóságtól való elfordulását tükrözi, teljesen alap nélküliek. Ezek a megjegyzések a történelmi materializmus tanításainak elhibázott leegyszerűsítései és semmiképpen sem helyes alkalmazásai a marxizmus-leninizmus filozófiájának.

ACZÉL JÁNOS:

Véleményem szerint sem az, ha egy tudományágban a gyakorlatban nem használható területeket művelnek, sem pedig az, ha a tudományágat rosszul alkalmazzák, nem jelenti az illető tudományágnak válságát; — hanem azt jelenti, hogy a szóbanforgó egyes tudósok járnak helytelen úton. Az analízis új fejlődésére sem a hibás alkalmazások és a nem alkalmazható tételek jellemzőek (bár ezek gyakran az első lépést jelentik a jól alkalmazható eredmények felé), hanem az elmélet és gyakorlat egységét szolgáló, pl. szovjet konstruktív függvénytani kutatások és Magyarországon pl. *Alexits* (approximációs hiba effektív becslése) és *Szőkefalvi-Nagy Béla* (perturbáció-számítás) eredményei.

KALMÁR LÁSZLÓ válasza RÉNYI ALFRÉD, ALEXITS GYÖRGY és ACZÉL JÁNOS hozzászólására

*Rényi Alfréd*dal egyetértek abban, hogy a matematikusnak ahhoz, hogy „ne tapogatódzzék sötétben", nemcsak matematikai logikai ismeretekre van szüksége, hanem elsősorban a dialektikus materializmus alapos ismeretére és tudatos alkalmazására. A dialektikus materializmusra azonban nemcsak a matematikusnak van szüksége, hanem minden tudósnak, így pl. a kísérleti fizikusnak is; ez semmit sem von le annak a megállapításnak jelentőségéből, hogy kísérleti fizikusnak emellett még elméleti fizikai ismeretekre is szüksége van ahhoz, hogy tervszerűen végezhesse kísérleteit. Hasonlóan gondolom azt, hogy a matematikai logika további fejlődése során egyszer majd hasznos, sőt nélkülözhetetlen segédeszközévé válik a matematikusnak abban, hogy tervszerűen végezze kísérleteit egy-egy matematikai probléma megoldására. Természetesen abban a kérdésben, hogy milyen problémákkal foglalkozzék, vagy hogy hogyan interpretálja kapott eredményeit a valóság szempontjából, akkor sem a matematikai logika igazítja majd el a matematikust, hanem a dialektikus materializmus; abban viszont, hogy pl. egy adott számelméleti problémát analitikus, vagy algebrai módszerekkel próbáljon-e megoldani, most sem a dialektikus materializmus igazítja el, hanem a rutinja, a jövőben pedig, úgy vélem, a matematikai logikától is értékes felvilágosításokat kaphat e tekintetben. Ennek feltétele azonban a matematikai logika további, ilyen célkitűzések irányába való fejlődése, aminek érdekében kívánatos volna a matematika különböző területeivel foglalkozó matematikusok szorosabb együttműködése a matematikai logikusokkal.

Helyeslem *Rényi*nek azt a megállapítását is, hogy a matematika egy-egy területén a válságot az jellemzi, hogy elmosódik a határ a között, ami igaz és a között, ami hamis. Ilyen értelemben valóban nem lehet most válságról beszélni az analízisben (nem is állítottam, hogy ilyen válság van). Ellenben éppen ilyen értelemben mutatkozik válság a matematika, különösen az analízis alkalmazásai területén, ha nem is olyan alkalmazások területén, amit matematikusok (pl. az Alkalmazott Matematikai Intézet munkatársai) adtak, hanem pl. azon alkalmazások területén, amellyel a legtöbb fizikus élt, amikor egy-egy új fizikai elméletet „matematikai" formába öntött. Ezen a téren annyira elharapódzott az a szokás, hogy nyugodtan lehet matematikailag teljesen hibás fogalmakkal és tételekkel operálni, hogy a matematikus — mélyreható fizikai ismeretek nélkül — nem tudja eldönteni, hibás-e az új elmélet már pusztán a benne alkalmazott matematikai segédeszközök hibás voltánál fogva, vagy pedig annak ellenére helyes.

Nem tudok egyetérteni azzal, hogy ez kizárólag didaktikai kérdés volna. Természetesen didaktikai téren is igyekszem mindent elkövetni, hogy a leendő fizikusok megtanulják, hogy a szabatos analízis nem szőrszálhasogatás, hanem a fizikai kutatásnak is fontos segédeszköze. (Ehhez persze annak megmutatása kell, hogy miért van szükség az egyes fogalmak szabatos definíciójára és az egyes tételek szabatos bizonyítására, ahelyett, hogy eleve a szabatosságnak olyan fokára helyezkedjünk, amelynek szükségét nemcsak fizikus, hanem matematikus tanítványaink sem láthatják még be.) Ezt előttem is megtették már sokan mások. De ha ezeknek a didaktikai erőfeszítéseknek csak olyan kevés sikere van, mint amit tapasztalhatunk, akkor fel kell vetnünk azt a kérdést, mi ennek az oka. Nem elég az okot csak a fizikusban keresni, a kritika eszközével, hanem az önkritika eszközét is alkalmazva megnézni, nem mulasztottak-e el valamit a matematikusok is az analízis megalapozása alkalmával.

Az analízis új alapvetését természetesen nem úgy értem, hogy pl. a konvergencia szabatos matematikai fogalmát elvessük, hanem úgy, hogy továbbfejlesszük. A továbbfejlesztés célja nem a szabatosságnak, hanem az alkalmazhatóságnak fokozása. Az analízis szabatos alapvetése arra készteti a matematikust, hogy eredményeit szabatos formában fejezze ki; egy olyan további alapvetés, amely egyúttal arra is készteti, hogy eredményét alkalmazhatóság szempontjából is felmérje és minél alkalmazhatóbb eredményre (pl. minél gyorsabban konvergens sorfejtésre) törekedjék, csak hasznos lehet a matematika és az azt alkalmazó tudományok fejlődése szempontjából.

A tudomány öncélóságának tévtanával természetesen minden vonalon, így az algebrában is fel kell vennünk a harcot. Az algebrában azonban nincs új alapvetésre szükség, mert nem találkozunk tömegesen olyan jelenségekkel, hogy az algebrát, feltehetően alapvetésének az alkalmazások szempontjából célszerűtlen volta következtében, tévesen alkalmaznák.

*Alexits György*nek hálás vagyok annak világos megmutatásáért, hogy „a matematika alapjai" szakkifejezés, amelyet világszerte alkalmaznak a matematikával kapcsolatos filozófiai kérdésekre vonatkozó, továbbá matematikai logikai és olykor még halmazelméleti kutatások összefoglalására is, fejetetejére állított, idealista felfogás terméke. Kétségtelen, hogy az e kutatásokat összefoglaló diszciplina sem az alap és felépítmény viszonya szempontjából (amely itt szóba sem jöhet), sem pedig semmiféle más materialista értelemben nem tekinthető alapnak. Minthogy hasonló értelemben szoktak néha a fizika, vagy más tudományág „alapjairól" beszélni, helyes volna, ha az Akadémia foglalkoznék azzal a kérdéssel, szükségesnek látja-e ennek a szakkifejezésnek megváltoztatását és hogy mi legyen helyette az új szakkifejezés. Határozatáról értesítenie kellene aztán a Közoktatásügyi Minisztériumot azzal a felkéréssel, hogy a matematikus tanárképzés tantervében változtassa meg az ilyen tárgyú előadás címét (amelyben, amikor ő tartotta Budapesten, *Alexits György* is tárgyalta a matematikai logika bizonyos kérdéseit), a megfelelő, most készülő tankönyv címével együtt. A Szovjetunió és a népi demokratikus országok, valamint a Német Demokratikus Köztársaság akadémiáit is fel kellene kérni, hogy foglalkozzanak a kérdéssel. (Pl. ismeretes, hogy a nagyrészben halmazelmélettel, emellett főleg matematikai logikával foglalkozó lengyel folyóiratnak Fundamenta Mathematicae a címe.)

Más dolog azonban egy helytelen szakkifejezést alkalmazni (amikor az egy előadásra való felkérés alkalmával is szerepel az előadás tárgykörének megjelölésében) és megint más dolog elfogadni azok felfogását, akik azt alkották. Ezért nem fogadhatom el *Alexits* kritikáját, hogy idealista felfogású vagyok, mert e szakkifejezés alkalmazásával előbbre helyezem a tudattal foglalkozó matematikai logikát a lét egyes kérdéseit tárgyaló matematikánál. Hiszen annak — elismerem, hibásan — a matematika alapjai tudományának nevezett diszciplínának, amelybe a matematikai logikát is beleértem, abban jelöltem meg a feladatát, hogy a matematika különböző területein dolgozó matematikusok matematizálásának általánosított tapasztalatává kell válnia. Világos tehát, hogy a matematikát előbbre helyezem a matematikai logikánál, hiszen a tapasztalat nyilván elsődleges annak általánosításával szemben. Nem hiszem, hogy — egy rossz szakkifejezés alkalmazásán kívül — bármi okot adtam volna arra, hogy *Alexits* azt gondolja, hogy egyetértek a logikai objektívistákkal, vagy a logicistákkal, akikkel sohasem értettem egyet.

Sohasem állítottam azt, hogy azzal az eredménnyel, hogy a Church-tétel speciális esete az általánosan megfogalmazott Gödel-tételnek, sikerült volna megcáfolnom azt az idealista állítást, hogy a tudásnak *vannak* abszolút határai. Csak azt állítottam, hogy azt sikerült ezzel megcáfolnom, hogy a *Church-tételből következik* a tudás abszolút határainak létezése — legalább is annak számára, aki elismeri, hogy a Gödel-tételből nem következik; már pedig a Gödel-tételt még a legmerészebb agnoszticisták is csak a tudás *relatív* határai bizonyítékának tekintik.

Hogy egyik állításból (a Church-tételből) következik-e egy másik állítás (a tudás abszolút határainak létezése), természetesen nem *közvetlenül* a valóságra vonatkozó kérdés, hiszen mindkét állítás tudatunkban van meg. Nem is állítottam, hogy a matematikai logika szóbanforgó eredményei (t. i., hogy a Church-tételből nem következik olyasmi, ami a Gödel-tételből nem következik), vagy bármely másik eredménye *közvetlenül* a valóságra vonatkozó tény volna. *Közvetve* azonban a matematikai logika eredményei is a valóságra vonatkoznak, mert hiszen, mint már *Engels* megállapította, szubjektív gondolkodásunk és az objektív világ egyazon törvényeknek van alávetve. Így pl. az, hogy egy matematikai tételből következik egy másik, azoknak a tényeknek egy bizonyos objektív összefüggését tükrözi vissza agyunkban, amelyeket a kérdéses tételek tükröznek. (Persze a Church-tétel esetében sokkal bonyolultabb a helyzet, mert maga a Church-tétel is a matematikai logikának egy tétele, tehát csak *közvetve* vonatkozik a valóságra; az agnoszticizmus pedig más értelemben, mint a matematikai tételek a való világ térformáit és mennyiségi viszonyait, de — a hanyatló kapitalista társadalom tehetetlenségét tükrözi.) Ezért nem tudok egyetérteni azzal, hogy *Alexits* metafizikus merevséggel elválasztja a matematikai logikát a matematikától, holott az mindössze még egy további absztraháló általánosítás (a matematikai tételek tartalmától való eltekintés) útján jött létre a matematikából, amely maga is sorozatos absztrakciók során jutott fejlődésének arra a fokára, amikor a modern értelemben vett matematikai logika keletkezett. Igaz, hogy a matematikai logika egy fokkal még formálisabb, mint a matematika, de bizonyos fokig a matematika is formális tudomány, hiszen „a tárgyak egy bizonyos rendszerét kutatva, a matematikát nem azok sajátos természete, hanem a köztük fennálló formális

kapcsolatok érdeklik" (*A. N. Kolmogorov*). Ha merev határt vonunk a matematika és a matematikai logika között, akkor hova tegyük a Boole-féle algebrát, amely többek között (és elsősorban) a matematikai logikai állításkalkulus formális szerkezetéből keletkezett egy további elvonás útján?!

Nem értek egyet *Alexits*nek azzal az állításával sem, hogy a Church-tétel *bármilyen* interpretációja legfeljebb azt jelentheti, hogy az *axiómatikus megismerésnek* vannak határai. Church tétele eredeti formájában — Gödel tételével ellentétben — nem tételezi fel semmiféle axiómarendszer használatát. *Church* megad egy problémasereget és *nem* azt a feltevést vezeti ellentmondásra, hogy van olyan algoritmus, amelyről valamely axiómarendszerben *be lehet bizonyítani*, hogy a problémasereg bármely adott problémáját helyesen oldja meg. Hanem bármely algoritmushoz, amely a problémasereg bármely problémájához egyértelműen hozzárendeli az „igen" és „nem" válaszok egyikét (és amelyről valaki, akár bármilyen axiómatikus bizonyítás, sőt, akár bármiféle indoklás nélkül, azt állítja, hogy a problémasereg bármely problémájához a helyes választ rendeli hozzá), megad egy „ellenpéldát": a problémasereg egy speciális problémáját, amelyet elemi aritmetikai számítással meg tud oldani, de amelyről e megoldás révén kiderül, hogy a helyes válasz rá éppen az ellenkezője annak, amit a tekintett algoritmus rendel hozzá. Csak miután sikerült a Gödel-tétel (nem is az eredeti, hanem az egyszerűsített) bizonyításának elemzése kapcsán kideríteni, hogy a bizonyítás az axiómarendszerről olyan kevés feltevést használ fel, hogy alkalmazható olyan képződményekre is, amelyek a szó közönséges értelmében nem is axiómarendszerek (csak éppen bizonyos állításoknak bizonyos, az axiómatikus bizonyítások szerepét átvevő folyamatokhoz való hozzárendeléseit szolgáltatják), akkor derült ki, hogy a Church-tétel az így általánosított Gödel-tételnek (speciális ilyen, a közönséges értelemben axiómarendszernek nem is nevezhető képződményekre vonatkozó) speciális esete. Ahhoz tehát, hogy a Church-tételt úgy lehessen interpretálni, hogy az az axiómatikus megismerésre vonatkozzék, előbb az axiómatikus megismerés fogalmát lényegesen általánosítani kellett. Ez természetesen nem változtat azon, hogy a Church-tétel agnoszticista interpretációja kezdettől fogva hamis volt.

Azzal a megállapítással sem értek egyet, hogy „az idealisták ezt a tényt (azt, hogy az axiómatikus megismerésnek vannak határai) saját módszereik következetes alkalmazásával *kénytelenek* elismerni". A Gödel-tételnek, vagy a Church-tételnek sem eredeti bizonyítása, sem az én bizonyításom nem használ semmiféle idealista feltevést; nem érthető tehát, miért nevezi *Alexits* az idealisták módszerei alkalmazásának azt az utat, ahogyan a matematikai logika az axiómatikus megismerés határainak felismeréséhez eljutott.

A precíziós és approximációs matematika szétválasztásának kérdésében *Rényi* álláspontját fogadom el, amely szerint ez a szétválasztás a burzsoá tudomány válságának tünete; nehéz elképzelni azt, hogy az anyagi valóságról való ismereteink fejlődésének alacsonyabb foka tenné szükségessé azt, hogy megközelítésről beszéljünk bármiféle hibahatár megnevezése nélkül.

Amit az analízisnek fizikusok által való alkalmazása válságtüneteire vonatkozólag mondtam, azt nem ezzel az igénnyel mondtam, hogy a felvetett kérdés végleges megoldását adja a dialektikus materializmus alapján; e tekintetben csak első kísérletnek szántam. Ha *Alexits* elgondolásomat alap nélkülinek és a történelmi materializmus tanításai elhibázott leegyszerűsítésének tartja, hálás lennék, ha, mint e téren nálam jóval gyakorlottabb szakember, e kérdés kielégítő megoldását adná a marxizmus-leninizmus filozófiája helyes alkalmazásával.

*Aczél János*sal egyetértek abban, hogy pozitíven értékel minden olyan eredményt az analízis terén, amely az alkalmazhatóságot fokozza, így pl. a szovjet konstruktív függvénytani kutatásokat, vagy pl. *Alexits* és *Szőkefalvi-Nagy Béla* említett eredményeit. Az analízis *új fejlődésére* valóban az ilyen kutatások jellemzőek. Az analízis alkalmazásaira, főleg fizikusok által, azonban nagymértékben jellemzőek azok, amelyek nem veszik figyelembe a szabatosság mai követelményeit. Ha egy-egy tudós alkalmaz egy elméletet hibás formában, az valóban az illető tudós tévedése. De ha a hibás alkalmazás tömegjelenséggé válik, úgy, hogy az egyes tudósok nem fogadják el miatta a kritikát, mert más is így szokta csinálni, akkor már olyan tünettel állunk szemben, amelynek okait érdemes magában a rosszul alkalmazott tudományágban, esetleg annak nem minden szempontból kielégítő alapvetésében, megkeresni.

BESZÁMOLÓ A LENGYEL ÁLLAMI MATEMATIKAI INTÉZET TUDOMÁNYOS TEVÉKENYSÉGÉRŐL, KÜLÖNÖSEN A TOPOLÓGIA TERÜLETÉN

K. KURATOWSKI (Varsó), a Lengyel Állami Matematikai Intézet igazgatója

Előadta a Matematikai Állandó Bizottság 1951 december 13-án tartott ülésén

Megragadom az alkalmat mindenekelőtt, hogy kifejezzem afeletti örömömet, hogy résztvehetek a matematikai bizottság munkájában. Mi, lengyel matematikusok, mindig igen nagyra értékeltük a magyar matematikusok munkáját, s nagy örömmel fogadjuk azokat a lehetőségeket, amelyek a két ország matematikusainak kapcsolatait egyre szorosabbakká teszik.

A Lengyel Állami Matematikai Intézet szervezetéről és tudományos munkájáról szeretnék beszélni. Az Intézet éppen most három éve, 1948 decemberében alakult meg, mint az egyetemektől független tudományos intézet. Most, hogy a Lengyel Tudományos Akadémia megkezdi működését, az Intézet annak vezetése alá fog kerülni.

Az Intézet munkája felöleli a matematikának valamennyi ágát, a tiszta és az alkalmazott matematikát egyaránt, s működése kiterjed Lengyelország egész területére. Az Intézet központja Varsóban van, de Wrocławban, Krakkóban, Torunban, Lublinban és Poznańban is vannak csoportjai.

Az Intézet a matematika egyes speciális ágaival foglalkozó 16 csoportra oszlik. Az Intézet alapításakor azt két részre, a tiszta és az alkalmazott matematikával foglalkozó csoportra osztották. Hamarosan kiderült azonban, hogy ez a felosztás mesterséges, így ezt a beosztást megszüntettük, mert meggyőződésünk szerint nincs kétféle, tiszta és alkalmazott matematika, hanem csak egy matematika van és annak alkalmazásai. Az Intézet különböző csoportjai szoros együttműködésben állanak egymással, még látszólag igen távolálló csoportok között is van kapcsolat. Vannak olyan csoportok, melyeknek nincs közvetlen kapcsolatuk az ipar és a fizika problémáival, s közvetve mégis hozzásegítenek az ott felmerült problémák megoldásához. Így például a topológiai csoport különféle szolgálatokat tesz a differenciálegyenletekkel foglalkozó csoportnak, amely viszont közvetlen kapcsolatban áll az iparral.

A 16 csoport munkaterületei és működési helyei a következők:

1. Funkcionál-analízis (Varsó, Poznań).
2. Matematikai műszerek (Varsó).
3. Analitikus függvények (Krakkó, Lublin).
4. Valós függvénytan (Varsó, Wrocław).
5. Differenciálgeometria (Krakkó, Wrocław).
6. Geometriai optika (Wrocław).