A BOLYAI—LOBACSEVSZKIJ-FÉLE GEOMETRIA HATÁSA AZ AXIÓMATIKUS MÓDSZER FEJLŐDÉSÉRE

KALMÁR LÁSZLÓ lev. tag

Előadta az ünnepi ülésszak 1952 december 18-án délelőtt tartott ülésén

A Bolyai héten tartott több előadás megemlékezett a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria hatásáról a matematika különböző területeinek fejlődésére. Ebben az előadásban arról a hatásról lesz szó, amit a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria a matematika sajátos módszerének, az axiómatikus módszernek fejlődésére gyakorolt. Igaz, hogy *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* korszakalkotó kutatásaikat nem azért végezték, hogy a matematikát módszerei szempontjából is gazdagítsák, hanem azért, hogy a matematikát megtisztítsák az önkényes feltevésektől és alkalmasabbá tegyék az objektív valóság leírására; az is igaz, hogy felfedezésük nem elsősorban módszertani szempontból jelentős; mégis csonka volna a Magyar Tudományos Akadémia megemlékezése *Bolyai János* születésének 150 éves évfordulójáról, ha nem beszélnénk *Bolyai* és zseniális kortársa, *Lobacsevszkij* kutatásainak hatásáról az axiómatikus módszer fejlődésére is.

A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria létrejötte fordulópont az axiómatikus módszer történetében. A *Bolyai János* és *Lobacsevszkij* geometriai vizsgálataival lezárultak azok az évezredes axiómatikus kutatások, amelyek a a „paralellák problémájának" megoldására irányultak, vagyis a párhuzamosság euklideszi axiómájának bizonyítására az euklideszi geometria többi axiómája alapján. Ezek a vizsgálatok ugyanakkor egész sorát nyitották meg az axiómatikus módszerrel kapcsolatos modern kutatásoknak.

Bolyai János már az Appendix címében kifejezte azt a meggyőződését, hogy az a kérdés, érvényes-e a párhuzamosság euklideszi axiómája a valóságos térben, vagyis abban a térben, amely az anyag mozgásának szinhelye, vagy nem, „a priori soha el nem dönthető", tehát csak tapasztalati úton eldönthető kérdés. Lobacsevszkij is meg volt arról győződve, hogy ez a kérdés a tudomány fejlődése során kísérleti úton dől majd el.

Az, hogy a párhuzamosság axiómájának érvényessége a valóságos térben logikai úton nem dönthető el, azt jelenti, hogy logikailag az euklideszi geometria és a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria egyaránt lehetségesek. Pontosabban kifejezve: ha az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriáé is az és viszont, ha a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor az euklideszi geometria axiómarendszere is az. Ezt az állítást *Bolyai* is, *Lobacsevszkij* is empirikus úton támasztották alá a hiperbolikus geometria részletes kifejtésével. Ennek folyamán sorra tárgyalták mindazokat a kérdéseket, amelyeket az euklideszi geometriában tárgyalni szokták, mégsem jutottak ellentmondásra.

Akármilyen nyomós is ez az empirikus érv, mégsem teljesen kielégítő. Hiszen el lehetne képzelni, hogy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria további kifejtése során, vagyis a geometria axiómáiból való további következtetések folyamán jutunk ellentmondásra. Ilyen ellentmondás a párhuzamosság euklideszi axiómájának indirekt bizonyítását adná. Természetesen a fordítottját is el lehetne képzelni, t. i. azt, hogy az euklideszi geometria további kifejtése során jutunk majd egyszer ellentmondásra. Ilyen ellentmondás a párhuzamosság euklideszi axiómájának cáfolatát adná.

Bolyai János geometriai vizsgálataiból következik, hogy az utóbbi eset nem fordulhat elő, feltéve, hogy az abszolút geometria axiómái, vagyis az euklideszi geometria axiómái a párhuzamosság axiómájának elhagyásával, ellentmondástalan rendszert alkotnak. *Bolyai* ugyanis megmutatta, hogy ha az euklideszi geometria axiómáiban a sík fogalma helyébe mindenütt F-felület (vagyis paraszférát), az egyenes fogalma helyébe pedig mindenütt L-vonalat (vagyis paraciklust) teszünk, akkor ezekből az axiómákból, beleértve a párhuzamosság axiómáját is, csupa olyan tétel lesz, amelyek a hiperbolikus geometriában bebizonyíthatók. Ebből következik: hogy ezzel a transzformációval nemcsak az euklideszi geometria axiómáiból, hanem az azok alapján bebizonyított tételekből is olyan tételeket kapunk, amelyeket a hiperbolikus geometria axiómái alapján be lehet bizonyítani.

Ezt a gondolatot a következőképpen fogalmazhatjuk meg általánosan: Legyen A és B két axiómarendszer. Legyen hozzárendelve az A axiómarendszer minden alapfogalmához egy-egy, a B axiómarendszerben definiálható fogalom (esetleg alapfogalom). Rendeljük hozzá minden olyan T' állításhoz, amelyben a logikai fogalmakon kívül más fogalom nem szerepel, mint az A axiómarendszer alapfogalmai, azt a T állítást, amely úgy keletkezik belőle, hogy T-ben az A axiómarendszer minden alapfogalmát a hozzárendelt, a B axiómarendszerben definiálható fogalommal pótoljuk. Tegyük fel, hogy ez a $T \to T'$ transzformáció az axiómarendszer minden axiómáját a B axiómarendszerben bebizonyítható tételbe (esetleg a B axiómarendszer axiómájába) viszi át. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az említett hozzárendelés, amely az A axiómarendszer minden alapfogalmához egy-egy, a B axiómarendszerben definiálható fogalmat rendel, az A axiómarendszer *modellje* a B axiómarendszerben; a $T \to T'$ transzformációit e modell *alkalmazásának* nevezzük. Már most *a modell alkalmazása nemcsak az A axiómarendszer axiómáit, hanem az A axiómarendszerben bebizonyítható tételeket is a B axiómarendszerben bebizonyítható tételekbe viszi át.* Valóban, legyen T egy tetszőleges az A axiómarendszerben bebizonyítható tétel és legyen D a T tétel egy tetszőleges bizonyítása az A axiómarendszerben. D tehát olyan $T_1, T_2, \ldots, T_n$ állításoknak sorozata, amelyek mind-

egyike vagy az A axiómarendszer valamelyik axiómája, vagy pedig e sorozatban őt megelőző állítások logikai következménye, T_n pedig maga a T tétel. Jelöljük $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén T'_k-vel azt az állítást, amelyet T_k-ból a modell alkalmazásával kapunk. Megmutatjuk, hogy a T'_k a B axiómarendszerben bebizonyítható tétel. Ez a feltevés szerint érvényes azokra a k értékekre, amelyekre T_k az A axiómarendszer axiómája, úgy többek között $k = 1$-re is (mert T_1 nem lehet a D-ben őt megelőző állítások logikai következménye, mert nem előzi meg egy állítás sem, tehát T_1 csak az A axiómarendszer axiómája lehet). Tegyük fel már most, hogy állításunk minden, k-nál kisebb indexre érvényes; megmutatjuk, hogy akkor k-ra is igaz. Ezt megint csak abban az esetben kell megmutatnunk, ha T_k nem axiómája az A axiómarendszernek, tehát a $T_1, T_2, \ldots, T_{k-1}$ állítások közül egyeseknek logikai következménye. Akkor T'_k is logikai következménye a $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{k-1}$ állítások közül a megfelelőknek, mert hiszen a modell alkalmazásával nem szűnik meg az állítások közötti logikai kapcsolat. A $T'_1, T'_2, \ldots, T'_{k-1}$ állítások azonban a feltevés szerint a B axiómarendszerben bebizonyítható tételek, ennélfogva T'_k is az, hiszen a B axiómarendszerben bebizonyítható tételek minden logikai következménye szintén bebizonyítható a B axiómarendszerben. Így többek között T'_n, vagyis a T állításból a modell alkalmazásával keletkező állítás is a B axiómarendszerben bebizonyítható tétel.

Ebből következik, hogy ha az A axiómarendszernek van modellje a B axiómarendszerben és a B axiómarendszer ellentmondástalan, akkor az A axiómarendszer is az. Valóban, ha az A axiómarendszer ellentmondásos volna, vagyis volna két olyan állítás, T és $\overline{T}$, amelyek mindketten az A axiómarendszerben bebizonyítható tételek és amelyek közül $\overline{T}$ a T állítás tagadása (vagyis azt állítja, hogy T nem igaz), akkor belőlük a modell alkalmazásával olyan T' és $\overline{T}'$ állításokat kapnánk, amelyek mindketten a B axiómarendszerben bebizonyítható tételek volnának és amelyek közül $\overline{T}'$ a T' állítás tagadása volna (mert a modell alkalmazásával nem szűnik meg az állítások közötti az a kapcsolat sem, hogy az egyik a másiknak tagadása). Ebben az esetben azonban a B axiómarendszer is ellentmondásos volna. Más szóval, ha sikerül az A axiómarendszernek megadni egy modelljét a B axiómarendszerben, akkor ezzel visszavezettük az A axiómarendszer ellentmondástalanságának kérdését a B axiómarendszer ellentmondástalanságának kérdésére. Ezt még úgy is ki szokás fejezni, hogy ebben az esetben bebizonyítottuk az A axiómarendszer *relatív* ellentmondástalanságát a B axiómarendszerre nézve.

Így abból a tényből, hogy *Bolyai János* modellt konstruált az euklideszi geometria axiómarendszerére a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerében, következik, hogy ha a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor az euklideszi geometria axiómarendszere is az. *Bolyai* nem ebből a célból konstruált modellt az euklideszi geometria axiómarendszerére a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerében, hiszen abban az időben még fel sem merült az a gondolat, hogy az euklideszi geometria ellentmondásos lehet; hanem azért, hogy ezzel meggyorsítsa a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria felépítését. Ugyanis ezzel a módszerrel egy csapásra egy sereg tételét kapta a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometriának, t. i. mindazokat a tételeket, amelyek az euklideszi geometria valamelyik tételéből azáltal adódnak, hogy benne a sík és az egyenes fogalmát az *F*-felület, ill. az *L*-vonal fogalmával pótoljuk. Kétségtelen elvitathatatlan érdeme *Bolyai*nak azonban, hogy ő adta a *modell-módszer* első alkalmázását.

Ez a módszer vezetett a *Bolyai* (és *Lobacsevszkij*) által nyitva hagyott, említett problémának: a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere ellentmondástalanságának az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondástalanságára való visszavezetése problémájának megoldásához. Evégett nem kellett mást tenni, mint modellt konstruálni a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerére az euklideszi geometria axiómarendszerében. Ilyen modellt *Cayley* és *Felix Klein,* valamint *Kőnig Gyula* konstruáltak először. Különösen érdekes *Kőnig Gyula* kevéssé ismeretes modellje. Ez a modell azon alapszik, hogy a négydimenziós euklideszi tér axiómarendszerében könnyű modellt konstruálni a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerére; evégett nem kell mást tenni, mint a négydimenziós térben egy állandó negatív görbületi háromdimenziós alakzatot tekinteni, ennek pontjait helyettesíteni a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria pontjai helyébe, geodetikus vonalait a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria egyenesei helyébe és kétdimenziós geodetikus alakzatait a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria síkjai helyébe; az illeszkedés, rendezés és egybevágóság fogalmai önmagukba mennek át. Másrészt annak felhasználásával, hogy a tér egyenesei négydimenziós alakzatot alkotnak, könnyű modellt konstruálni a négydimenziós euklideszi geometria axiómarendszerére a háromdimenziós euklideszi geometria axiómarendszerében (e modellben a négydimenziós geometria pontjainak a háromdimenziós geometria egyenesei felelnek meg). A kettő egybevetésével kap *Kőnig Gyula* olyan modellt a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerére az euklideszi geometria axiómarendszerében, amelyben a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria pontjainak az euklideszi geometria bizonyos egyenesei felelnek meg, t. i. azok, amelyek egy egyenlőoldalú hiperbola pontjait egy másik egyenlőoldalú hiperbola forgatásával keletkezett egypalástú hiperboloid pontjaival kötik össze. Akár a Cayley—Klein-féle modell, akár a Kőnig Gyula-féle modell mutatja, hogy ha az euklideszi geometria axiómarendszere ellentmondástalan, akkor a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszere is az.

Az a tény, hogy ily módon sikerült a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerének ellentmondástalanságát visszavezetni az euklideszi geometria axiómarendszerének ellentmondástalanságára, felvetette az euklideszi geometria ellentmondástalanságának kérdését. Ezt a kérdést *Hilbert*nek sikerült visszavezetnie a valós számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalanságára, mégpedig ugyancsak a modell-módszerrel. Evégett modellt kellett konstruálnia az euklideszi geometria axiómarendszerére a valós számok aritmetikájának axiómarendszerében. Ez az analitikus geometria Descartes-féle alapgondolatának felhasználásával könnyen lehetséges volt. Az euklideszi geometria pontjainak valós számokból álló számhármasokat feleltetett meg, az euklideszi geometria síkjainak háromismeretlenes lineáris egyenleteket (pontosabban valamely háromismeretlenes lineáris egyenletből konstanssal való szorzással keletkező egyenletek összességét), az euklideszi geometria egyeneseinek két háromismeretlenes lineáris egyenletből álló egyenletrendszereket (pontosabban azon egyenletek összességét, amelyek két egymásnak ellent nem mondó háromismeretlenes lineáris egyenletből konstansokkal való szorzással és összeadással keletkeznek); az illeszkedésnek azt a relációt, hogy egy számhármas kielégít egy háromismeretlenes lineáris egyenletet, ill., hogy egy háromismeretlenes lineáris egyenlet két háromismeretlenes lineáris egyenletből konstansokkal való szorzással és összeadással keletkezik; a rendezés fogalmának és szakaszok egybevágóságának azokat az aritmetikai relációkat, amelyek az analitikus geometriában ezeket a geometriai fogalmakat kifejezik.

A geometria axiómarendszere ellentmondástalanságának visszavezetése a valós számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalanságára felvetette a valós számok aritmetikája axiómarendszerének ellentmondástalansága kérdését. Ennek a kérdésnek megoldására már nem alkalmas a modell-módszer, mert az csak relatív ellentmondástalanság-bizonyítást szolgáltathat, itt pedig már nem ilyenről van szó. Hogy egy axiómarendszer ellentmondástalanságának „abszolút értelemben" való bizonyítása elvben lehetséges, azt *Hilbert* mutatta meg. Ehhez mindenesetre szükséges, hogy pontosan megfogalmazzuk, mit értünk állításán, továbbá, hogy mit értünk bizonyításon és ellentmondáson, amihez viszont az szükséges, hogy szabatosan definiáljuk, mikor mondjuk egy állításról, hogy más állításoknak logikai következménye, ill. hogy egy másik állítás tagadása. E fogalmak szabatos definíciója a matematikai logika segédeszközeinek felhasználásával sikerült. Szükség volt továbbá ehhez arra is, hogy figyelembe vegyünk azon transzformáción kívül, amelyet egy modell alkalmazásának nevezünk, más olyan transzformációkat is, amelyek valamely bizonyítást ismét bizonyításba visznek át (esetleg ugyanazon axiómarendszerbeli bizonyításba). *Hilbert* egy egész elméletet dolgozott ki axiómarendszerek ellentmondástalanságának abszolút bizonyítására; ezt az elméletet Hilbert-féle bizonyításelméletnek nevezzük. Ennek felhasználásával egymástól függetlenül *Novikov*nak és *Gentzen*nek sikerült bebizonyítaniok a természetes számok axiómarendszerének ellentmondástalanságát; a racionális, vagy az algebrai számok axiómarendszerének ellentmondástalanságát, továbbá az euklideszi, vagy a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria axiómarendszerének ellentmondástalanságát is vissza lehet vezetni a természetes számok axiómarendszerének ellentmondástalanságára, ha a geometria axiómarendszeréből elhagyjuk a folytonosság Dedekind-féle axiómáját és azt egyenesek és körök metszéspontjának létezésére vonatkozó, az euklideszi értelemben vett szerkesztéseket lehetővé tevő axiómákkal pótoljuk. A valós számok aritmetikája ellentmondástalanságának bizonyításától azonban még messze vagyunk.

A modell-módszernek egyébként axiómarendszerek ellentmondástalanságára való alkalmazásain kívül még számos más alkalmazása ismeretes. Sok esetben a modell-konstrukció *definíció* formáját öltötte. Tipikus példa erre a valós számok Dedekind-féle (vagy Weierstrass-féle, vagy Cantor-féle) definíciója. Itt tulajdonképpen a következőről van szó. Az analízis felépítéséhez a valós számoknak azokra a tulajdonságaira van szükség, amelyek a valós számok összességét, mint a Dedekind-féle értelemben folytonos, archimedesien elrendezett testet jellemzik. Ezek a tulajdonságok egy axiómarendszert alkotnak. A valós számok definíciója Dedekind-féle szeletalkotással nem más, mint modell szerkesztése erre az axiómarendszerre a racionális számok aritmetikájának és halmazelméletének axiómarendszerében (ahol tehát más halmazok létezését nem kívánjuk meg, mint olyanokét, amelyeknek elemei racionális számok).

A modell-módszer újabb alkalmazásai közül megemlítem még *Gödel* bizonyítását arra, hogy ha a halmazelmélet axiómarendszere ellentmondástalan, akkor nem lehet benne megcáfolni a kontinuum-problémára vonatkozó Cantor-féle sejtést. Ezt *Gödel* úgy bizonyítja be, hogy a halmazelmélet axiómarendszerében modellt konstruál arra az axiómarendszerre, amely úgy keletkezik, hogy a Cantor-féle sejtést hozzávesszük. Ez a modell abban áll, hogy a *halmaz* fogalma helyében a (bizonyos pontosan definiált értelemben, matematikai logikai és halmazelméleti módszerekkel) *konstruálható halmaz fogalmát* teszi; a tartalmazás relációja önmagába megy át.

A Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria azonban más tekintetben is hatott az axiómatikus módszer fejlődésére, nemcsak a modell-módszeren keresztül. Az, hogy az euklideszi geometria és a Bolyai—Lobacsevszkij-féle geometria egyidejűleg ellentmondástalan, úgy is megfogalmazható, hogy a párhuzamosság euklideszi axiómája sem be nem bizonyítható e két geometria közös axiómái alapján, sem meg nem cáfolható. Ezt úgy szokás kifejezni, hogy a párhuzamosság euklideszi axiómája *független* az euklideszi geometria többi axiómáitól. Általában, valamely P axiómát függetlennek nevezzük valamely A axiómarendszer axiómáitól, ha sem P, sem tagadása $\bar{P}$, nem bizonyítható be az A axiómarendszerben. A párhuzamosság euklideszi axiómájának függetlensége az euklideszi geometria többi axiómáitól volt az első nem triviális példa valamely axiómarendszer egyik axiómájának a többitől való függetlenségére. A függetlenség bizonyításának itt szereplő módszere pedig a következőképpen fogalmazható meg általános alakban: *egy ellentmondástalan A axiómarendszer valamely P axiómája akkor és csakis akkor független az A axiómarendszer többi axiómáitól, ha az az axiómarendszer is ellentmondástalan, amely úgy keletkezik A-ból, hogy a P axiómát $\bar{P}$-sal pótoljuk benne.* Ezt a kérdést pedig a modell-módszerrel vizsgálhatjuk meg, mert a függetlenségi vizsgálatokban rendszerint feltételezzük a szóbanforgó axiómarendszer ellentmondástalanságát.

A párhuzamosság euklideszi axiómájának a geometria többi axiómájától való függetlenségére vonatkozó felfedezés a függetlenségi vizsgálatok egész sorát indította meg. Ezek a vizsgálatok olyan fontos fogalmakhoz vezettek, mint pl. az algebrában a nem-archimedeszi test, vagy a p karakterisztikájú test fogalma.

Végül azt is mutatja a párhuzamosság axiómájának függetlensége a geometria többi axiómájától, hogy ha az euklideszi geometria axiómarendszeréből elhagyjuk a párhuzamosság axiómáját, akkor olyan axiómarendszert kapunk, amely *nem teljes*. Még pedig kétféle értelemben nem teljes. Egyrészt van olyan, a geometria axiómarendszerének alapfogalmai segítségével megfogalmazható állítás, t. i. maga a párhuzamosság axiómája, amely sem maga, sem tagadása nem bizonyítható be a kérdéses axiómarendszerben. Másrészt van az euklideszi geometria axiómarendszeréből a párhuzamosság axiómájának elhagyásával keletkező axiómarendszernek két olyan modellje (pl. a valós számok aritmetikájának axiómarendszerében), amelyek egy bizonyos pontosan definiálható értelemben nem izomorfok (az egyiket az euklideszi, a másikat a hiperbolikus analitikus geometria módján lehet konstruálni). Azt a követelményt, hogy valamely A axiómarendszerben bármely, az axiómarendszer alapfogalmain és a logikai fogalmakon kívül más fogalmat nem tartalmazó T állítás vagy maga, vagy tagadása, $\bar{T}$, bebizonyítható legyen az A axiómarendszerben, más szóval, hogy az A axiómarendszerben ne legyen „eldönthetetlen" állítás, az A axiómarendszer *kategoricitásának* nevezzük. Az a követelmény pedig, hogy valamely A axiómarendszer bármely két (pl. aritmetikai) modellje izomorf legyen egymással, az A axiómarendszer *monomorfizmusának* követelménye.

Az a felfedezés, hogy az euklideszi geometria axiómarendszere a párhuzamosság axiómája nélkül nem teljes (holott, amíg azt remélték, hogy be lehet benne bizonyítani a párhuzamosság euklideszi axiómáját, teljesnek vélték), pontosabban, hogy se nem monomorf, se nem kategórikus, megindította különféle axiómerendszerek teljességére (monomorfizmusára és kategoricitására) vonatkozó vizsgálatokat. Eleinte ezekben a vizsgálatokban is relatív teljességet bizonyítottak be, vagyis feltételezték más axiómarendszerek teljességét. Az ilyen vizsgálatok látszólag pozitív eredménnyel jártak; pl. *Hilbert* bebizonyította, hogy a geometria axiómarendszere monomorf, ha a valós számok aritmetikájának axiómarendszere az. Amint azonban elkezdték vizsgálni az abszolút teljesség kérdését, negatív eredményre vezettek a vizsgálatok. Így *Skolem* bebizonyította, hogy azok az axiómarendszerek, amelyek nem-megszámlálható összességek jellemzésére hivatottak (pl. a valós számok aritmetikájának, a geometriának, a halmazelméletnek axiómarendszere), amennyiben ellentmondástalanok, nem monomorfok, mert akkor van olyan modelljük is, amelyben az általuk jellemzett összességek elemeinek szerepét természetes számok veszik át, tehát „megszámlálható" modelljük is. Ez a Skolem-féle eredmény, amely *Löwenheim* egy matematikai logikai tételének alkalmazása, még nem zárja ki azt, hogy olyan axiómarendszerek, amelyek megszámlálható összességek jellemzésére hivatottak, monomorfok legyenek. Azonban azt is megmutatta *Skolem,* hogy a természetes számok aritmetikájának sincs (véges számú, vagy megszámlálhatóan végtelen sok axiómából álló) monomorf axiómarendszere, amennyiben minden ilyen axiómarendszerhez lehet olyan modellt konstruálni, amelyben a természetes számok szerepét bizonyos számelméleti függvények veszik át, amelyek nem ω típus szerint vannak rendezve.

Hasonlóan negatív eredményre vezettek az axiómarendszerek kategoricitására vonatkozó vizsgálatok is. *Gödel* megmutatta, hogy ha egy axiómarendszer elég kifejező ahhoz, hogy bizonyos aritmetikai fogalmakat definiálni lehessen benne, s emellett elég szabályos is ahhoz, hogy bizonyos értelemben aritmetikailag lehessen benne jellemezni, hogy egy állítás mikor logikai következménye más állításoknak, továbbá ellentmondástalan, akkor nem lehet kategórikus.

Ezek a vizsgálatok arra a felismerésre vezettek, hogy az axiómatikus módszer nem alkalmas az alapfogalmaknak izomorfizmustól eltekintve egyértelmű jellemzésére, sem pedig arra, hogy egyszer s mindenkorra megadott axiómák segítségével valamely nem triviális tárgykör minden problémáját el tudjuk dönteni. Más szóval a valóságot helyesen tükröző fogalmak teljes jellemzéséhez módszereink, axiómarendszerünk szakadatlan fejlesztésére van szükség és az a követelmény is megkívánja ezt a szakadatlan fejlesztést, hogy minden, a valóságra vonatkozó problémát meg akarunk oldani, mert a valóságot fokról-fokra teljesen meg akarjuk ismerni. A dialektikus materializmus szemszögéből ez természetesnek látszik, mégis nagy jelentőségű, hogy ehhez a felismeréshez minden filozófiai feltevés nélkül, matematikai úton is el lehetett jutni. (Végeredményben ez is természetes, mert a dialektikus materializmus nem külön feltevésekre alapozza megállapításait, hanem a szaktudományok eredményére épít.) *Bolyai János* és *Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij* hervadhatatlan érdeme, hogy a geometria axiómarendszerével, tehát tulajdonképpen egy speciális axiómarendszerrel kapcsolatos vizsgálataik végül is erre, az axiómatikus módszerre vonatkozó általános felismerésre vezettek.

DIFFERENCIÁLHATÓ SOKASÁGOKON ÉRTELMEZETT TÖBBVÁLTOZÓS FÜGGVÉNYEK BIZONYOS OSZTÁLYAINAK SAJÁTSÁGAI ÉS ALKALMAZÁSUK VARIÁCIÓS FELADATOKRA

SZ. M. NYIKOLJSZKIJ

Előadta az ünnepi ülésszak 1952. december 18-iki ülésén

I. Azzal kezdjük, hogy megvizsgáljuk a legegyszerűbb Dirichlet-féle feladatot.

Megkeresendő az $u(x, y)$ függvény, amely valamely adott G tartományon belül kielégíti a

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{1}$$

egyenletet és amely a tartomány Γ kerületén egy adott $f(s)$ függvénnyel egyenlő kerületi értékeket vesz fel, ahol s a Γ kerület ívhossza.

Annak idején még *Riemann* hozta javaslatba e feladat variációs megoldását, amely abból áll, hogy a keresett harmonikus függvényt, mint azt a függvényt keressük meg, amely minimummá teszi a

$$D[F] = \iint_G \left\{ \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy \tag{2}$$

Dirichlet-féle integrált, valamennyi lehetséges (megengedhető), a G tartományon értelmezett $F(x, y)$ függvény között, amelyeknek a G-n négyzeteikkel együtt integrálható parciális deriváltjai vannak és amelyek kielégítik az adott

$$F|_s = f(s) \tag{3}$$

határfeltételeket.

Később, mint ismeretes, ezt a módszert *Weierstrass* kritizálta. *Weierstrass* példaként idézett egy a kerületen folytonos $f(s)$ függvényt, amelyhez tartozó u harmonikus függvény, $D[u]$ Dirichlet-féle integrálja végtelen és amelyre nézve következésképpen a feladatnak variációs módszerrel való megoldása lehetetlen.

Ezzel kapcsolatosan egy bizonyos időn át nem volt világos, mely esetekben alkalmazható a variációs elv a kerületi feladatok megoldásánál és mely esetekben nem. A helyzetből kiutat már csak a mi századunkban találtak, nevezetesen megállapították, hogy ha csak az adott határfeltételek megengedik a G tartományon legalább egy oly $F(x, y)$ függvény létezését, amely kielégíti ezeket a határfeltételeket és amelynek véges $D[F]$ integrálja van, (egy ilyen függvényt nevezzünk *számbavehető* függvénynek) úgy a feladat variációs módszerrel megoldható és ebben az esetben mindenkor létezik egy oly u függ-