Gyertek, bizonyítsuk be Csebysev tételét!

Hallottátok-e hírét PAFNUTIJ LVÓVICS CSEBYSEV orosz matematikus[1]) tételének? Annak, amelyik azt mondja, hogy *bármely n egész szám és kétszerese, 2n között van legalább egy prímszám.* (Pl. 2 és 4 között a 3, 3 és 6 között az 5, 4 és 8 között az 5 is, a 7 is, 5 és 10 között a 7, 6 és 12 között a 7 is, a 11 is. Még akkor is igaz a tétel, ha $n=1$, feltéve, hogy a „közöttet" úgy értjük, hogy $2n$ is beleszámítson; ez ugyanis $n=1$ esetén 2, tehát prímszám, de csak akkor.) Aki hallotta, az is azt gondolja biztosan, borzasztó nehéz lehet ezt a tételt bebizonyítani. Talán csak akkor lehet reménye az embernek, hogy valaha megértheti a bizonyítását, ha érettségi után matematikus-hallgatónak iratkozik be az egyetemre, vagy még akkor sem lehet. Pedig illő, hogy legalább is hazánkban minden, a matematika iránt érdeklődő diák közkincse legyen a Csebysev-tétel, mert ERDŐS PÁL magyar matematikus másodéves egyetemi hallgató korában olyan egyszerű bizonyítást adott rá[2]), hogy valamennyien megérthetitek. Nemcsak, hogy megérthetitek, hanem egy kis irányítással magatok is rájöhettek az ő bizonyítására. Kitűzök most és még néhány számban egy-két feladatot; aki ezeket megoldja, a tanév végére be tudja bizonyítani a Csebysev-tételt. Olyan élménye lesz a bizonyítás, amit egyhamar nem felejt el.

A prímszámokra vonatkozó tételek bizonyításának kulcsa mindig egy egyenlet, esetleg egyenlőtlenség, amelynek egyik oldalán az ismeretlen, titokzatos prímszámok szerepelnek, a másik oldalán pedig a jól ismert egész számok. CSEBYSEV ilyen kulcs gyanánt LEGENDRE egy azonosságát használja, amely azt mondja meg, hogyan lehet az első n (pozitív) egész szám szorzatát prímtényezőire bontani. Ezt a szorzatot $n!$-sal (mondd: n faktoriális) szokás jelölni; tehát $1!=1$, $2!=1.2=2$, $3!=1.2.3=6$, $4!=1.2.3.4=24$, stb. Arról nevezetes az $n!$, hogy ennyiféleképpen lehet n diákot egy sorba állítani. De CSEBYSEV nem emiatt a

---

[1]) A múlt században élt: 1821-ben született, 1894-ben halt meg. Az orosz neveket kiejtés szerint szoktuk latin betűkkel leírni; y-nal azt a hangot jelöljük, amely akkor hallatszik, ha szánkat úgy állítjuk, mintha i-t akarnánk mondani, torkunkból azonban úgy engedjük ki a levegőt, mintha ü-t mondanánk.

[2]) ERDŐS PÁL, Beweis eines Satzes von Tschebyschef, *Acta Scientiarum Mathematicarum*, 5 (Szeged, 1930–32), 194—198. l. Egy indus matematikus, SRINIVASA RAMANUJAN, már 1919-ben hasonló, csak bonyolultabban fogalmazott bizonyítást adott CSEBYSEV tételére; ERDŐS azonban erről nem tudott.

tulajdonsága miatt gondolt arra, hogy $n!$-sal dolgozzék, hanem azért, mert definiciójában az egész számok egyformán szerepelnek, tehát várható, hogy n-nel szabályosan növekszik; de ugyanakkor *szorzat*, tehát várható, hogy könnyű lesz prímtényezőire felbontani, mégpedig mindenféle, kevés és sok törzstényezőből álló számoknak szorzata, tehát várható, hogy törzstényezős felbontásában is lesz valami szabályosság. Ismerkedjünk meg mi is közelebbről az $n!$-sal!

1. Bontsuk fel prímtényezőire $10!$-t és $20!$-t, anélkül, hogy előbb elvégeznők a szorzást. (Az egyenlő prímtényezőket célszerű hatvány alakjában összefoglalni; pl. 360 prímtényezős felbontása: $2^3 . 3^2 . 5$.)

2. Határozzuk meg $100!$ prímtényezős felbontásában 2, 3, 5 és 7 kitevőjét.

3. Hány 0-ra végződik $100!$? Hát $1000!$?

4. Határozzuk meg $(2^n)!$ és $(2^n-1)!$ prímtényezős felbontásában a 2 kitevőjét.

5. Most már, ugy-e, akármilyen egész szám az n és akármilyen prímszám a p, meg tudjátok határozni $n!$ prímtényezős felbontásában a p kitevőjét. Fejezzétek ki az algebra nyelvén, vagyis képletben, hogyan határozzátok meg. (Az algebra nyelvéhez természetesen hozzászámítom az a egész részét jelentő $[a]$ jelet is. Az 5. feladat megoldása szolgáltatja a Csebysev-tétel kulcsát, a már érintett Legendre-féle azonosságot.) **Kalmár László.**

Új feladatok.

Oldjátok meg a Csebysev-tételre és a komplex számokra vonatkozó feladatokat.

138. Bizonyítsuk be, hogy:

$$1 . (a-1) + 2 . (a-2) + 3 . (a-3) + \ldots + n . (a-n) =$$
$$= \frac{n . (n+1)(3a-2n-1)}{6}.$$

Speciálisan: $a = n+1$,

$$1 . n + 2 . (n-1) + 3 . (n-2) + \ldots + n . 1 = \frac{n . (n+1) . (n+2)}{6}.$$

Gál

139. Melyek azok a számok, melyek utolsó két jegye megegyezik a négyzetének két utolsó jegyével?

Bukovszky; *Gehér László* (Zalaegerszegi gimn. VII. o.)