A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA
MATEMATIKAI ÉS FIZIKAI TUDOMÁNYOK OSZTÁLYÁNAK
KÖZLEMÉNYEI

XII. kötet 4. szám

Szerkesztőség: Budapest, V., Nádor utca 7.
Kiadóhivatal: Budapest, V., Alkotmány utca 21.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztályának Közleményei változó terjedelmű füzetekben jelennek meg, és az Akadémia III. Osztályának felolvasóülésein bemutatott matematikai dolgozatokat, valamint egyéb dolgozatokat, referátumokat, továbbá az Osztály munkájára vonatkozó közleményeket, könyvismertetéseket stb. közölnek. Évenként egy kötet jelenik meg (négy szám alkot egy kötetet).

Kéziratok a következő címre küldendők:

A Magyar Tudományos Akadémia
III. Osztályának Közleményei
Budapest, V., Nádor u. 7.

Ugyanerre a címre küldendő minden szerkesztőségi levelezés.

Minden szerzőt 100 különlenyomat illet meg megjelent munkájáért.

Közlésre el nem fogadott kéziratokat a szerkesztőség lehetőleg visszajuttat a szerzőhöz, de felelősséget a beküldött kéziratok megőrzéséért vagy továbbításáért nem vállal.

A Közlemények előfizetési ára kötetenként belföldi címre 40 forint, külföldi címre 60 forint. Belföldi megrendelések az Akadémiai Kiadó, Budapest, V., Alkotmány u. 21. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 05-915-111-46), külföldi megrendelések a „Kultúra" Könyv- és Hírlap Külkereskedelmi Vállalat, Budapest, I., Fő utca 32. (Magyar Nemzeti Bank egyszámlaszám: 43-790-057-181) útján eszközölhetők.

A Magyar Tudományos Akadémia III. (Matematikai és Fizikai) Osztálya a következő idegen nyelvű folyóiratokat adja ki:

1. Acta Mathematica Hungarica
2. Acta Physica Hungarica.

A KVALITATÍV INFORMÁCIÓELMÉLET PROBLÉMÁI

(SZÉKFOGLALÓ ELŐADÁS)*

Írta: KALMÁR LÁSZLÓ

Az információmennyiség fogalma — néhány, kb. 20 évvel régebbi kezdeményezés[1] után — 1948-ban merült fel,[2] elsősorban a híradástechnika szükségletei folytán. Az azóta eltelt idő bebizonyította, hogy ez a fogalom nemcsak a híradástechnika számára hasznos, hanem a műszaki tudományoktól — ahol a híradástechnikán kívül elsősorban a méréstechnikában és az automatikus vezérlés tudományában nélkülözhetetlen — a számítástechnikán és a biológián keresztül egészen a nyelvtudományig és az államigazgatásig a természettudományok és a társadalomtudományok számos területén alapvető jelentőségű fogalom.

Nyilvánvaló azonban, hogy az információmennyiség fogalma az információnak csak egyik, kvantitatív oldalát tükrözi és így a ráépített *kvantitatív* információelmélet is csak egyik aspektusát vizsgálja az információnak. Akármilyen fontos is pl. a gazdaságos és megbízható hírtovábbítás szempontjából a továbbítandó híranyag információmennyiségének ismerete, annak számára, aki a hírt megkapja, sokkal fontosabb az, vajon születésről vagy halálesetről szól-e a hír. Akármennyire fontos is, hogy valamely automata gépsor vagy izomcsoport vezérlése esetén lehetőleg semmi se vesszen el a vezérlőmű, ill. a központi idegrendszer által küldött vezérlőjelek és a visszajelentő-jelek információtartalmából a huzalos, ill. az idegpálya-vezetékekben, éppoly fontos az is, hogy a vezérlő- és visszajelentő-jelek torzítatlanul érkezzenek meg, hogy valóban a szükséges akciót válthassák ki. Hasonlóan, valamely szövegnek más nyelvre való lefordítása során nemcsak az a fontos, hogy a lefordított szöveg lehetőleg ugyanakkora információmennyiséget tartalmazzon, mint az eredeti szöveg, hanem az is, hogy ugyanazt jelentse. A példákat tetszés szerint lehetne szaporítani a tudomány vagy a gyakorlat különböző területéről; azonban, úgy vélem, már a felsoroltak is eléggé mutatják az információ *kvalitatív* aspektusa figyelembevételének jelentőségét.

Azt lehetne azonban gondolni, hogy a matematikai információelméletre csak az információ mennyiségi oldala, az információmennyiség különböző mértékeinek és azok tulajdonságainak vizsgálata tartozik, az információ kvalitatív vizsgálata pedig minden egyes esetben kizárólag annak a tudományágnak a feladata, amelyhez az információ által éppen közvetített hír jelentésénél fogva tartozik. Ez a vélemény azonban nem veszi figyelembe azt, hogy a matematikát tévedésből szokták magyarul „mennyiségtannak" nevezni. A matematika sohasem szorítkozott tisztán kvantitatív

* Elhangzott a Magyar Tudományos Akadémia Matematikai és Fizikai Tudományok 1962. június 28-i felolvasó ülésén.

[1] L. pl. R. V. HARTLEY, Transmission of information, *The Bell System Technical Journal,* 7 (1928), 535—563. old.

[2] C. E. SHANNON, A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journal,* 27 (1948), 379—423, 623—653. old.; C. E. SHANNON—W. WEAWER, *The mathematical theory of communication,* Urbana, 1949; N. WIENER, *Cybernetics,* New York, 1948.

vizsgálatokra. Engels[3] már a múlt században sem a mennyiségeket, hanem a való világ térformáit és mennyiségi viszonyait jelölte meg a „tiszta" matematika tárgyául; márpedig világos, hogy a mennyiségi viszonyoknak, mint mindenféle viszonyoknak, lényeges a kvalitatív aspektusa, nem is beszélve a térformákról, amelyek, mint minden forma, elsősorban kvalitatívok. A matematika újabb feljődése pedig, amelyet Engels kora óta megtett, még jobban kidomborította a matematika teendőit a kvalitatív elemzés terén; gondoljunk csak az absztrakt algebrára, a halmazelméletre, a topológiára, vagy a matematikai logikára és a matematikai nyelvészetre, amelyek matematikai módszerek alkalmazását jelentik olyan szaktudományok (a logika, ill. a nyelvtudomány) területén, amelyeknek vajmi kevés dolguk van mennyiségekkel.

Természetesen, pl. az a kérdés, miről ad információt egy kémjelentés, nem tartozik közvetlenül a matematika körébe. Azonban meg vagyok arról győződve, hogy a matematikának vannak mondanivalói az információ jelentéstartalmáról általában, amelyek alapján más szaktudományok számára is használható matematikai modellekkel tudja leírni az azok területén használt információk kvalitatív vonatkozásait. Ezt tagadni véleményem szerint éppoly képtelenség volna, mint pl. azt állítani, hogy a felületelméletnek egyedül a felszínmérés a feladata, a felületek alaki viszonyainak vizsgálata nem tartozik rá. A különbség csak az, hogy míg a „kvalitatív" felületelmélet a geometria klasszikus fejezetei közé tartozik, addig a kvalitatív matematikai információelmélet még kiépítésre vár.

Bizonyos kvalitatív szempontok felmerültek már a „hagyományos" kvantitatív információelméletben is. Így pl. a hasznos jel és a zaj megkülönböztetése voltaképpen kvalitatív különbségtétel. Hiszen a zajnak is megvan a maga információtartalma, így nem mennyiségileg, hanem abban különbözik a hasznos jeltől, hogy olyan valamiről ad információt, ami a vizsgált kérdés szempontjából nem érdekel bennünket. Pl. rádióhallgatás során a légköri zörejek csak zavarnak bennünket, tehát a rádióműsor szempontjából zajnak minősülnek, bár esetleg a meteorológus számára értékes információt közvetítenek. Hasonlóan, egy állat fehérje-szintetizáló apparátusába valamely vírus által beküldött nukleotid-tripletek csak az állat saját fehérje-szintetizálása szempontjából tekinthetők zajnak, a vírus szempontjából hasznos információt hordoznak. Nyelvjárásban beszélő ember hallgatása közben a nyelvjárásból eredő fonéma-variánsok zajnak számítanak, mert a megértést megnehezítik, de a dialektológus számára esetleg értékes információt közölnek.

Hasonlóan, pl. a redundencia-vizsgálatokba is belejátszik az információmennyiségen kívül az is, *miről* szól az információ, hiszen pl. valamely jelkulcsrendszer akkor redundáns, ha más jelkulcsrendszer alkalmazásával kevesebb információmennyiség segítségével is lehet *ugyanarról* információt adni.

A kvalitatív matematikai információelmélet kiépítését azzal lehet kezdeni, hogy a matematikában használatos információközlési folyamatok során vizsgáljuk meg, miről ad egy-egy jel információt. Az eközben gyűjtött tapasztalatok általánosítása útján felismerhetünk és részben definíciók, részben matematikai tételek alakjában megfogalmazhatunk s az utóbbi esetben megfelelő axiómák alapján bebizonyíthatunk az információ kvalitatív tulajdonságaira vonatkozó általános törvényszerűségeket, amelyeket azután, megfelelő matematikai modellek szerkesztése után, a matematikán kívüli információközlési folyamatokra is alkalmazhatunk.

[3] F. Engels, *Herrn Eugen Dührings Umwälzung der Wissenschaft*, 1878, 6. Auflage, Berlin, 1953, 44. old.

Legegyszerűbb példa gyanánt tekintsük egy természetes szám megadását a tízes számrendszerben. Ebben az esetben tehát azok a jelek, amelyeket a szám megadásához lehet használni, a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyek, továbbá az „üres jel" a szám végén (l. később). Mielőtt egyetlen jelet megadnak nekünk, vagyis mielőtt a kérdéses szám egyetlen számjegyét ismernők, tudnunk kell, hogy természetes számról van szó, vagyis, hogy a megadandó objektum a természetes számok I halmazához tartozik. Ez tehát az a *kiinduló információ*, amellyel rendelkezünk, még mielőtt egyetlen jel valami további információt adna a kérdéses objektumról. Ilyen kiinduló információ minden esetben eleve adva van; még ha pl. a világürből kapnánk is valamilyen üzenetet, akkor is, már az első jel megfejtése előtt, tudjuk, hogy értelmes lények olyan üzenetéről van szó, amely a lehetőség szerint önmagát magyarázza.[4]

Milyen információt ad ehhez a kiinduló információhoz az, ha megtudjuk, hogy a kérdéses szám első jegye pl. 2? Nyilvánvaló, hogy akkor már nemcsak azt tudjuk, hogy a kérdéses objektum az I halmaz eleme, hanem többet: azt, hogy eleme a $(2, 3)$, $(20, 30)$, $(200, 300)$, ..., $(2 \cdot 10^n, 3 \cdot 10^n)$, ... balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_1 halmazának. Ez azért jelent több információt, mert I_1 valódi részhalmaza I-nek. A 2 számjegy által szolgáltatott információ tehát az I halmazt az I_1 valódi részhalmazára redukálja. Ugyanez történik, ha a kérdéses számról kapott hír első jele nem 2, hanem valamely tetszőleges a_1 számjegy, csak ekkor I_1 az $(a_1 \cdot 10^n, (a_1+1) \cdot 10^n)$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok halmaza $(n=0, 1, 2, \ldots)$. Csak ha $a_1=0$, akkor nem ad semmi információt az a_1 jel, mert ekkor $I_1=I$, annak megfelelően, hogy a szám elejére írt 0 számjegy redundáns.

A megadandó szám második számjegye, a_2, további információt ad a kérdéses számról: az I_1 halmazt az $(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1}, a_1 \cdot 10^n + (a_2+1) \cdot 10^{n-1})$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_2 halmazára redukálja $(n=1, 2, 3, \ldots)$. Ha $a_1 \neq 0$, akkor ez valódi redukció, még akkor is, ha $a_2=0$, mert $I_2 \subset I_1$; csak akkor nem ad semmi új információt a kérdéses számról az a_2 számjegy, ha $a_1=a_2=0$.

Általában, ha a kérdéses szám első $m-1$ számjegyét, $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$-et, már ismerjük, akkor tudjuk, hogy az az $(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{m-1} \cdot 10^{n-m+2}, a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{m-2} \cdot 10^{n-m+3} + (a_{m-1}+1) \cdot 10^{n-m+2})$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_{m-1} halmazához tartozik. A következő a_m számjegy szolgáltatta információ abban áll, hogy ezt az I_{m-1} halmazt az $(a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_m \cdot 10^{n-m+1}, \quad a_1 \cdot 10^n + a_2 \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_{m-1} \cdot 10^{n-m+2} + (a_m+1) \cdot 10^{n-m+1})$ balról zárt intervallumok valamelyikében fekvő természetes számok I_m halmazára redukálja, amely minden esetben részhalmaza I_{m-1}-nek és $a_1=a_2=\ldots=a_m=0$ kivételével valódi részhalmaza.

Az a_m számjegy után vagy újabb a_{m+1} számjegy jön, vagy — semmi, vagyis az az információ, hogy a kérdéses szám m-jegyű. Annak ellenére, hogy ez utóbbi információt valamely feltűnő „szám vége" jel helyett az *üres jel* szolgáltatja, ez nagyon fontos információ: az I_m végtelen halmazt az egyetlen $a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + \ldots + a_m$ számból álló halmazra redukálja. Az, hogy ilyen fontos információt az üres jelre bízunk, a tízes (vagy bármely más alapszámú) számrendszernek, mint jelkulcsrendszernek különleges sajátossága.

[4] Az, hogy kiinduló információnak minden esetben lennie kell, a kvantitatív információelmélet szempontjából is világos, különben az első jel végtelen nagy információmennyiséget szolgáltatna.

A tízes számrendszer egyszerű példa *egylépcsős matematikai nyelvre*. Egylépcsős, mert a rendszer jeleiből, az $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \triangledown\}$ „ábécé" elemeiből, ahol $\triangledown$ az üres jelet jelöli,[5] csak egyféle funkciójú jelsorozatokat, ti. kifejezéseket képez, amelyek természetes számokról adnak hírt. E nyelv *szintaxisa*, vagyis a kifejezések képzési szabálya, nagyon egyszerű: kifejezés minden olyan, az A ábécé elemeiből képezett „szó" (véges jelsorozat), vagyis az A halmaz által generált szabad félcsoport minden olyan eleme, amelynek utolsó „betűje" $\triangledown$, többi betűi azonban $\triangledown$-tól különbözők és valóban van $\triangledown$-tól különböző betűje. Ezzel szemben valamely pl. matematikai — matematikai logikai formulanyelv *kétlépcsős*, amennyiben az ábécéjéből (az összes, a nyelvben felhasznált matematikai és matematikai logikai jelek halmazából) képezhető szavak közül azokat, amelyeket egyáltalában felhasznál, két kategóriába osztja: *kifejezésekre* és *formulákra*. A kifejezések[6] funkciója az, hogy matematikai individuumokat (pl. számokat, függvényeket, halmazokat) jelöljenek, a formuláké pedig az, hogy ítéleteket, más néven állításokat (pl. axiómákat, sejtéseket, tételeket) fejezzenek ki. Pl. $(a+b)^2$ (algebrai) kifejezés, $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$, $a^2+2ab+b^2$ szintén az[7], ezzel szemben $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$ formulák. Azt azonban, hogy mely szavak kifejezések és melyek formulák, e jelentésbeli funkciójukra való hivatkozás nélkül, tisztán formális tulajdonságaik alapján definiálja a kérdéses nyelv szintaxisa[8]; a kifejezések és formulák jelentésének definíciója azután a kérdéses formulanyelv *szemantikájára* tartozik.

Egylépcsős a matematikai logika ítéletkalkulusának formulanyelve is, minthogy ebben csak formulák szerepelnek (kifejezések nem). E nyelv ábécéje megszámlálható: a logikai műveletek jelén: a $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ jeleken (sorra a negáció, konjunkció, diszjunkció, implikáció és ekvivalencia jelén) és a kezdő- és végzárjelen, a (és) jeleken kívül megszámlálhatóan végtelen sok logikai változót tartalmaz. Szintaxisa a formulák halmaza következő rekurzív[9] definíciójából áll: 1. egy egy betűs szó akkor

[5] A $\triangledown$ jel nem tévesztendő össze az üres szóval, amely az A halmaz generálta szabad félcsoport egységeleme (míg $\triangledown$ ennek egyik generátoreleme).

[6] HILBERT eredetileg a kifejezésre az Ausdruck, a formulára a Formel szót használta. Később az Ausdruck szó helyett a rövidebb Term-re tért át. Az újabb német matematikai logikai irodalom az így felszabadult Ausdruck szót a formula értelmében foglalta le, Formel-en tetszőleges véges jelsorozatot értve. A megfelelő angol szakkifejezések: term, well-formed formula, ill. formula. Újabban az ALGOL 60 algoritmikus nyelv visszatért az expression szakkifejezéshez.

[7] Az, hogy itt szigorúan nem lineáris elrendezésű jelsorozatokról, hanem síkbeli elrendezésű figurákról van szó, elvileg nem okoz nehézséget; a linearizálás (pl. $(a+b)/2$) különben is csak triviális módosításokat kíván. Az, hogy $\sqrt{ab}$ *algebrai* kifejezés-e, megállapodás kérdése.

[8] Hogy ez hogyan történhetik, arról hozzávetőleges képet ad az, hogy $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$-ről és $\sqrt{ab} \leqq \frac{a+b}{2}$-ről pusztán annak alapján felismerhető, hogy formulák és nem kifejezések, hogy az $=$, ill. $\leqq$ jel előfordul bennük.

[9] Itt a rekurzió a szó hossza (betűinek száma) szerint halad. A matematikai logikában szokásosabb az ilyenféle rekurzív definíciók következő (a matematikus szemszögéből kevésbé szabványosnak tűnő) stílusban való kimondása: 1. minden logikai változó formula; 2. ha f formula, akkor $\neg f$ is formula; 3. ha f és g formulák, akkor $(f \wedge g)$, $(f \vee g)$, $(f \rightarrow g)$, $(f \leftrightarrow g)$ is formulák; 4. másféle szó nem formula. — Az itt adott zárójelhasználat — annak árán, hogy a formulákat, amennyiben nem egyetlen logikai változóból állnak, feleslegesen zárójelbe zárja — automatikusan biztosítja a teljes zárójelezést.

és csak akkor formula, ha egyetlen betűje logikai változó; 2. egy több betűs szó akkor és csak akkor formula, ha vagy első betűje $\neg$ és az ennek elhagyásával keletkező szó formula, vagy első betűje (, utolsó betűje), és van olyan betűje, amely az $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ és $\leftrightarrow$ jelek egyike és a szóban e betűt megelőző betűk is, az első (elhagyásával, az őt követő betűk is, az utolsó) elhagyásával, formulát alkotnak.

Viszont a szokásos matematikai — matematikai logikai formulanyelvnek (pl. elektronikus számológépeken végrehajtható) számítási algoritmusok megadására szolgáló bővítései, az ún. algoritmikus nyelvek, pl. a *Ljapunov*-féle operátor-nyelv[10] és az ALGOL 60 nyelv[11], *négylépcsős* nyelvek, amennyiben kifejezéseken és formulákon kívül deklarációkat és utasításokat is képeznek[12]. A természetes nyelvek nyilván még több lépcsősek.

Mint mondtuk, a kifejezések, formulák (és egyéb nyelvi képződmények, pl. deklarációk, utasítások stb.) jelentésével a matematikai — matematikai logikai formulanyelvek, az algoritmikus nyelvek és a természetes nyelvek szemantikája (jelentéstana) foglalkozik. Az információ (kvalitatív információelméleti) fogalma is tehát nyilván kapcsolatos a (nyelvnek tekintett) szóban forgó jelkulcsrendszer szemantikájával. Míg azonban a szemantika csak a kész nyelvi képződmények jelentését vizsgálja egészében, a kvalitatív információelmélet feladata annak elemzése, milyen információt szolgáltatnak ehhez a jelentéshez a kérdéses nyelvi képződmény egyes jelei.

Maradjunk egyelőre az egylépcsős, mégpedig olyan matematikai nyelveknél, amelyekben nincs más nyelvi képződmény, mint kifejezés. Ezek közül is a legegyszerűbbek azok a matematikai nyelvek, amelyekben nincsenek *változók*; ilyen többek között a tízes számrendszer is. Az ilyen nyelvekben minden kifejezés jelentése egy bizonyos I halmaz, az ún. individuumtartomány, egy határozott eleme.

Legyen adva egy ilyen, változó nélküli egylépcsős kifejezés-nyelv. Legyen A a nyelv ábécéje, vagyis azon jelek halmaza, amelyből a nyelv kifejezései felépülnek. A nyelv minden kifejezése tehát egy, az A ábécé jeleiből képezett szó, vagyis az A halmaz által generált $P(A)$ szabad félcsoport eleme. Legyen adva a nyelv szintaxisa; ez meghatározza, hogy a $P(A)$ halmaz mely elemei számítanak a nyelvben kifejezéseknek, más szóval, megadja a $P(A)$ halmaz egy K részhalmazát, mint a nyelv kifejezéseinek halmazát. Végül legyen adva a nyelv szemantikája; ez hozzárendeli a nyelv bármely k kifejezéséhez, vagyis a K halmaz bármely eleméhez, hogy az I individuumtartomány valamely $\sigma(k)$ elemét, mint k jelentését. Eszerint, a matematikában szokásos absztrakt kifejezésmódot használva, változó nélküli egylépcsős kifejezés-nyelven olyan (A, K, I, σ) négyest érthetünk, ahol A és I két tetszőleges halmaz, K az A halmaz által generált szabad félcsoport valamely részhalmaza, σ pedig a K halmaz valamely leképezése I-be. Minthogy I azon elemeinek, amelyek egy K-beli k-nak sem képei a σ leképezésnél (vagyis amelyekhez nincs olyan kifejezés, amelynek jelentése a kérdéses elem volna), a továbbiakban semmi szerepük nem lesz, ezeket I-ből el is hagyhatjuk, tehát feltételezhetjük, hogy σ a K halmaznak az I halmazra való leképezése.

[10] L. pl. A. A. Ляпунов, О логических схемах программ, Проблемы кибернетики, 1 (Москва, 1958), 46—74. old.

[11] L. pl. P. NAUR (szerkesztő) és társai, Report on the algorithmic language ALGOL 60, *Numerische Mathematik*, 2 (1960), 106—136 old.

[12] A *Ljapunov*-féle operátor-nyelvben is vannak deklarációk, habár Ljapunov nem számítja azokat az operátor-sémához.

Tekintsünk egy tetszőleges k kifejezést. Álljon ez rendre az A ábécé $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jeleiből, amit így írunk: $k = a_1a_2\ldots a_m$. Jelentse $l = 1, 2, \ldots, m$ esetén $K_l = K_l(k)$ az összes $k' = a_1a_2\ldots a_l a'_{l+1}\ldots a'_{m'}$ alakú kifejezések halmazát, vagyis azokét, amelyeknek első l jele megegyezik k első l jelével.[13] K_l nem üres, hiszen $k \in K_l$. Tegyük fel, hogy bármely $k \in K$ esetén, $K_m = K_m(k) = \{k\}$, azaz egyedül a k kifejezésből áll (más szóval, hogy valamely kifejezéshez további jeleket írva nem kaphatunk újabb kifejezést). Ez a feltevés számos matematikai kifejezés-nyelv esetén magától teljesül, ha pedig nem teljesül, mesterségesen elérhető a következő módon. Vegyünk hozzá A-hoz egy benne nem levő $\triangledown$ jelet, amelyet „kifejezés vége jelnek" nevezünk. Módosítsuk a nyelv szintaxisát úgy, hogy a K halmaz $k = a_1a_2\ldots a_m$ elemei helyett az $a_1a_2\ldots a_m\triangledown$ szavakat tekintsük kifejezéseknek. Minthogy a $\triangledown$ jel kifejezés belsejében nem szerepelhet, a feltevés nyilván teljesülni fog. Ilyen $\triangledown$ jel bevezetése célszerű lesz (ha a mondott feltevés magától nem teljesül az eredeti nyelvre), mert, mint látni fogjuk, lényeges információ hordozója.

Legyen továbbá, $l = 1, 2, \ldots, m$ esetén, $I_l = I_l(k)$ az I halmaz összes $\sigma(k')$ alakú elemeinek halmaza, ahol $k' \in K_l$. Akkor speciálisan $I_m = \{\sigma(k)\}$. Jelöljük az I halmazt I_0-val is. Ha valamely kifejezésről csak azt tudjuk, hogy az $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ jelekkel kezdődik ($l=1$ esetén semmit sem tudunk róla), akkor a jelentéséről azt tudjuk, hogy I_{l-1}-hez tartozik. Ha ezenfelül azt is megtudjuk, hogy a kifejezés következő jele a_l, akkor ezzel azt az információt nyerjük, hogy a kifejezés jelentése I_l-hez tartozik. Az a_l jel szolgáltatta információ tehát az I_{l-1} halmaznak I_l-re való redukciójában áll.

Hogy ismét a matematikában szokásos absztrakt kifejezésmódot használhassuk, *nevezzük információnak* (a kvalitatív információelmélet értelmében) *az olyan* (I', I'') *párokat, ahol I' valamely tetszőleges halmaz, I'' pedig I'-nek részhalmaza.* Itt tehát az I' halmaznak (amelyről tudtuk, hogy valamely objektum hozzá tartozik, ill. a kérdéses objektumról azt, hogy I'-hez tartozik) I'' részhalmazára való redukcióját (abból a szempontból, hogy újabb információ révén megtudtuk, hogy a kérdéses objektum I''-hez tartozik) az (I', I'') párral azonosítottuk. Ezek után tehát mondhatjuk, hogy a fent említett esetben *a $k = a_1a_2\ldots a_m$ kifejezés l-edik jele, a_l által szolgáltatott információ az (I_{l-1}, I_l) pár.* (Világos, hogy $I_l \subseteqq I_{l-1}$.)

Ehhez még a következőket fűzhetjük hozzá. Minthogy I_{l-1} és I_l általában nemcsak az a_l jeltől, hanem a k kifejezéstől, pontosabban (l. a 13. lábjegyzetet) annak első $l-1$, ill. l jelétől függnek, *az a_l jel szolgáltatta információ is általában függ attól, mely kifejezésben szerepel az a_l jel, s abban hol fordul elő* (az esetleg több példányban is előforduló a_l jel melyik példányáról van szó), pontosabban: *az a_l jelen kívül általában az őt megelőző $a_1, a_2, \ldots, a_{l-1}$ jelektől is függ.* Ez semmivel sem meglepőbb jelenség, mint az, hogy a tízes számrendszerben a számjegyeknek alaki értékükön kívül helyi értékük is van.

A k kifejezés utolsó a_m jele (esetleg az utólag bevezetett kifejezés vége jel) általában lényeges információt szolgáltat: az I_{m-1} halmaznak, amely általában többelemű (esetleg végtelen) halmaz, az egyelemű $I_m = \{\sigma(k)\}$ halmazra való redukcióját, amelynek egyetlen eleme éppen az egész k kifejezés, mint hír által megadandó objektum.

[13] K_l, és ennélfogva a később definiálandó I_l halmaz is, nyilván csak az $a_1, a_2, \ldots, a_l$ jelektől függ.

Megeshetik, hogy valamely $k = a_1a_2\ldots a_m$ kifejezés valamely a_l jelpéldánya esetén $I_l = I_{l-1}$, vagyis az a_l jelpéldány szolgáltatta (I_{l-1}, I_{l-1}) információ nem redukálja az I_{l-1} halmazt, amelyről az a_l jel beérkezte előtt is tudtuk, hogy a megadandó $\sigma(k)$ objektumot tartalmazza. Mégsem mondhatjuk ez esetben mindig, hogy az a_l jel e helyen redundáns, azaz nem szolgáltat semmiféle információt. Ugyanis megeshetik, hogy a további $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_m$ jelek szolgáltatta információ függ az a_l jeltől. Ebben az esetben azt mondjuk, hogy az a_l jelpéldány *látens információt* szolgáltat. Egyszerű példa erre egy olyan nyelv, amelyben a természetes számokat bármely számrendszerben megadhatjuk. E nyelv ábécéje álljon az összes természetes számból (a 0-t beleértve) és a $*$ jelből. Kifejezései legyenek a $g * a_1a_2\ldots a_m$ alakú szavak, ahol g tetszőleges 1-nél nagyobb természetes szám, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ pedig g-nél kisebb természetes számok. I legyen a természetes számok halmaza, s a fenti kifejezés jelentése legyen $a_1 \cdot g^{m-1} + a_2 \cdot g^{m-2} + \ldots + a_m$. Világos, hogy a fenti kifejezés első jele szolgáltatta információ (I, I), hiszen bármely természetes szám bármely 1-nél nagyobb alapú számrendszerben felírható. Mégis lényeges, bár azon a helyen, ahol szerepel, látens, információt szolgáltat a g jel is, hiszen az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ jelek szolgáltatta információ nagyon is függ g-től. Ezzel szemben a $*$ jel, amely szintén az (I, I) információt szolgáltatja, redundáns, már csak azért is, mert a g után semmiféle más jel nem állhat, mint $*$.

Általában redundáns valamely $k = a_1a_2\ldots a_m$ kifejezés valamely a_j jelpéldánya, ha az A ábécé egyetlen egy a_j-től különböző a'_j jeléhez sincs K-nak $a_1a_2\ldots a_{j-1}a'_ja'_{j+1}\ldots a'_{m'}$ alakú eleme. De akkor is redundánsnak tekinthető, ha A bármely olyan a'_j elemére, amelyhez van K-nak $k' = a_1a_2\ldots a_{j-1}a'_ja'_{j+1}\ldots a'_{m'}$ alakú eleme, és bármely ilyen k' elemre, $k'' = a_1a_2\ldots a_{j-1}a_ja'_{j+1}\ldots a'_{m'}$ is eleme K-nak és viszont, valahányszor $k'' = a_1a_2\ldots a_{j-1}a_ja'_{j+1}\ldots a'_{m'}$ eleme K-nak, $k' = a_1a_2\ldots a_{j-1}a'_ja'_{j+1}\ldots a'_{m'}$ is eleme, továbbá a k kifejezés $a_{j+1}, a_{j+2}, \ldots, a_m$ jeleinek mindegyike ugyanazt az információt szolgáltatja, mint a $k''' = a_1a_2\ldots a_{j-1}a'_ja_{j+1}a_{j+2}\ldots a_m$ kifejezés megfelelő jele (vagyis ez az információ nem függ a_j-től; világos, hogy ekkor $\sigma(k) = \sigma(k''')$). A kezdő 0 számjegy esete a tízes számrendszerben mutatja, hogy még ez az eset sem meríti ki az összes olyan eseteket, amikor valamely jelet redundánsnak szoktunk tekinteni.

A látens információ esete jól ismert a számítástechnikából: az ilyen információt hordozó jelet tárolni kell mindaddig, amíg a látens információ „fel nem tárul". A tárolókapacitás igénybevételének csökkentésére kívánatos a jelkulcsrendszert úgy választani, hogy minél kevesebb jel hordozzon látens információt, és az minél kevesebb további jel beérkezése után feltáruljon. Evégett kívánatos a látens információ tényének puszta regisztrálása helyett azt közelebbről elemezni. Ehhez az információ fenti definíciójának finomítása szükséges, pl. oly módon, hogy az (I', I''), ill. (I_{l-1}, I_l) párba, további komponensként, azokat a függvényeket is felvegyük, amelyek megadják, hogyan függ a későbbi $a_{l+1}, a_{l+2}, \ldots, a_m$ jelek szolgáltatta információ ezektől a jelektől (az eredeti vagy a finomított értelemben, amely utóbbi esetben nyilván rekurzív definícióról van szó).

Az olyan egylépcsős matematikai kifejezés-nyelvek esetére, amelyekben egyes jelek változók szerepét játsszák, amelyek az individuumtartomány elemein futnak át, — amely esetben egy-egy kifejezés jelentése is az individuumtartomány valamely, a kifejezésben szereplő változóktól függő eleme — úgy lehet a fenti meggondolásokat átvinni, hogy az eredeti I individuumtartomány helyett az $\bigcup_{n=0}^{\infty} I^n$ halmaznak I-be való leképezései J halmazát tekintjük individuumtartománynak s az I halmaz bizonyos I-n átfutó változóktól függő eleme helyett J azon határozott elemét tekintjük valamely kifejezés jelentésének, amely megadja, hogy I kérdéses eleme hogyan függ e változóktól. Az individuumtartomány hasonló megváltoztatása célszerű lehet változó nélküli kifejezés-nyelvek esetében is. Álljon pl. egy ilyen kifejezés-nyelv ábécéje a 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből, a + és − előjelből és a ∇ kifejezés vége jelből. Kifejezései legyenek az $\varepsilon_1 a_{11} a_{12} \dots a_{1m_1} \varepsilon_2 a_{21} a_{22} \dots a_{2m_2} \varepsilon_3 \dots \varepsilon_n a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm_n} \nabla$ alakú szavak, ahol $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm_n}$ számjegyek, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ pedig előjelek; e kifejezés jelentése legyen az $\varepsilon_1 a_{11} a_{12} \dots a_{1m_1}, \varepsilon_2 a_{21} a_{22} \dots a_{2m_2}, \dots, \varepsilon_n a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm_n}$ egész számok összege (I az egész számok halmaza). Akkor a fenti kifejezés valamennyi jele ∇ kivételével látens információt hordoz, amely csak az utolsó ∇ jel beérkezésekor tárul fel, hiszen bármely egész szám felírható, adott $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ előjelek, $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nm_n}$ számjegyek és alkalmas további ε_{n+1} előjel és $a_{n+1,1}, a_{n+1,2}, \dots, a_{n+1,m_{n+1}}$ számjegyek esetén, $\varepsilon_1 a_{11} a_{12} \dots a_{1m_1} + \varepsilon_2 a_{21} a_{22} \dots a_{2m_2} + \dots + \varepsilon_n a_{n1} a_{n2} \dots a_{nm_n} + \varepsilon_{n+1} \cdot a_{n+1,1} a_{n+1,2} \dots a_{n+1,m_{n+1}}$ alakban. Így ez esetben célszerű nem magukat az egész számokat, hanem felbontásukat természetes számok algebrai összegére tekinteni az individuumtartomány elemeinek, ill. a kifejezések jelentésének.

Hasonló a helyzet a többlépcsős matematikai nyelvek esetén. A matematikai logikában szokás a formulák jelentéseként az „igaz" és „hamis" logikai értékek egyikét definiálni, aszerint, hogy a formula igaz vagy hamis állítást fejez-e ki. Ez esetben, ha a formula jelei szolgáltatta információt a fentiekhez hasonlóan definiálnók, úgy, hogy I szerepét a két logikai érték L halmazának adjuk át, a formula valamennyi jele, az utolsó nem redundáns jel kivételével, az (L, L) látens információt hordozná. Ez mutatja, hogy célszerűbb magát a formula által kifejezett állítást, vagy méginkább azt a feladatot tekinteni a formula jelentésének, döntsük el, igaz-e vagy hamis ez az állítás. Hasonlóan, az algoritmikus nyelvek esetén pl. az utasítások által megadott algoritmus végrehajtásának feladatát célszerű az utasítás jelentésének tekinteni. A nyelvi képződmények jelentésének alkalmas definíciója, ill. az individuumtartomány, mint e jelentések halmaza alkalmas definíciója segítségével tulajdonképpen az egylépcsős nyelvek esetére lehet visszavezetni a többlépcsős nyelvek esetét is.

A fentiekben a kvalitatív matematikai információelmélethez csupán néhány gondolatot adtam meg; az elmélet kiépítése, amely nem lesz könnyű feladat, még hátra van. Többek között tisztázandó még az új elméletnek a hagyományos, kvantitatív információelmélettel való kapcsolatának kérdése.

Az elméletnek azonban a mai csökevényes alakjában is van néhány alkalmazása. Az egyik ilyen alkalmazás az ún. Szegedi Logikai Géphez automatikus formulaközlő mű konstruálása. Ugyanis a Szegedi Logikai Gép eredeti alakjában a gép által vizsgálandó logikai formulát oly módon kellett a géppel közölni, hogy a géphez készült, ún. műveleti dobozokból dugaszolás útján egy megfelelő áramkört építünk fel. Ez lassú és sok hibalehetőségre alkalmat adó folyamat. Ehelyett olyan jelfogós és keresőgépes kiegészítő berendezést szerkesztettünk a géphez, amely a formula szukcesszív jeleinek megfelelő billentyűk egymásutáni lenyomására felépíti az eddig dugaszolással felépített áramkört. (A berendezés jelenleg huzalozás alatt áll.) Evégett részletesen analizálni kellett, miről ad információt az ítéletkalkulus egy tetszőleges formulájának egy-egy jele (zárójel, logikai művelet jele vagy logikai változó) s hogy ezen információ alapján a kérdéses áramkör felépítésének mely részfeladatát kell a berendezésnek a jelnek megfelelő billentyű lenyomására elvégeznie. Ehhez az információ fenti definíciója, ill. valamely egylépcsős nyelv egy-egy jelpéldánya által szolgáltatott információról mondottak (az ítéletkalkulus formulanyelvére átvive) elegendőnek bizonyultak. Hasonló, csak sokkal bonyolultabb elemzés kellett egy olyan elektronikus számológép megtervezéséhez, amely a hagyományos értelemben vett programozás nélkül (tehát speciálisan programozó program összeállítása nélkül), a végrehajtandó numerikus számítási algoritmusnak egy megfelelő algoritmikus nyelven való felírása alapján működik. Evégett ugyanis azt kellett elemezni, miről ad információt e számítási algoritmus tekintetében az algoritmikus nyelv egy-egy jele, s hogy a számológépnek ezen információ alapján milyen (esetleg mikro-) utasítást kell végrehajtania, amikor a kérdéses jel, megfelelően kódolt alakban, a gép memóriájából az utasításregiszterbe kerül, avégett, hogy ezen utasítások eredője mindig éppen a kívánt algoritmus végrehajtása legyen.

További előrelátható alkalmazások közül megemlítem az algoritmikus nyelvek optimalizálását abból a szempontból, hogy minden jel „épp a legjobbkor" hozza az általa szolgáltatott információt. (Ha túl korán hozza, tárolni kell, míg az ezen információ feldolgozásához szükséges többi adat is beérkezik; ha túl későn hozza, akkor ezeket a többi adatokat kell sokáig tárolni.) De — megfelelő matematikai modellek segítségével — lehetségesnek tartok a matematikán, a matematikai logikán és a számítástechnikán kívüli alkalmazásokat, pl. a matematikai nyelvészetben. Gondolok pl. a morfémahatárok szabatos definíciójára, amelyek nyilván azzal a minőségi változással függnek össze, amely a szó egyes jelei (a fonémák, ill. az írott nyelv esetén a betűk) szolgáltatta információban mutatkozik.

(Beérkezett: 1962. VI. 28)

SOME PROBLEMS OF QUALITATIVE INFORMATION THEORY

(Abstract)

To-day information theory is dealing with the possible ways of measuring information *quantity*. However, given a coding system, also the question, *about what* a particular sign of a message gives information, can be dealt with mathematically. In the simplest case, this information consists in reducing the set about which before arrival of the sign in question was known to contain the object to be given, totally or partially, by the whole message, to some of its sub-sets, depending in general, besides the sign in question, also on those arrived prior to it. Applications, especially to formula languages.