# Zajok és fluktuációk fizikai rendszerekben

## Zajjelenségek modellezése

Makra Péter

SZTE Kísérleti Fizikai Tanszék

2009-2010. őszi félév

Változat: 0.1 | Legutóbbi frissítés: 2009. október 14.

# Tartalom


1. Bevezetés
2. Analóg modellezés
   - Műveletek
   - A kettős potenciálvölgy modellezése
3. Zajok előállítása analóg módszerekkel
4. Numerikus szimulációk
   - Zajok generálása
5. Monte Carlo-módszerek
   - Brown-mozgás modellezése
   - Kétdimenziós Ising-modell
   - Félvezető minták impedanciaspektroszkópiája
6. Differenciálegyenletek numerikus megoldása

# Miért modellezünk?

- az analitikus megoldás megkeresése gyakran nagy nehézségekbe ütközik, különösen színes zajoknál
- az elméleti eredmények ellenőrzésére
- analóg modellezésnél valós zajforrásokkal dolgozhatunk

# Analóg modellezés

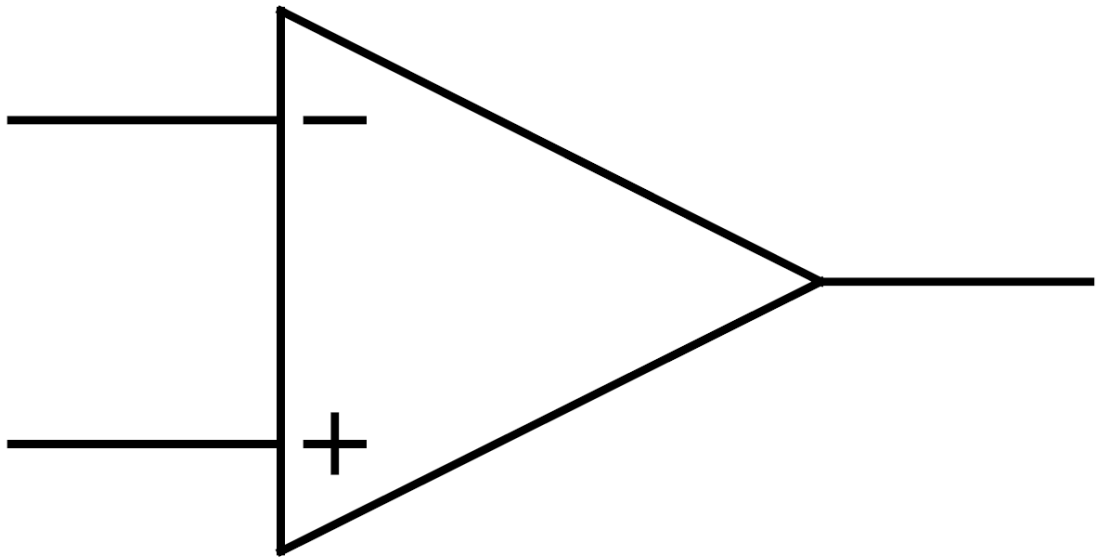
## Előnyök

- valós zajforrásokkal dolgozhatunk
- időben folytonosak a jelek és a megoldás (ellentétben a digitális modellezés diszkrét lépésközével)
- nincsenek konvergenciaproblémák

## Hátrányok

- korlátozott pontosságú alkatrészek
- meghatározott feszültségtartományon kell dolgozni
- az áramköri elemek válaszideje is korlátozott

# Alapegység: műveleti erősítő




- + egyenes bemenet: $U_+$
- − fordító bemenet: $U_-$
- kimenet: $U_{\text{ki}}$

# A műveleti erősítő tulajdonságai

## Ideális

- $U_{\text{ki}} = A\left(U_+ - U_-\right)$
- $A$: nyílthurkú erősítés, $A \to \infty$
- a bemenőellenállás végtelen
- a bemenőáramok értéke 0

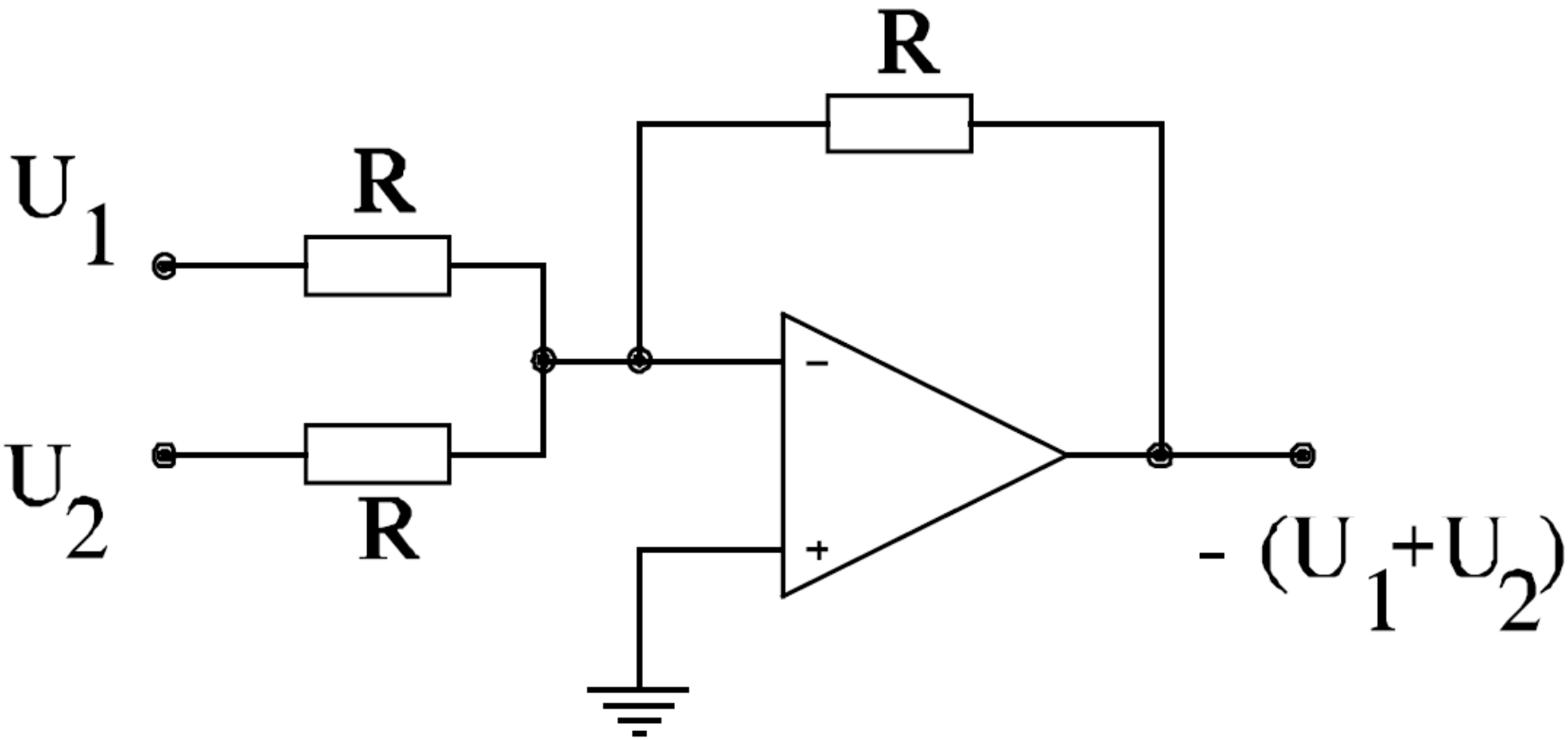
## Reális

- az erősítés frekvenciafüggő
- $A$ értéke tipikusan $10^4$–$10^6$ között
- mV nagyságrendű offszetfeszültség
- MΩ nagyságrendű bemenőellenállás
- nA nagyságrendű bemenőáram
- hőmérsékletfüggés

# Negatív visszacsatolás

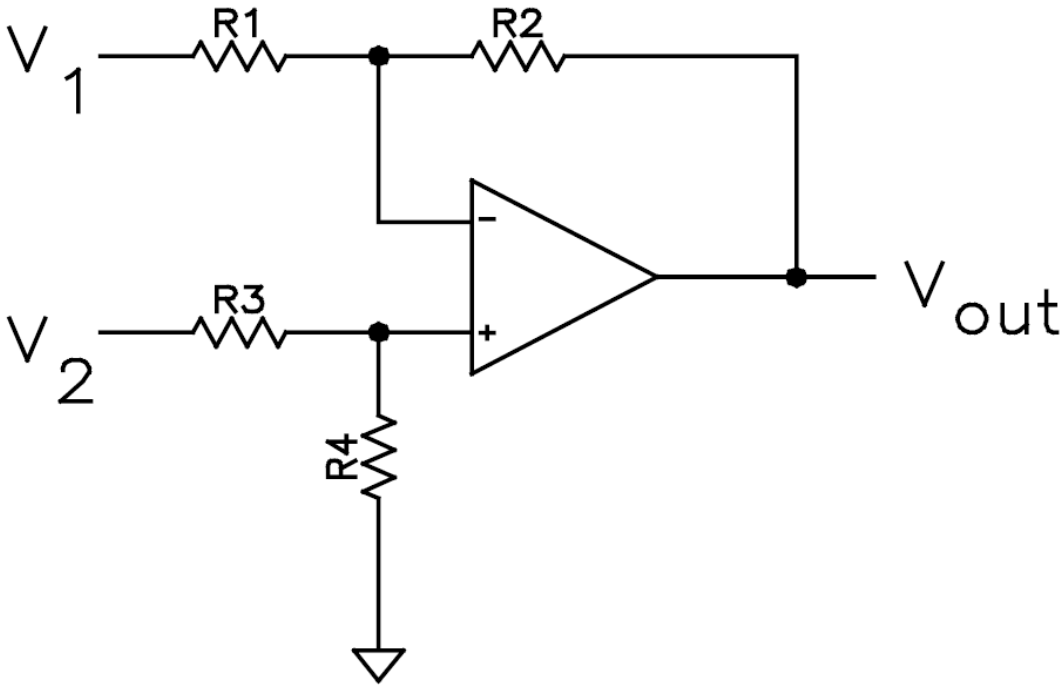
- $U_{\text{ki}} = A\left(U_+ - U_-\right)$
- $U_+ - U_- = \frac{U_{\text{ki}}}{A}$
- $A \to \infty$
- $U_+ - U_- \to 0$
- a visszacsatolás eltüntetni igyekszik a bemenetek közti különbséget
- ha az egyenes bemenetet földre kötjük, a fordító bemenet „virtuális földpont”
- ez a kapcsolások értelmezésénél nagyon hasznos

# Összeadás



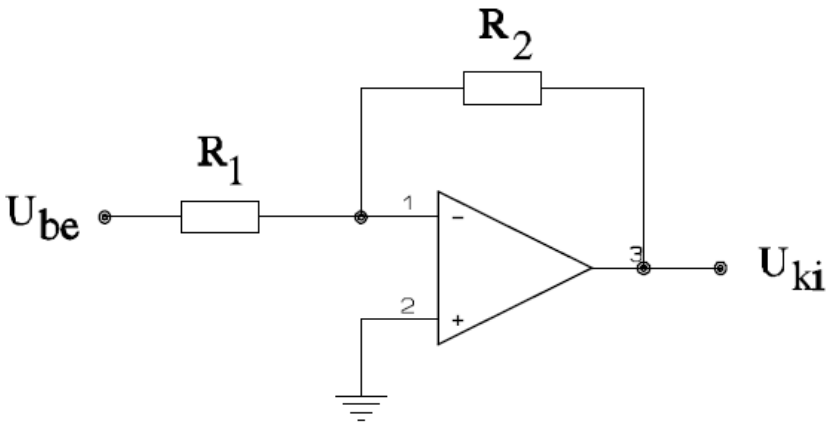

- $U_{\mathrm{ki}} = -\left(U_1 + U_2\right)$

# Kivonás

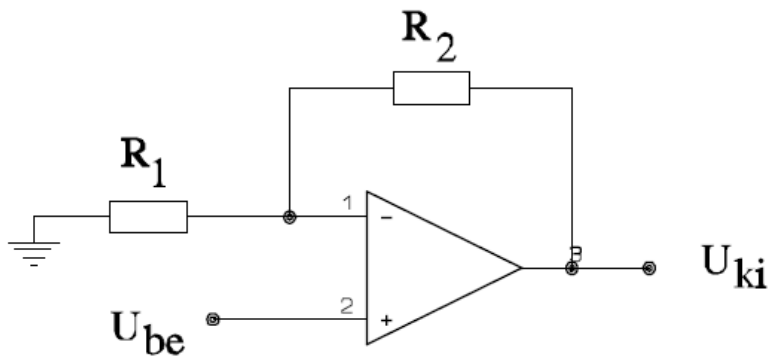



- $U_{\text{ki}} = \frac{R_4}{R_3+R_4}\frac{R_1+R_2}{R_1}U_2 - \frac{R_2}{R_1}U_1$
- ha $R_1 = R_2 = R_3 = R_4$: $U_{\text{ki}} = U_2 - U_1$

# Szorzás kontanssal

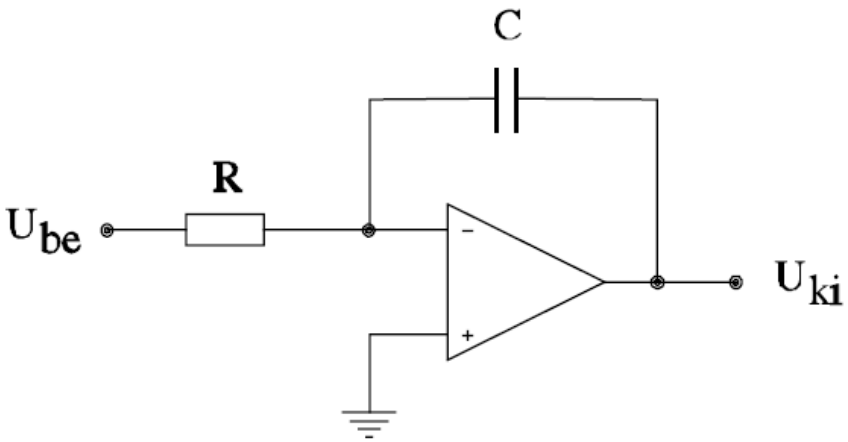


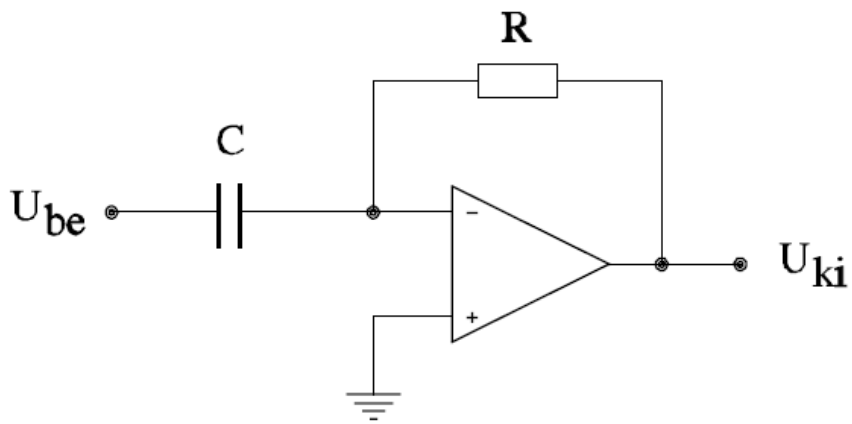

$$U_{ki} = -\frac{R_2}{R_1} U_{be}$$




$$U_{ki} = \frac{R_1 + R_2}{R_1} U_{be}$$

# Differenciálás és integrálás

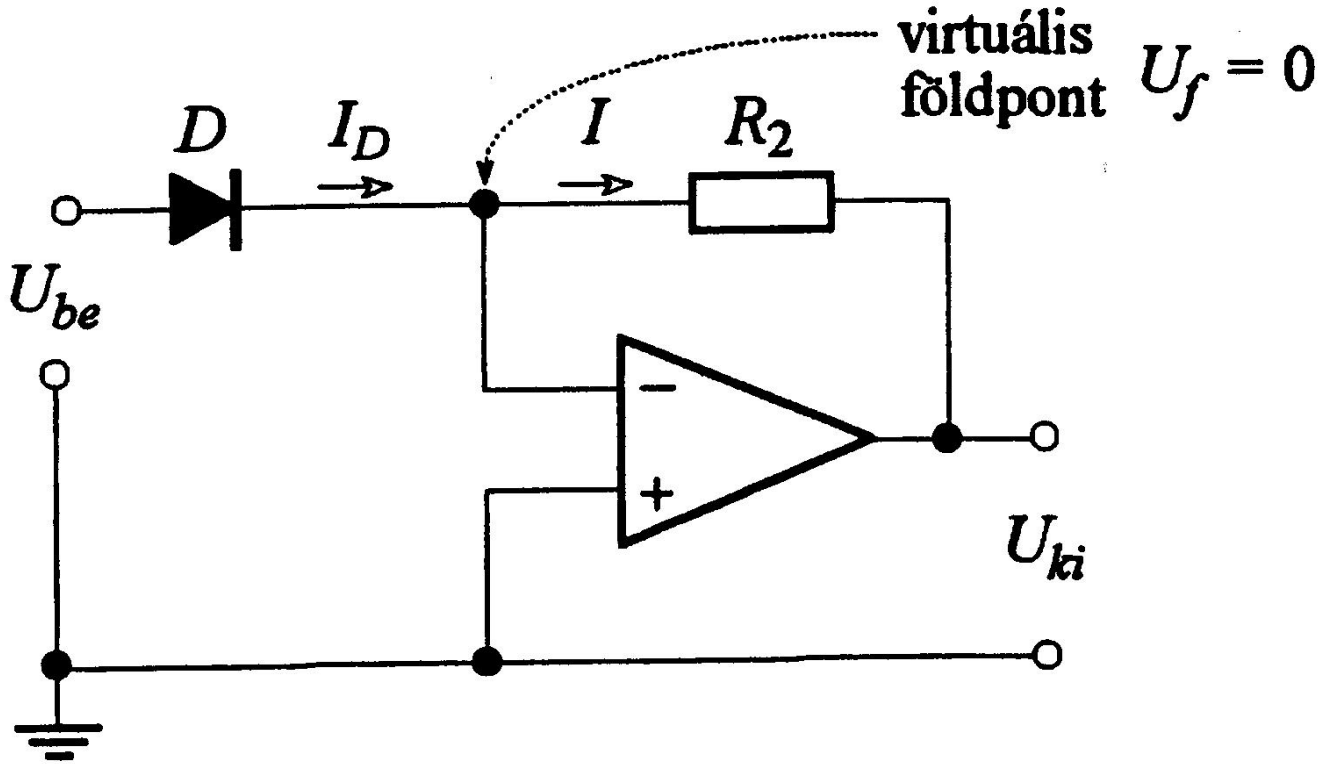



$$U_{ki}(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t U_{be}(t)\,dt + U_{ki}(0)$$

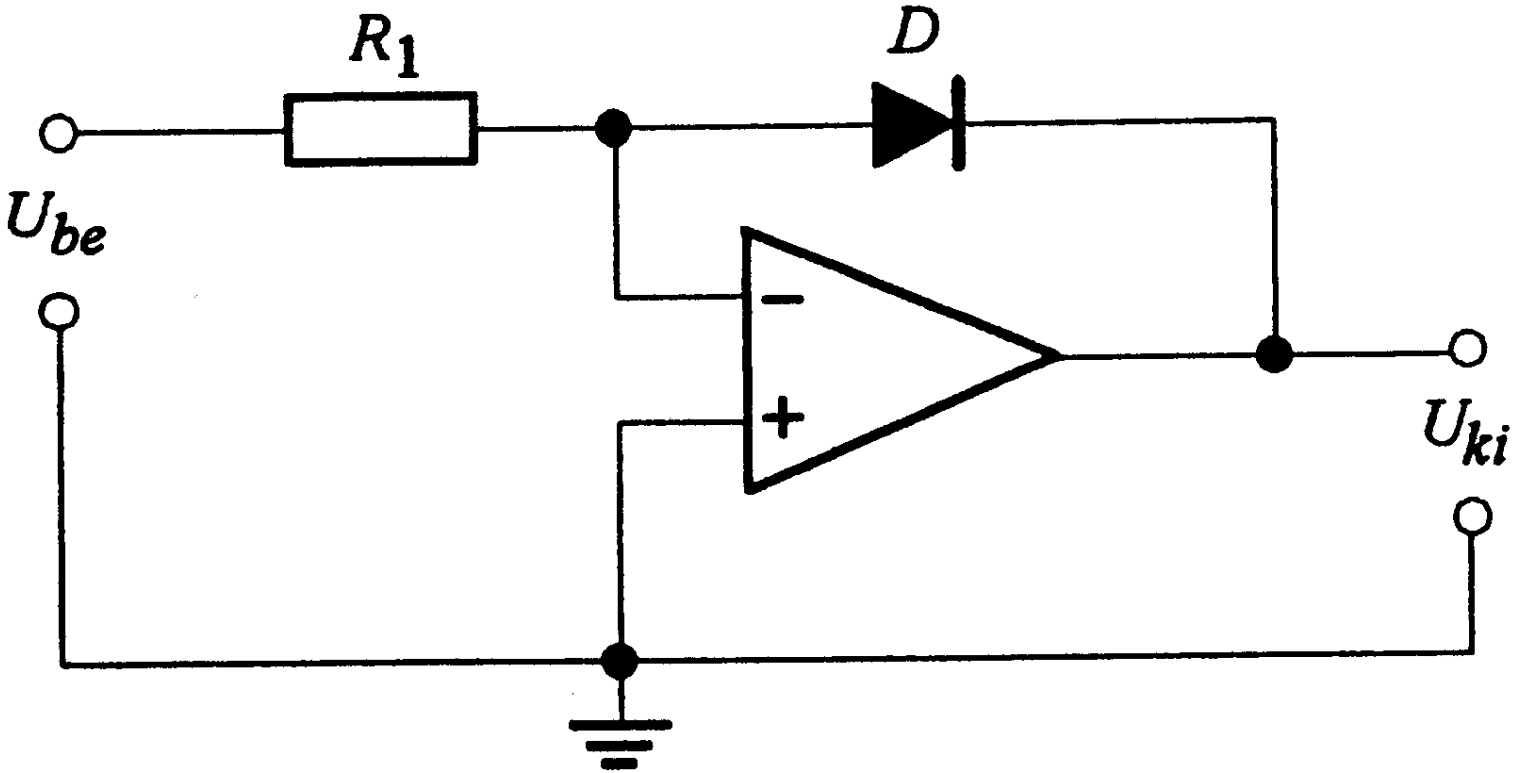
$$U_{ki}(t) = -RC\frac{dU_{be}(t)}{dt}$$

# Exponenciális függvény




- $U_{\mathrm{ki}} = -I_0 R_2 \mathrm{e}^{\frac{U_{\mathrm{be}}}{U_T}}$
- $I_0$: a dióda telítési árama
- $U_T := \frac{kT}{e}$

# Logaritmusfüggvény




- $U_{\mathrm{ki}} = -U_T \ln\left(\frac{U_{\mathrm{be}}}{I_0 R_1}\right)$

# Egyéb műveletek

- szorzás, hatványozás, gyökvonás:
  - exponenciális vagy logaritmusfüggvények segítségével összadás-kivonásra visszavezetve
  - céláramkörökkel
- egyéb függvények (pl szinusz)
  - Taylor-sorba fejtve közelítjük
  - céláramkörökkel

# Differenciálegyenletek megoldása analóg számítógéppel

- új változók bevezetése ⇒ hogy beleférjen a feszültségtartományba
- alakítsuk integrálegyenletté ⇐ könnyebben megoldható az analóg tartományban
- gyakorlati korlátok:
  - frekvenciatartomány (műveleti erősítők)
  - pontosság
  - stabilitás
  - feszültségtartomány (telítés, zaj)

# Példák

$$\frac{dy}{dx} = -ky$$

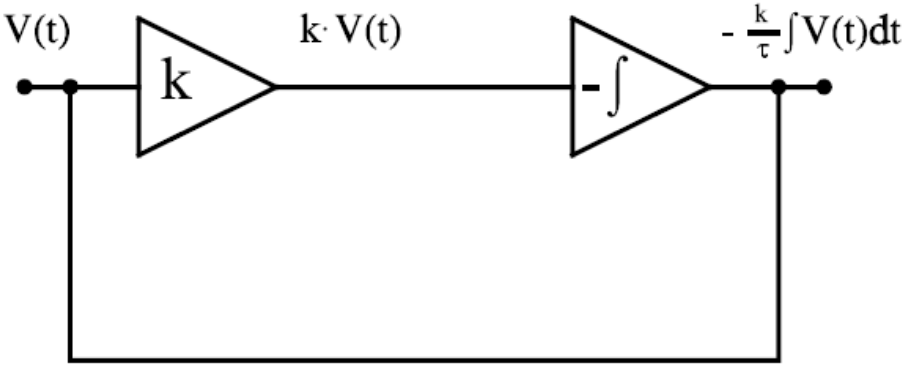
$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

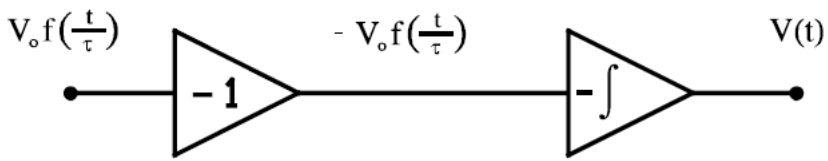
$$y(x) = y(0) - k\int_0^x y(x')\,dx'$$

$$y(x) = y(0) + \int_0^x f(x')\,dx'$$

$$V(t) = V(0) - \frac{k}{\tau}\int_0^t V(t')\,dt'$$

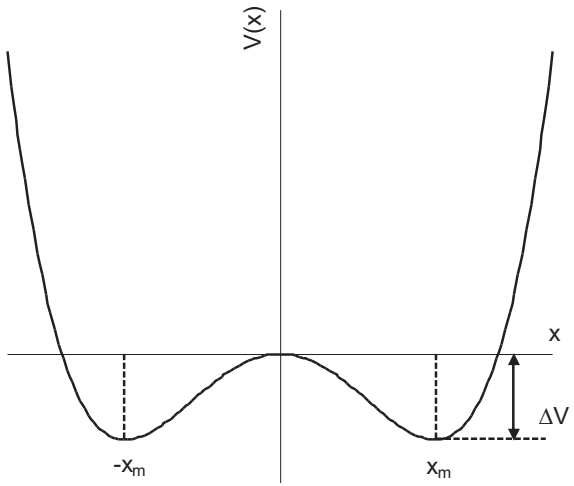
$$V(t) = V(0) + \frac{1}{\tau}\int_0^t V_o f\left(\frac{t'}{\tau}\right)dt'$$



# A kettős potenciálvölgy

$$V(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4$$



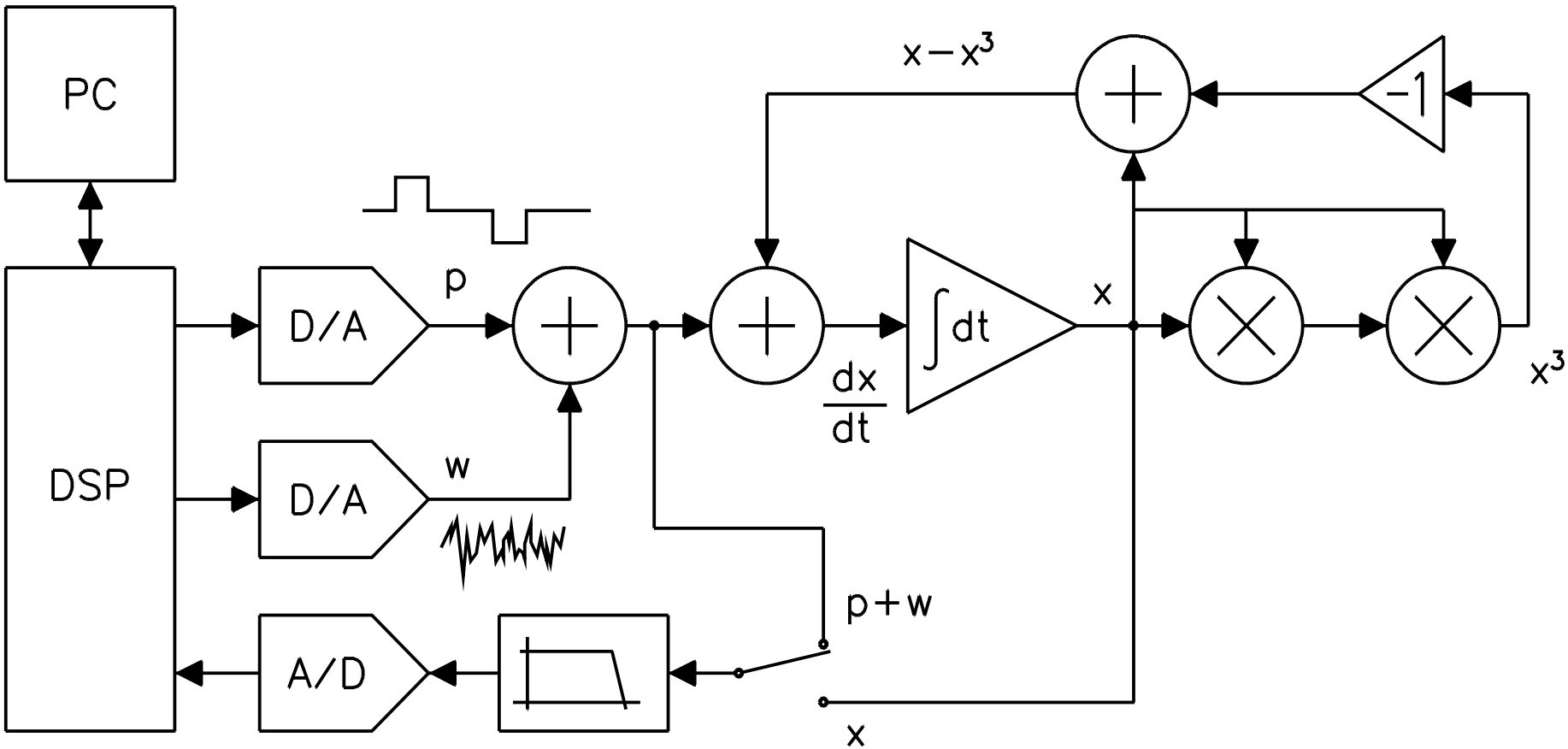

$$\dot{x}(t) = x(t) - x^3(t) + p(t) + w(t)$$

$p(t)$ : periodikus jel; $w(t)$ : fehérzaj

$$\Downarrow$$

$$x(t) = \int_0^t \left[x(\vartheta) - x^3(\vartheta) + p(\vartheta) + w(\vartheta)\right] \mathrm{d}\vartheta$$

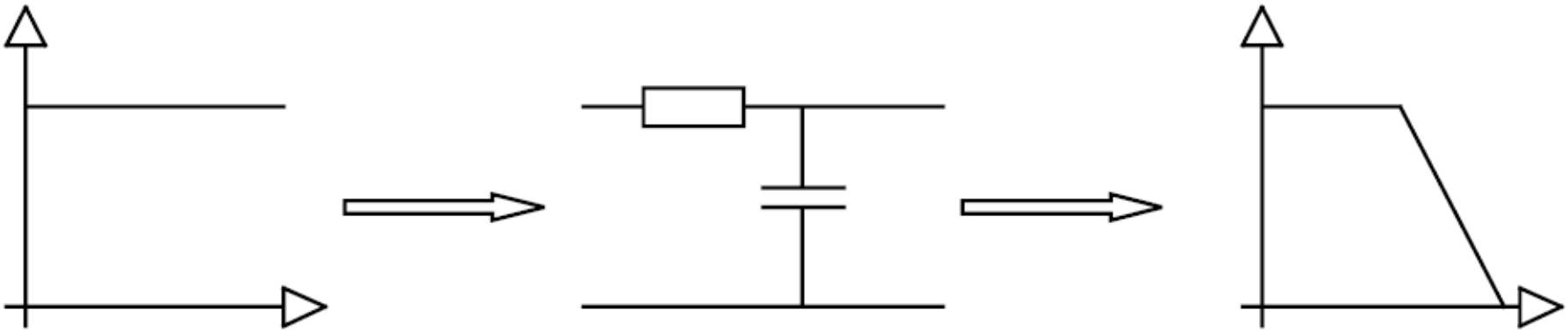
# A kettős potenciálvölgy analóg modellezése



# Fehérzaj

- hűtött vagy fűtött ellenállás termikus zaja
- Z-dióda feszültség alatt
- feszültség alatt lévő tranzisztor emitter-bázis csatornája
- nem az elméleti fehérzaj: mindig van fölső határfrekvencia

# Lorentzi zaj



- fehérzaj szűrésével
- törésponti frekvencia:

$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

- korrelációs idő:

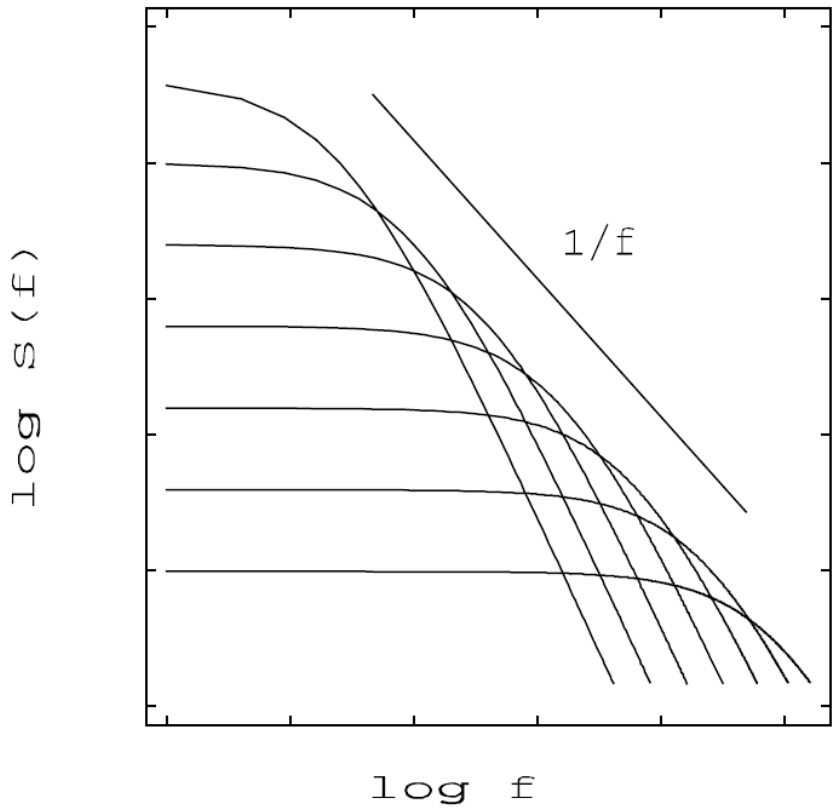
$$\tau = RC$$

# $1/f^2$-zaj (Brown-mozgás)

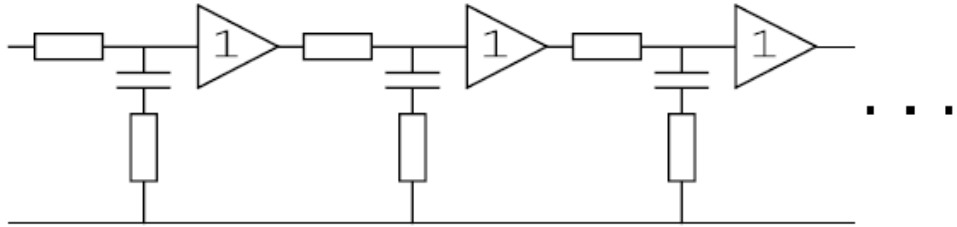
- fehérzaj integrálásával
- a divergencia elkerülésére szűrés alacsony frekvencián

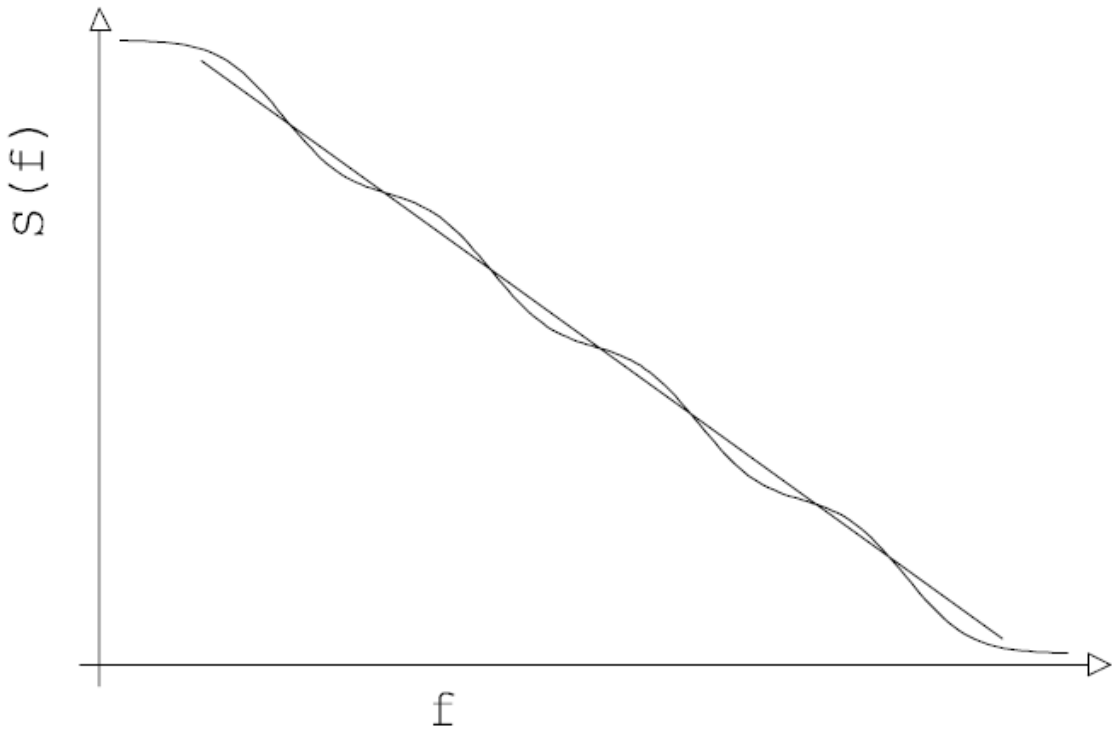
# $1/f$-zaj

- egyes tranzisztorok ilyen spektrumú zajt adnak ⇒ erősítés
- lorentzi zajok súlyozott összege
- speciális szűrőelrendezések
- korlátozott frekvenciatartományban
- alsó és fölső határfrekvencia



# $1/f$-zaj szűréssel



# Numerikus modellezés

## Előnyök

- digitális földolgozhatóság
- tetszőleges pontosság (a sebesség rovására)
- csak a szoftvert kell megvalósítani
- kiterjedt, kipróbált függvénykönyvtárak
- analóg modellezéssel ötvözhető

## Hátrányok

- mesterséges rendszerek
- érzékeny a lépésközre, divergens lehet

# Véletlenszámok generálása

- valójában determinisztikus (pszeudovéletlen)
- reprodukálható (a magszám – *seed* – lerögzítésével)
- csak elméletileg megalapozott, tesztelt eljárásban szabad megbízni
- ne használjunk beépített generátort
- magasabb helyiértékű bitek véletlenszerűbbek
- lebegőpontos aritmetika nem ajánlott

# Egyenletes véletlenszám generálása

## Lineáris kongruencia

- $x_{n+1} = (ax_n + c) \mod m$
- a maximális ciklushossz ($m$) csak akkor elérhető, ha
  - $a$ és $m$ relatív prímek
  - $a-1$ osztható $m$ minden prímosztójával
  - $a-1$ egész számú többszöröse a 4-nek, ha $m$ egész számú többszöröse a 4-nek
- jó értékek:
  - $a = 1664525$, $m = 2^{32}$
  - $a = 69069$, $m = 2^{32}$
  - $a = 1812433253$, $m = 2^{32}$
- rossz: $a = 65539$, $m = 2^{31}$

## Additív módszer

$$x_n = (x_{n-24} + x_{n-55}) \mod m$$

# Normális eloszlású véletlenszám generálása

- a centrális határeloszlás tétele alapján sok egyenletes eloszlásút összegezve
- egyéb módszerek, pl Box–Müller-módszer
  - legyen $u$ és $v$ egymástól független, egyenletes eloszlású változó a $]0,1]$ intervallumon
  - belőlük előállítható $x$ és $y$:

$$x = \sqrt{-2\ln u}\cos(2\pi v)$$

$$y = \sqrt{-2\ln u}\sin(2\pi v)$$

  - $x$ és $y$ normális eloszlású

# Zajok numerikus előállítása

## Fehérzaj

a véletlenszám-generátorok fehérzajt adnak

## Lorentzi zaj

- $x_{n+1} = cx_n + w_n$
- $0 < c < 1$
- $w_n$ egyenletes véletlenszám

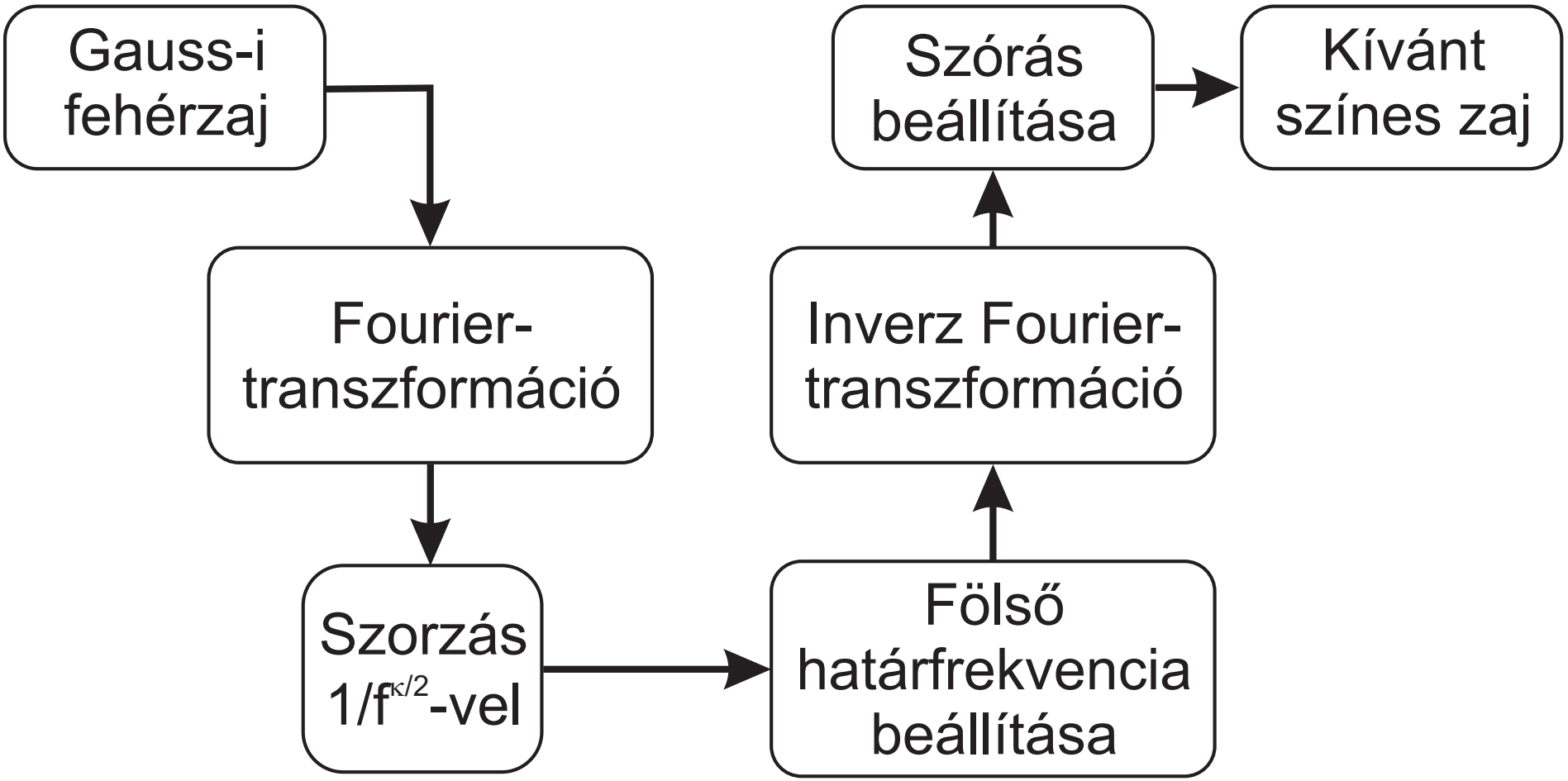
## $1/f^2$-zaj

- $x_{n+1} = x_n + w_n$
- $w_n$ egyenletes véletlenszám

## $1/f$-zaj

- lorentzi zajok súlyozott összege
- digitális szűrés
- spektrális transzformáció

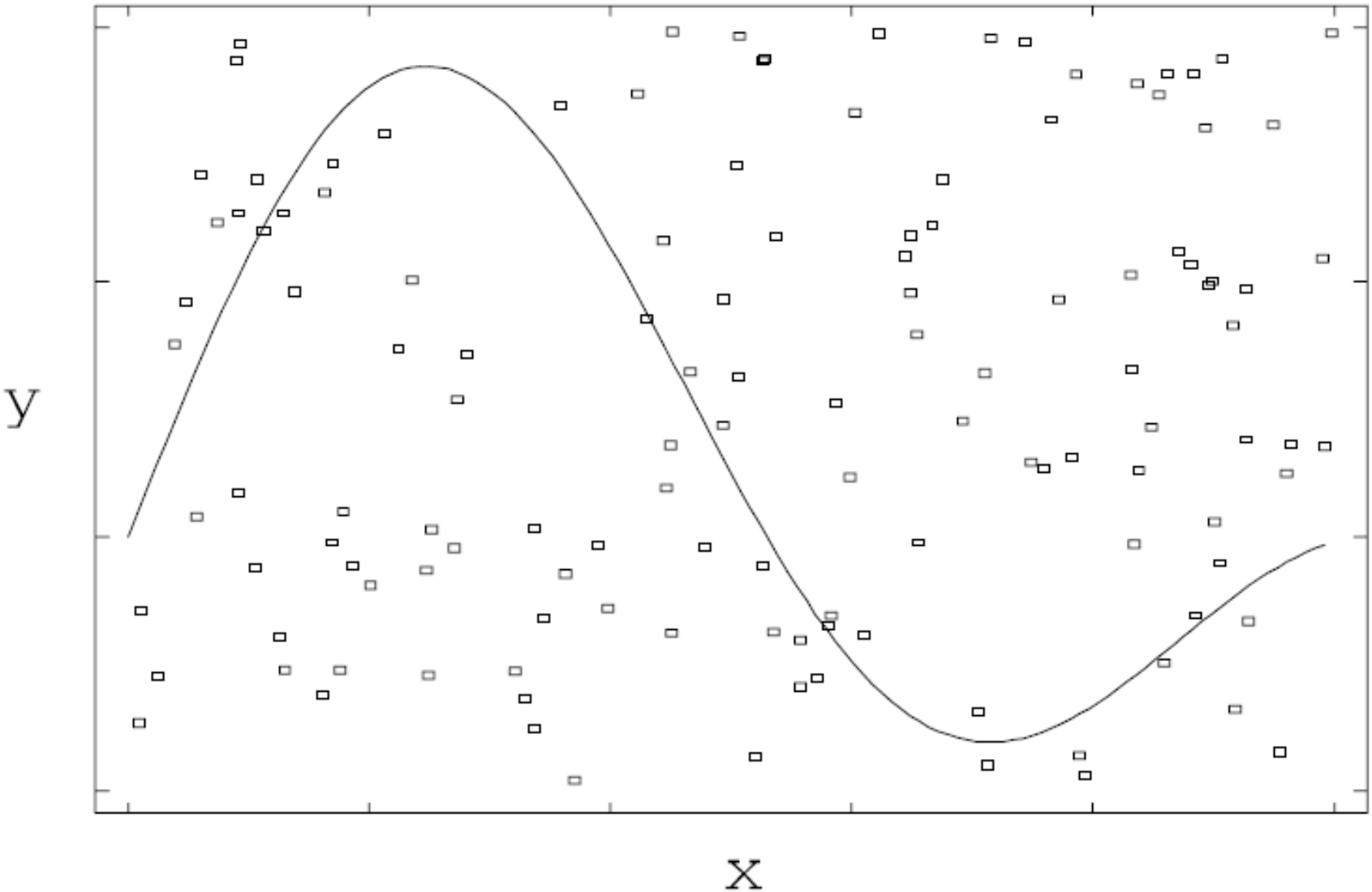
# Színes zajok spektrális szűréssel



# Monte Carlo-módszerek

- ***Monte Carlo-módszerek:*** problémamegoldás véletlenszerű minták segítségével
- az elnevezés eredete: a Los Alamos-i atombomba-projekt során született
- példa: a $\pi$ értékének kiszámítása
  - veszünk egy négyzetet
  - beleírunk egy kört
  - a területarány $\pi/4$
  - pontokat generálunk a négyzeten belül, és megszámoljuk, az összes pont közül mennyi esett a kör területén belülre
  - az ilyen pontok számának a teljes pontszámra vonatkoztatott aránya megegyezik a területaránnyal, azaz $\pi/4$

# Integrálás Monte Carlo-módszerrel



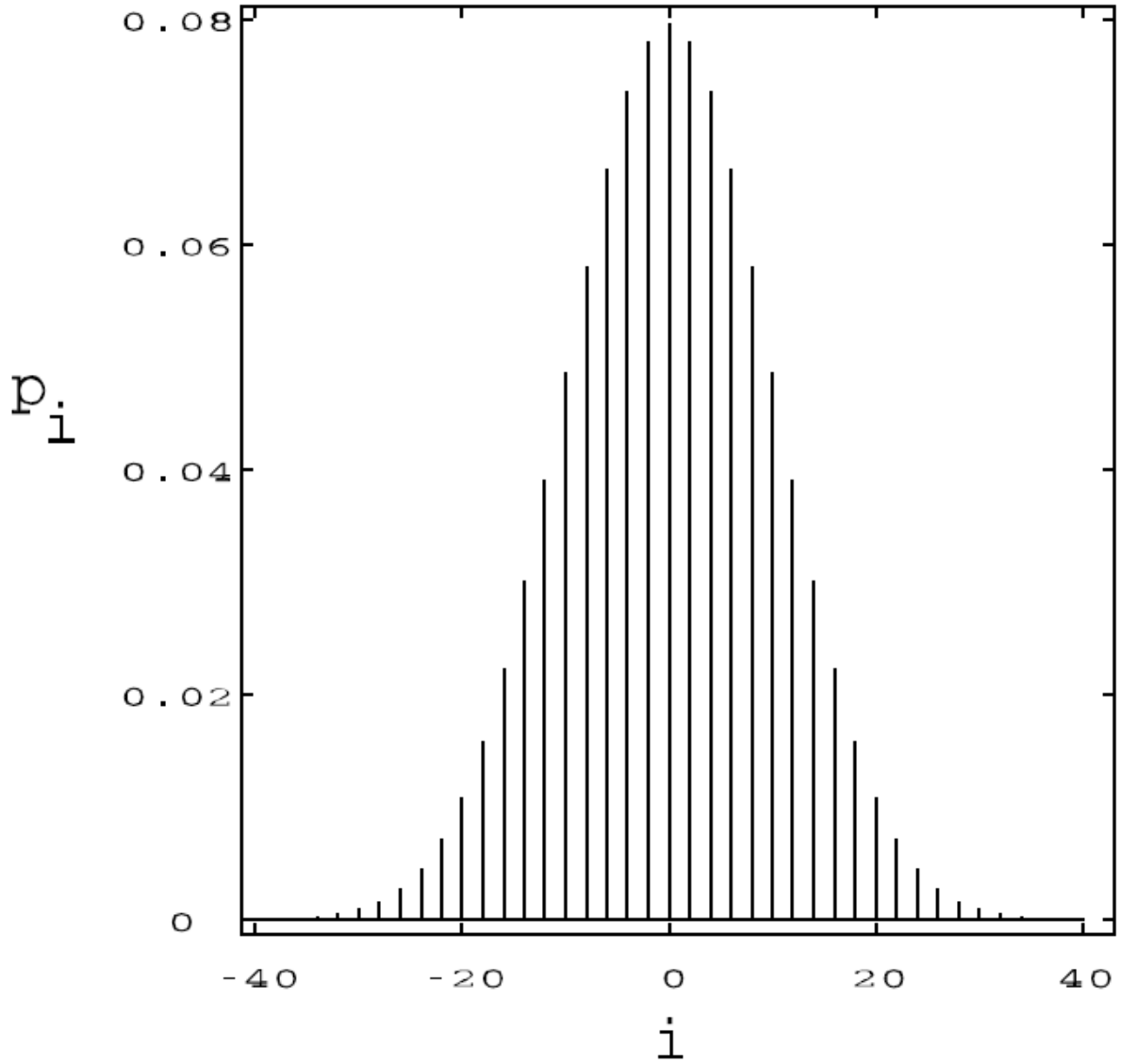
# Brown-mozgás modellezése

$$\boxed{x_{i+1} = x_i + w_i}$$

- $w_i$ lehet egy véletlenszám, vagy $\pm\Delta x$ 50-50% valószínűséggel
- ez $w_i$ numerikus integrálásának is tekinthető
- $N$ számú diszkrét diszkrét lépés esetén ($w_i = \pm\Delta x$) annak a valószínűsége, hogy a pozíció $x = i\Delta x$:

$$\boxed{P_N(x = i\Delta x) =: p_{N,i} = \frac{1}{2^N} \begin{pmatrix} N \\ \frac{N-i}{2} \end{pmatrix}}$$

# A pozíció eloszlása $N = 100$ lépésre



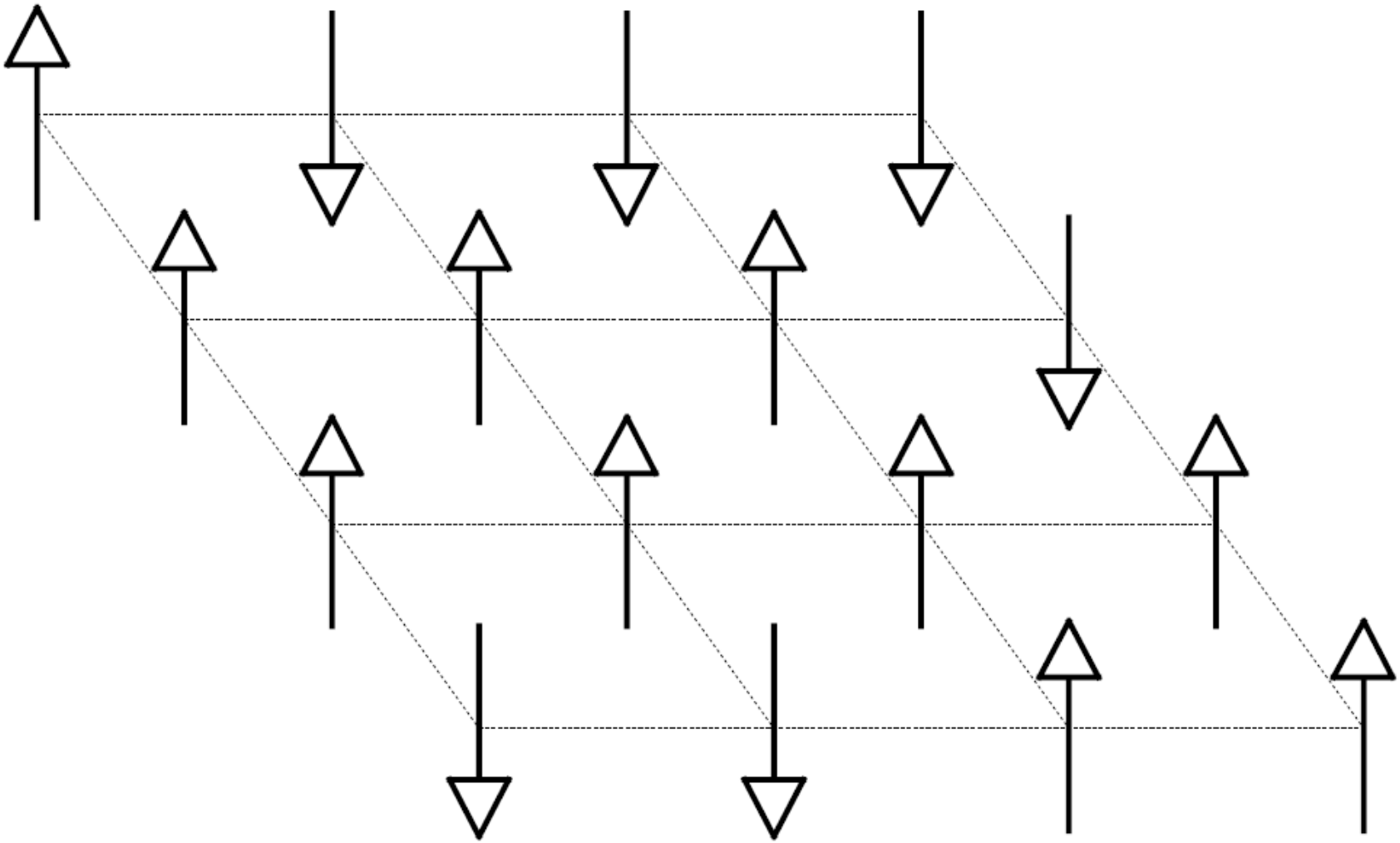
# Kétdimenziós Ising-modell

- spinjeikkel reprezentált elemi mágnesek hálója ($N$ darab)
- csak szomszédos mágnesek kölcsönhatását tekintjük
- a spinek megváltoztatásához szükséges energiát a hőmozgás fedezi
- adott spinelrendeződéshez tartozó Hamilton-függvény $\Rightarrow$ energia

$$H = -J \sum_{\langle i,j \rangle}^{N} S_i S_j$$

ahol $S_i$ az $i$-edik spint jelöli ($S_i = \pm 1$), $\langle i,j \rangle$ pedig azt, hogy $i$ és $j$ legközelebbi szomszédokhoz tartozó indexek, és $J$ egy csatolási paraméter

# Kétdimenziós Ising-modell



# Az algoritmus

1. a kezdeti $\{S_i\}_{i=0}^{N}$ adatsor legeneráljuk
2. kiválasztunk egy $S_i$ spint és kiszámítjuk a lokális energiáját:

$$E_i = -J \sum_{\langle i,j \rangle}^{N} S_i S_j$$

3. megnézzük, hogy változik az energia, ha a spint átfordítjuk ($S_i' = -S_i$)

$$E_i' = -J \sum_{\langle i,j \rangle}^{N} S_i' S_j$$

4. kiszámítjuk az átfordításhoz szükséges energiát: $\Delta E_i = E_i' - E_i$
5. az átmeneti valószínűség a Maxwell–Boltzmann-eloszlásból jön ki:

$$W_i = W\left(S_i \rightarrow -S_i\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\Delta E_i}{kt}}$$

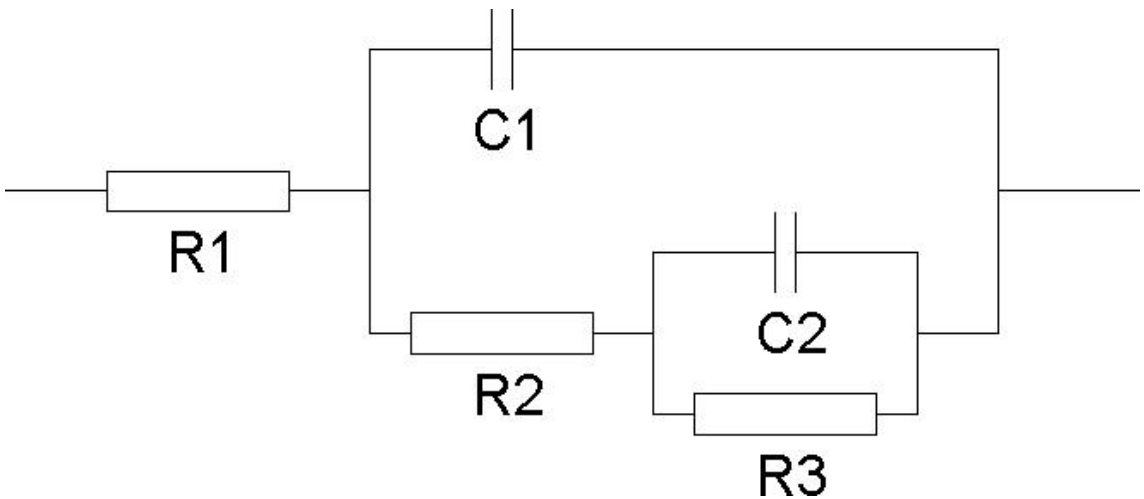
# Az algoritmus

6. legenerálunk egy 0 és 1 közti $x$ véletlenszámot
7. ha $x > W_i$, megtörténik az átfordulás, különben nem
8. megismételjük az eljárást a többi spinre

- a végeredményből kapott spineloszlásból megkaphatók a mágneses paraméterek értékei a hőmérséklet függvényében
- mágnesezettség: a spinek átlagértéke
- szuszceptibilitás: a spinek szórása

# A félvezető minta

- fölvesszük a minta impedanciáját a gerjesztő szinuszjel frekvenciájának függvényében
- a polimerre van egy modellünk, a modell paramétereit akarjuk meghatározni egyetlen komplex adatsor alapján
- véletlenszerűen választott paraméterekkel meghatározzuk az impedanciát, kiszámoljuk a valóstól való eltérést, és azt a paraméterhalmazt tartjuk meg mindig, amelyre az eltérés a legkisebb



# Módszerek

## Az egyenlet

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = f(y,t)} \quad \Rightarrow \quad \Delta y \approx \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\Delta t = f(y,t)\Delta t \quad \Rightarrow \quad y(t+\Delta t) \approx y(t) + f(y,t)\Delta t$$

## Euler-módszer

- $y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n, y_n\right)$
- a $h$ a lépésköz

## Runge–Kutta-módszer

- $y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$
- $t_{n+1} = t_n + h$
- $k_1 := f\left(t_n, y_n\right)$
- $k_2 := f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1\right)$
- $k_3 := f\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2\right)$
- $k_4 := f\left(t_n + h, y_n + hk_3\right)$