Parciális automaták irányítása

Iván Szabolcs

Nevezzük az $M = (Q, A, \cdot)$ (teljesen definiált, determinisztikus) automatához az $u \in A^*$ szót *irányító* szónak, ha minden $p, q \in Q$-ra $pu = qu$, vagyis, ha az u szó M-ben konstans függvényt indukál. Az M automata *irányítható*, ha van irányító szava, ebben az esetben legyen $d(M)$ a *legrövidebb*, M-et irányító szó hossza.

Vezessük be továbbá a $d : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$ függvényt a következőképp:

$$d(n) \quad = \quad \max\{d(M) : M \text{ egy } n\text{-állapotú irányítható automata}\}.$$

Jan Černý 1964-es konstrukciója [1] szerint $d(n) \geq (n-1)^2$ minden $n \geq 1$-re. A *Černý-sejtés* szerint $d(n) = (n-1)^2$, vagyis azt állítja, hogy tetszőleges n-állapotú irányítható automatának van olyan irányító szava, mely legfeljebb $(n-1)^2$ hosszú. A probléma jelenleg is nyitott, az eltelt 45 évben az automataelmélet egyik legintenzívebben kutatott kérdésévé lépett elő. Számos automata-osztályra (mint pl. az aperiodikus automatákéra) sikerült igazolni a sejtést, az általános esetben azonban a legjobb felső korlát [9] szerint $d(n) \leq \frac{n^3-n}{6}$.

A kép megváltozik, ha *parciális* automatákra vezetjük be az irányíthatóság fogalmát: legyen az $M = (Q, A, \cdot)$ parciális (tehát determinisztikus, de nem feltétlenül teljesen definiált) automatának $u \in A^*$ irányító szava, ha az egy teljesen definiált, konstans függvényt indukál M-ben (vagyis ha pu minden $p \in Q$ esetén értelmezett és minden p, q-ra $pu = qu$). Ezt a kiterjesztést (egyebek közt) megtalálhatjuk a [4] cikkben. Kiderül, hogy a legrövidebb irányító szó hossza ebben az esetben már nem korlátozható polinomfüggvénnyel akkor sem, ha az ábécé bináris [8].

A kétrészes előadás első felében beszélek Černý eredeti problémafelvetéséről, az általános esetben ismert legjobb alsó [1] és felső [9] korlátokról, valamint a parciális automaták esetében a legjobb ismert alsó [7] és felső [3] korlátokról, előbbiről az általános eset mellett a bináris és a ternáris ábécé esetében is (ahol a legjobb konstrukció [8] szuperpolinomiális, de szubexponenciális alsó korlátot ad).

References

[1] J. Černý. A remark on homogenous experiments with finite automata. Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied 14, 1964, p. 208–215. (in Slovak)

[2] P. Frankl. An extremal problem for two families of sets. European J. Combin. 3, 1982(2), p. 125-127.

[3] Zs. Gazdag, Sz. Iván, J. Nagy-György. Improved upper bounds on synchronizing nondeterministic automata. Information Processing Letters 109(17), 2009, p. 986–990.

[4] B. Imreh and M. Steinby. Directable nondeterministic automata. Acta Cybernetica 14, 1999, p. 105-115.

[5] M. Ito. Algebraic theory of automata and languages. World Scientific, Singapore, 2006.

[6] M. Ito and K. Shikishima-Tsuji. Some results on directable automata. Theory is Forever, LNCS 3113, Springer, Berlin, 2004, p. 125–133.

[7] P. V. Martyugin. Lower bounds for length of carefully synchronizing words. Presented at Satellite Workshop on Words and Automata of the International Computer Science Symposium in Russia (CSR'06), St. Petersburg, 2006.

[8] P. V. Martyugin. Lower bounds for the length of the shortest carefully synchronizing words for two- and three-letter partial automata. Diskretn. Anal. Issled. Oper. 15(4), 2008, p. 44-56.

[9] J.-E. Pin. On two combinatorial problems arising from automata theory. Annals of Discrete Mathematics 17, 1983, p. 535–548.