Alap fatranszformátorok II

Vágvölgyi Sándor

Fülöp Zoltán és Vágvölgyi Sándor [2, 3] közös eredményeit ismertetjük.

Fogalmak, jelölések

A Σ feletti alaptermek $\mathbf{TA} = (T_\Sigma, \Sigma)$ Σ algebráját tekintjük. Minden $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$ és $t_1, \ldots, t_m \in T_\Sigma$ esetén, $f^{\mathbf{TA}}(t_1, \ldots, t_m) = f(t_1, \ldots, t_m)$.

Alap termátíró rendszer. Legyen Σ egy rangolt ábécé. Egy $R \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ véges halmazt Σ feletti alap termátíró rendszernek nevezünk. R elemeit szabályoknak nevezzük és $u \to v$ alakban írjuk. A $\to_R \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ átírási reláció definíciója: tetszőleges $s, t \in T_\Sigma$ esetén, $s \to_R t$ akkor és csak akkor ha létezik egy $u \to v$ szabály R-ben és $c \in \bar{T}_{\Sigma,1}$ környezet úgy hogy $s = c[u]$ and $t = c[v]$.
$\leftrightarrow_R^*$ kongruencia reláció a $\mathbf{TA}$ alapterm algebrán. Azt mondjuk hogy $\leftrightarrow_R^*$ az R által *generált* kongruencia a $\mathbf{TA}$ alapterm algebrán.

Az R alap termátíró rendszer *redukált* ha minden $u \to v$ szabályára, u irreducibilis $R - \{ u \to v \}$-re nézve és v irreducibilis R-re nézve.

Állítás 1 [4] Ha az R alap termátíró rendszer redukált, akkor R konvergens.

Fél faautomata és faautomata. Legyen Σ egy rangolt ábécé. A Σ feletti fél faautomata egy A alap termátíró rendszer a $\Sigma \cup AH$ rangolt ábécé felett. Itt AH - az A állapothalmaza - nulla rangú szimbólumokból áll és $AH \cap \Sigma = \emptyset$. A szabályai az alábbi két típusúak:

$$f(a_1, \ldots, a_n) \to a$$

ahol $f \in \Sigma_n$, $n \geq 0$, $a, a_1, \ldots, a_n \in AH$ és

$$a_1 \to a_2,$$

ahol $a_1, a_2 \in AH$. A második típusú szabályokat λ szabályoknak nevezzük. A λ szabályokat ki tudjuk küszöbölni.

Az $a \in AH$ állapot *elérhető*, ha létezik olyan $t \in T_\Sigma$ alapfa amelyre $t \to_A^* a$.

A fél faautomata *összefüggő*, ha minden $a \in AH$ állapot elérhető.

A fél faautomata *determinisztikus*, ha minden $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$, $a_1, \ldots, a_m \in AH$ esetén, legfeljebb egy $f(a_1, \ldots, a_m)$ bal oldalú szabály van A-ban, és nincsen λ-szabály A-ban.

A fél faautomata *teljes*, ha minden $f \in \Sigma_m$, $m \geq 0$, $a_1, \ldots, a_m \in AH$ esetén, legalább egy $f(a_1, \ldots, a_m)$ bal oldalú szabály van A-ban.

Lemma 2 Legyen A egy fél faautomata Σ felett. A determinisztikus fél faautomata akkor és csak akkor ha A egy redukált alap termátíró rendszer $\Sigma \cup AH$ felett.

Alap fatranszformátor. A Σ feletti A, B fél faautomatákból álló (A, B) párt alap fatranszformátornak nevezzük (AFT, röviden). Az (A, B) által indukált $\tau(A, B) \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ fatranszformáció definíciója: Minden $p, q \in T_\Sigma$ esetén, $(p, q) \in \tau(A, B)$ akkor és csak akkor ha létezik $u \in \bar{T}_{\Sigma,n}$, $n \geq 0$, környezet és $z_1, \ldots, z_n, z'_1, \ldots, z'_n \in T_\Sigma$ fák és $a_1, \ldots, a_n$ közös állapotai A-nak és B-nek úgy hogy
$p = u[z_1, \ldots, z_n] \longrightarrow^*_A u[a_1, \ldots, a_n]$ és
$q = u[z'_1, \ldots, z'_n] \longrightarrow^*_B u[a_1, \ldots, a_n]$,
ahol $z_i \longrightarrow^*_A a_i$ és $z'_i \longrightarrow^*_B a_i$, $1 \leq i \leq n$.

Példa. $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{\,\$\,\}$, $\Sigma_2 = \{\,f\,\}$. Páros fa: páros sokszor fordul elő benne a \$ szimbólum. Páratlan fa: páratlan sokszor fordul elő benne a \$ szimbólum.
Az A fél faautomata állapotai: $AH = \{\,0, 1\,\}$, A szabályai:

$\$ \to 1, \quad f(0,0) \to 0, \quad f(0,1) \to 1, \quad f(1,0) \to 1,$
$f(1,1) \to 0.$
A $(\Sigma, AH, A, \{\, 0\,\})$ faautomata a páros fák halmazát ismeri fel. A $(\Sigma, AH, A, \{\, 1\,\})$ faautomata a páratlan fák halmazát ismeri fel.
A B fél faautomata állapotai: $AH_B = \{\, 0', 1\,\}$, B szabályai:
$\$ \to 1, \quad f(0',0') \to 0', \quad f(0',1) \to 1, \quad f(1,0') \to 1,$
$f(1,1) \to 0'.$
A $(\Sigma, AH_B, B, \{\, 0'\,\})$ faautomata a páros fák halmazát ismeri fel. A $(\Sigma, AH_B, B, \{\, 1\,\})$ faautomata a páratlan fák halmazát ismeri fel.

$(f(\$, f(\$, f(\$, \$))), f(\$, \$)) \in \tau(A, B)$, mert
$f(\$, f(\$, f(\$, \$))) \to_A f(\$ f(\$, f(1, \$)))$
$\to_A f(\$, f(\$, f(1, 1))) \to_A f(\$, f(\$, 0)) \to_A$
$f(\$, f(1, 0)) \to_A f(\$, 1)$ és
$f(\$, \$) \to_B f(\$, 1).$
Ugyanakkor $(f(\$, \$), f(f(\$, \$), f(\$, \$)) \notin \tau(A, B)$, mert
$f(\$, \$) \to_A f(1, \$) \to_A f(1, 1) \to_A 0$
$f(f(\$, \$), f(\$, \$)) \to_B^* f(0', 0') \to_A 0',$
és a fenti két átírási sorozatban nem fordul elő ugyanaz a fa.
$\tau(A, B)$ azokból a (p, q) párokból áll amelyekre létezik

$u \in \bar{T}_{\Sigma,n}$, $n \geq 0$, környezet és $z_1, \ldots, z_n, z'_1, \ldots, z'_n \in T_\Sigma$ páratlan fák úgy hogy

$$p = u[z_1, \ldots, z_n] \text{ és } q = u[z'_1, \ldots, z'_n].$$

$\square$

Dauchet és munkatársai és Engelfriet megmutatták hogy

Tétel 3 *Tetszőleges R alap termátíró rendszer esetén, meg tudunk konstruálni egy (A, B) Σ feletti alap fatranszformátort úgy hogy $\rightarrow^*_R = \tau(A, B)$.*

Az alábbi megszorításokat vezetjük be az alap fatranszformátorokra.

Azt mondjuk hogy az (A, B) alap fatranszformátor

(i) determinisztikus, ha A és B determinisztikusak,

(ii) teljes, ha A és B teljesek, és

(ii) szimmetrikus, ha $A = B$. $\square$

A fenti megszorítások tetszőleges kombinációját képezhetjük. Például, az AFT szimmetrikus, determinisztikus ha mind szimmetrikus mind determinisztikus. Így összesen nyolc transzformáció osztályunk van.

AFT jelöli az alapfatranszformátorok által indukált transzformációk osztályát. Az AFT jelölés D-, S- és T- prefixei jelölik a determinisztikus, a szimmetrikus és a teljes alapfatranszformátorok által indukált transzformációk osztályát. Ezen prefixek tetszőleges kombinációját képezhetjük. Például, SD-AFT jelöli a szimmetrikus, determinisztikus alapfatranszformátorok által indukált transzformációk osztályát.

A fenti nyolc transzformáció osztály tartalmazási ábráját mutatjuk be. A tartalmazási ábrán bemutatott tartalmazások igazolásához tekintsük a következő táblázatot. A táblázat megmutatja hogy az egyes transzformáció osztályokra a reflexív, szimmetrikus és tranzitív tulajdonságok közül melyek teljesülnek. Ha az

Y-$AFT, Y \in \{\ \ , T, D, TD, S, TS, SD, TSD\}$

osztály minden eleme rendelkezik a

$\mathcal{P} \in \{$reflexív, szimmetrikus, tranzitív$\}$

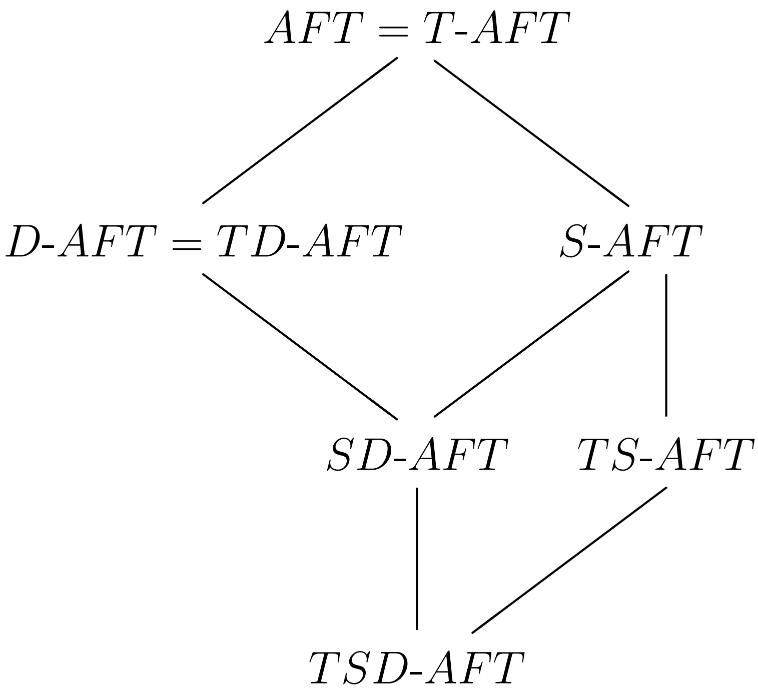
tulajdonsággal, akkor a Y-AFT and $\mathcal{P}$ által meghatározott bejegyzés a $+$ jel, különben a $-$ jel.

	reflexív	szimmet.	tranzitív
AFT, T-AFT	$+$	$-$	$-$
D-AFT, TD-AFT	$+$	$-$	$-$
S-AFT, TS-AFT	$+$	$+$	$-$
SD-AFT, TSD-AFT	$+$	$+$	$+$

Tétel 4 Az 1. ábrán láthatjuk az AFT, T-AFT, D-AFT, TD-AFT, S-AFT, TS-AFT, SD-AFT and TSD-AFT fatranszformátor osztályok tartalmazási diagramját.

Bizonyítás. Az $AFT = T$-AFT és D-$AFT = TD$-AFT egyenlőségeket az alábbi standard konstrukcióval igazoljuk. Legyen (A, B) egy tetszőleges AFT. Megkonstruáljuk az (A', B') teljes AFT-t. Az a új állapotot adjuk hozzá az AH állapothalmazhoz. A b új állapotot adjuk hozzá a AH_B állapothalmazhoz, itt $a \neq b$. Új szabályokat adunk A-hoz: minden új szabály jobb oldalán a áll. Az összes lehetséges bal oldalt tekintjük amire nincsen szabály A-ban. B-t hasonlóan tesszük teljessé. A konstrukció megőrzi A és B determinisztikus tulajdonságát.
Az ábrán látható valódi tartalmazásokat igazoljuk. Tetszőleges X, Y osztályok esetén, ha az X osztály az Y osztály felett van és él köti őket össze, akkor az $X \subseteq Y$ tartalmazás definíció szerint fennáll. Most belátjuk az $X \subset Y$ tartalmazást. Továbbá belátjuk hogy az éllel nem összekötött osztályok nem tartalmazzák egymást. Ehhez elegendő igazolni hogy

(a) SD-AFT és TS-AFT nem tartalmazzák egymást, és



1. ábra Az AFT, $D\text{-}AFT$, $S\text{-}AFT$, $SD\text{-}AFT$ és $TSD\text{-}AFT$ osztályok tartalmazási diagramja

(b) D-AFT and S-AFT nem tartalmazzák egymást.

Először igazoljuk (a)-t, azaz hogy TS-$AFT - SD$-$AFT \neq \emptyset$ és SD-$AFT - TS$-$AFT \neq \emptyset$. Az első egyenlőtlenség azért teljesül mert az SD-AFT minden eleme tranzitív és TS-AFT nem minden eleme tranzitív, lásd a táblázat.

A második egyenlőtlenség igazolásához megkonstruálunk egy A determinisztikus faautomatát úgy hogy a $\tau(A, A)$ szimmetrikus, determinisztikus transzformáció nincs benne TS-AFT-ben. Legyen $A = \emptyset$, azaz A-nak nincsenek szabályai, és így

$$\tau(A, A) = \{(t, t) \mid t \in T_\Sigma\}.$$

Indirekt bizonyítás végett feltesszük hogy $\tau(A, A) \in TS$-AFT, azaz hogy létezik egy teljes B faautomata úgy hogy $\tau(A, A) = \tau(B, B)$. Léteznek $p, q \in T_\Sigma$ egymástól különböző alapfák és $b \in AH$ úgy hogy $p \rightarrow_B^* b$ és $q \rightarrow_B^* b$. Ezért $(p, q) \in \tau(B, B)$. Mivel $p \neq q$, kapjuk hogy $(p, q) \notin \tau(A, A)$. Ellentmondás.

Most igazoljuk (b)-t. Evégett igazoljuk hogy D-$AFT - S$-$AFT \neq \emptyset$ és S-$AFT - D$-$AFT \neq \emptyset$. Az első egyenlőtlenség nyilván fennáll.

Most belátjuk a második egyenlőtlenséget. Megadunk egy (A, A) szimmetrikus AFT-t úgy hogy $\tau(A, A) \notin D$-AFT. Legyen $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$, $\Sigma_0 = \{\#, \$\}$ és

$\Sigma_1 = \{f\}$, és legyen $AH = \{a, b\}$. Az A fél faautomata szabályai: $\# \to a$, $f(a) \to b$, and $\$ \to a \mid b$. Megjegyezzük hogy A nemdeterminisztikus. Most $(\#, \$), (f(\#), \$) \in \tau(A, A)$. Indirekt bizonyítás végett tegyük fel hogy $\tau(A, A) \in D\text{-}AFT$, azaz $\tau(A, A) = \tau(B, C)$ valamely B és C determinisztikus faautomatákra. Mivel $(\#, \$) \in \tau(B, C)$, létezik B és C közös c állapota amelyre $\# \to c \in B$ és $\$ \to c \in C$. Mivel $(f(\#), \$) \in \tau(B, C)$ az $f(c) \to c$ szabály is B-ben van. Minden $n \geq 1$ esetén, $(f^n(\#), \$) \in \tau(B, C)$, ami ellentmondás, hiszen $(f^2(\#), \$) \notin \tau(A, A)$.

$\square$

Tétel 5 *Tetszőleges* $\tau \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ *bináris relációra ekvivalens az alábbi négy állítás.*

(a) $\tau \in SD\text{-}AFT$.

(b) τ *megegyezik egy redukált alap termátíró rendszer által a* **TA** *alapterm algebra felett generált kongruenciával.*

(c) τ *megegyezik egy konvergens alap termátíró rendszer által a* **TA** *alapterm algebra felett generált kongruenciával.*

(d) τ *egy végesen generált kongruencia a* **TA** *alapterm algebra felett.*

Bizonyítás. **Első lépés:** (a)-ból következik (b). Legyen A egy determinisztikus fél faautomata. Megkonstruálunk egy redukált alap termátíró rendszert amelyre $\tau(A, A) = \leftrightarrow_R^*$.

Feltesszük hogy A összefüggő. Az alábbi algoritmus minden $a \in AH$ állapotra megkonstruál egy $tree(a) \in T_\Sigma$ alapfát úgy hogy $tree(a) \rightarrow_A^* a$.

Algoritmus 6

Input: A összefüggő determinisztikus fél faautomata Σ felett.

Output: Minden $a \in AH$ állapotra, egy $tree(a) \in T_\Sigma$ alapfa úgy hogy $tree(a) \rightarrow_A^* a$.

Segéd változók: Minden $a \in AH$ állapotra, egy $flag(a)$ zászló, ami igaz és hamis értéket vesz fel, és azt jelzi hogy $tree(a)$-t definált uk-e már.

minden $a \in AH$ állapotra, legyen $flag(a) = hamis$;

while létezik $a \in AH$ állapot úgy hogy $flag(a) = hamis$ **do**

minden $f(a_1, \ldots, a_m) \rightarrow a$ A-beli szabályra **do**

if $flag(a_1) = \ldots = flag(a_m) = igaz$ and $flag(a) = hamis$,

then begin

$tree(a) := f(tree(a_1), \ldots, tree(a_m));$

$flag(a) := igaz$

end

Mivel A összefüggő, a fenti algoritmus sikeresen véget ér úgy hogy minden $a \in AH$ állapotra, $flag(a) = igaz$.

Példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{\,\$, \#\,\}$, $\Sigma_1 = \{\, g \,\}$, $\Sigma_2 = \{\, f \,\}$. A összefüggő determinisztikus fél faautomata szabályai:

$\$ \to 1,\ \# \to 1,$

$f(1,1) \to 1, \quad f(1,2) \to 1,$

$f(2,1) \to 1, \quad f(2,2) \to 1,$

$g(1) \to 2, \quad g(2) \to 1,$

A fenti eljárás a $tree(1) = \$$ és $tree(2) = g(\$)$ alapfákat adja vissza.

$\square$

Most megadjuk az R alap termátíró rendszert. Legyen

$$
\begin{aligned}
R = \{ & f(tree(a_1), \ldots, tree(a_m)) \to tree(a) \mid \\
& f(a_1, \ldots, a_m) \to a \in A \text{ és} \\
& f(tree(a_1), \ldots, tree(a_m)) \neq tree(a) \}.
\end{aligned}
$$

Példa R alap termátíró rendszer szabályai:
$\# \to \$$,
$f(\$, \$) \to \$, \quad f(\$, g(\$)) \to \$$,
$f(g(\$), \$) \to \$, \quad f(g(\$), g(\$)) \to \$$,
$g(g(\$)) \to \$$.

$\square$

Az alábbi P1 – P7 állítások teljesülnek a $tree(a)$ fákra és az R alap termátíró rendszerre.

P1: Minden $a \in AH$ esetén, $tree(a) \to_A^* a$. Ezt a fenti algoritmus közvetlen vizsgálatával igazolhatjuk.

P2: Minden $u \to v \in R$ átírási szabályra, $u \leftrightarrow_A^* v$. Ez a P1 állításból következik és abból hogy R minden szabálya $f(tree(a_1), \ldots, tree(a_m)) \to tree(a)$, alakú ahol $f(a_1, \ldots, a_m) \to a \in A$.

P3: Minden $a, b \in AH$ állapotra, $a = b$ akkor és csak akkor ha $tree(a) = tree(b)$. Ha $a = b$ akkor $tree(a) = tree(b)$ mert minden a állapothoz az algoritmus egyetlen $tree(a)$ fát konstruál meg. Fordított irányban, tegyük fel hogy $a \neq b$ és $tree(a) = tree(b)$. Láttuk hogy $tree(a) \to_A^* a$ és $tree(b) \to_A^* b$. Ugyanabból a fából két különböző állapotot deriválunk. Ez ellentmond annak hogy A determinisztikus.

P4: Minden $a \in AH$ állapotra, a $tree(a)$ alapfa irreducibilis R-re nézve. Bizonyítás $tree(a)$ felépítése (struktúrája) szerint.

P5: R redukált.

P6: Minden $p \in T_\Sigma$ alapterm és $a \in AH$ állapot esetén, $p \rightarrow_A^* a$ akkor és csak akkor ha $p \rightarrow_R^* tree(a)$.

P7: $\tau(A, A) = \leftrightarrow_R^*$.

Második lépés: 1. állítás szerint (b)-ből következik (c).

Harmadik lépés: Definíció szerint (c)-ből következik (d).

Negyedik lépés: (d)-ből következik (a).

Legyen $E \subseteq T_\Sigma \times T_\Sigma$ egy Σ feletti alap termátíró rendszer. Most megadunk Σ felett egy összefüggő determinisztikus R fél faautomatát AH állapothalmazzal úgy hogy $\leftrightarrow_E^* = \leftrightarrow_R^* \cap T_\Sigma \times T_\Sigma$. Evégett legyen

$$T = \{\, t \in T_\Sigma \mid t \text{ részfája } u - \text{nak vagy } v\text{−nek} \\ \text{ahol } u \rightarrow v \text{ in } E \,\}$$

az E-ben előforduló termek résztermeinek a halmaza és legyen $\Theta = \leftrightarrow_E^* \cap T \times T$. Θ ekvivalencia reláció T felett. Minden $t \in T$ esetén, $[t]_\Theta = [t]_{\leftrightarrow_E^*} \cap T$.

Példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, $\Sigma_0 = \{\, \$, \# \,\}$, $\Sigma_1 = \{\, g \,\}$, $\Sigma_2 = \{\, f \,\}$. E az alábbi szabályokból áll:

$\$ \rightarrow \#$, $g(\$) \rightarrow g(\#)$, $f(\$, \$) \rightarrow \#$, $f(g(\$), \#) \rightarrow \#$, $f(\#, g(\$)) \rightarrow \#$, $f(g(\$), g(\$)) \rightarrow \#$.

$T = \{\,\$,\ \#,\ g(\$),\ g(\#),\ f(\$,\$),\ f(g(\$),\#),\ f(\#,g(\$)),$
$\quad f(g(\$),g(\$))\,\}.$

Θ-nak két osztálya van:

$\{\,\$,\ \#,\ f(\$,\$),\ f(g(\$),\#),\ f(\#,g(\$)),\ f(g(\$),g(\$))\,\}$

és

$\{\,g(\$),\ g(\#)\,\}.$

□

Legyen $AH = \{[t]_\Theta \mid t \in T\,\}$. Tekintsük a $\Sigma \cup AH$ rangolt ábécét, ahol AH elemei 0 rangú szimbólumok. Definiáljuk az R alap termátíró rendszert $\Sigma \cup AH$ felett. R az alábbi szabályokból áll:

$$f([t_1]_\Theta, \ldots, [t_m]_\Theta) \to [f(t_1, \ldots, t_m)]_\Theta\ ,$$

ahol $f(t_1, \ldots, t_m) \in T$.

Példa. $AH = \{\,[\$]_\Theta, [g(\$)]_\Theta\,\}$.

R elemei:

$\$ \to [\$]_\Theta,\ \ \# \to [\$]_\Theta,$

$g([\$]_\Theta) \to [g(\$)]_\Theta,$

$f([\$]_\Theta, [\$]_\Theta) \to [\$]_\Theta,\ \ f([g(\$)]_\Theta, [\$]_\Theta) \to [\$]_\Theta,$

$f([\$]_\Theta, [g(\$)]_\Theta) \to [\$]_\Theta,\ \ f([g(\$)]_\Theta, [g(\$)]_\Theta) \to [\$]_\Theta.$

□

Tétel 7 *Van olyan algoritmusunk amely R-et számolja ki $O(n \log n)$ időben.*

Bizonyítás. T elemeit egy irányított gráf csúcsaival adjuk meg. Az $f(t_1, \ldots, t_m)$-hez tartozó csúcsból irányított élek vezetnek a $t_1, \ldots, t_m$-hez tartozó csúcsokba. Ezt a gráfot E részterm gráfjának nevezzük. E részterm gráfját megtudjuk konstruálni $O(n)$ idő alatt. Θ-t E részterm gráfján számoljuk ki.

Állítás 8 Downey és társai [1] *Van egy olyan algoritmusunk amely az E részterm gráfján fut $O(n\, log\, n)$ időben és Θ-t számolja ki. Itt n az E mérete, azaz az E-ben előforduló szimbólumok száma.*

Bizonyítás. Legyen η az E reflexív lezártja.

1. Ha $f(p_1, \ldots, p_m) \in T$ és $f(s_1, \ldots, s_m) \in T$ és $(p_1, s_1) \in \eta, \ldots, (p_m, s_m) \in \eta$, akkor tegyük bele az $(f(p_1, \ldots, p_m), f(s_1, \ldots, s_m))$ párt η-ba.
2. Legyen ρ az η reflexív, tranzitív, szimmetrikus lezártja. Ha $\rho = \eta$ akkor visszaadjuk a $\theta = \eta$ relációt. Különben $\eta := \rho$ és menjünk az 1. pontra.

$\square$

Bejárjuk E részterm gráfját és minden $f(t_1, \ldots, t_m)$ termhez tartozó csúcsra az

$$f([t_1]_\Theta, \ldots, [t_m]_\Theta) \to [f(t_1, \ldots, t_m)]_\Theta \ ,$$

szabályt beletesszük R-be.

$\square$

Lemma 9 *R redukált alap termátíró rendszer $\Sigma \cup AH$ felett.*

Lemma 10 *Minden* $t \in T$ *termre,* $t \rightarrow_R^* [t]_\theta$.

Lemma 11 *Minden* $s \in T_\Sigma$ *és* $t \in T$ *termekre ha* $s \rightarrow_R^* [t]_\Theta$, *akkor* $s \leftrightarrow_E^* t$.

Lemma 12 $\leftrightarrow_E^* = \leftrightarrow_R^* \cap T_\Sigma \times T_\Sigma$.

R fél faautomata Σ felett az AH állapot halmazzal. 2. és 9. lemmák szerint R fél faautomata determinisztikus. 10. lemma szerint R fél faautomata összefüggő. 1. és 9. lemmák szerint R alap termátíró rendszer konvergens. Ezért minden $s \in T_\Sigma$ alaptermnek létezik egy egyértelműen meghatározott R-normáformája amit $s\downarrow$ jelöl. Nyilvánvalóan $s\downarrow$ tartalmazhatja Σ szimbólumait és AH állapotait is.

Lemma 13 *Tetszőleges* $s, t \in T_\Sigma$ *esetén,* $s \leftrightarrow_E^* t$ *akkor és csak akkor ha* $s\downarrow = t\downarrow$.

Példa. $AH = \{\, [\$]_\Theta, [g(\$)]_\Theta \,\}$.
Igaz-e hogy $g(g(f(g(\$), g(\$)))) \leftrightarrow_E^* g(g(\$))$?
$g(g(f(g(\$), g(\$)))) \rightarrow_A^* g(g(f(g([\$]_\Theta), g([\$]_\Theta)))) \rightarrow_A^*$
$g(g(f([g(\$)]_\Theta, [g(\$)]_\Theta))) \rightarrow_A g(g([\$]_\Theta)) \rightarrow_A g([g(\$)]_\Theta)$,
és $g(g(\$)) \rightarrow_A g(g([\$]_\Theta)) \rightarrow_A g([g(\$)]_\Theta)$.
A 12. lemma szerint $g(g(f(g(\$), g(\$)))) \leftrightarrow_E^* g(g(\$))$.
$\square$

A 13. lemmából kapjuk az alábbi eredményt.

Lemma 14 $\leftrightarrow_E^* = \tau(R, R)$.

Tehát (d)-ből következik (a).

$\square$

References

[1] P. J. Downey, R. Sethi, and R. E. Tarjan: Variations on the Common Subexpression Problem. Journal of the ACM, 27 (1980) 758-771.

[2] Z. Fülöp and S. Vágvölgyi, Ground term rewriting rules for the word problem of ground term equations, Bulletin of the EATCS, 45 (1991) 186-201.

[3] Z. Fülöp, and S. Vágvölgyi, Restricted ground tree transducers. Theoretical Computer Science, 250 (2001) 219-233.

[4] W. Snyder, A Fast Algorithm for Generating Reduced Ground Rewriting Systems from a set of Ground Equations, Journal of Symbolic Computation, 15 (1993) 415-450.