

Közelítő szimbolikus számítások

Intervallum aritmetika, automatikus differenciálás

SZTE-TTIK, Számítógépes Optimalizálás Tanszék

Hiba

- ▶ A számítógépes számábrázolás **véges**
- ▶ ← Okai: digitális tárolás + memóriakorlát



- ▶ Hiba: $x - \tilde{x}$ (előjeles érték)
- ▶ Abszolút hiba: $|x - \tilde{x}|$ nemnegatív szám
- ▶ Abszolút hibakorlát: $|x - \tilde{x}| \leq K_x$ felső korlát

Hiba példa

- ▶ $\sqrt{2} = x = 1.41421356\dots$ és $\tilde{x} = 1.410$
- ▶ Abszolút hiba: $|x - \tilde{x}| = 0.00421356\dots$
- ▶ Abszolút hibakorlát: pl. $|x - \tilde{x}| = 0.00421356 \leq 0.01 = K_x$
 $x = \boxed{1.41}421356\dots$
 $\tilde{x} = \boxed{1.41}0$
↳ 3 értékes jegy pontosságú becslés
- ▶ Forrása:
 - ▶ *Öröklött hiba*: ha már a kiindulási adatok is hibásak
 - ▶ *Képlethiba*: A számítási módszer közelítő jellegéből adódó hiba
 - ▶ *Kerekítési hiba*: A számítógépeken használható véges számábrázolásból adódó hiba

A számítógép hibája

- ▶ Matematikailag a következő két kifejezés ekvivalens, azaz egyenértékű:

$$\begin{aligned}f(x) &= (1 - x)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1 = \\&= g(x) = (((((x - 6)x + 15)x - 20)x + 15)x - 6)x + 1\end{aligned}$$

- ▶ Ez a Horner-elrendezés (később még tanuljuk)
- ▶ Vizsgáljuk meg, hogy számítógépen is így van-e!

A számítógép hibája - Matlab példa

▶ `x=1.005;`

▶ `(1-x).^6`

`ans =`

`1.5625e-14`

▶ `((((x-6).*x+15).*x-20).*x+15).*x-6).*x+1`

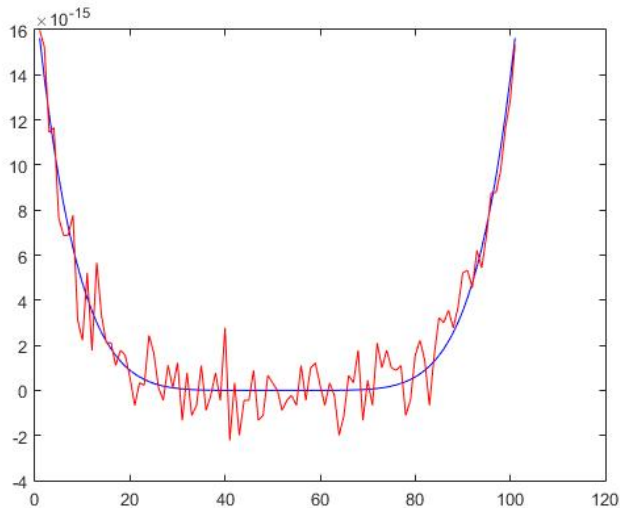
`ans =`

`1.5321e-14`

A számítógép hibája - Matlab példa ábrázolva

```
▶ x = [0.995:0.0001:1.005];  
▶ hatvanyos = (1-x).^6;  
▶ horner =  
    (((((x-6).*x+15).*x-20).*x+15).*x-6).*x+1;  
▶ plot(hatvanyos,'b');  
▶ hold on;  
▶ plot(horner,'r');  
▶ hold off;
```

A számítógép hibája - Matlab példa ábrázolva



Intervallum aritmetika

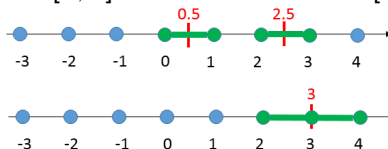
- ▶ Megoldás: számoljunk intervallumokkal!



- ▶ Keressünk olyan intervallumot, amelyben biztosan benne van az eredmény
- ▶ $x \in \tilde{x} = a, b$, ahol a és b gépi számok
- ▶ $\rightarrow$ minden ábrázolandó számot egy intervallum fog helyettesíteni

Intervallumok összeadása

- ▶ Egy egyszerű példa: tfh. a gép csak egészeket tud ábrázolni.
- ▶ $0.5 \in [0, 1]$ intervallum + $2.5 \in [2, 3]$ intervallum



A gép csak azt tudja, hogy az első szám valahol 0 és 1 között van, a második pedig valahol 2 és 3 között.

Ezek alapján az eredmény biztosan valahol 2 és 4 között lesz, de ennél pontosabbat nem tudunk. (a valós eredmény a 3 tényleg a 2 és 4 között van)

- ▶ Így: $[0, 1] + [2, 3] = [2, 4]$
- ▶ **Általában:** $[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$

Intervallumok kivonása

- ▶ $0.75 \in [0, 1]$ intervallum - $2.25 \in [2, 3]$ intervallum



A gép csak azt tudja, hogy az első szám valahol 0 és 1 között van, a második pedig valahol 2 és 3 között.

Kérdések:

1) Mi a legkisebb szám, amit kaphatunk eredményül, ha két ilyen számot kivonunk?

(válasz: -3)

2) Mi a legnagyobb szám amit kaphatunk?

(válasz: -1)

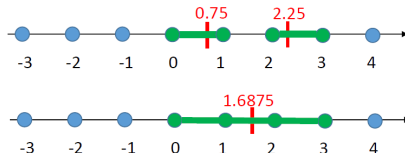
Így az eredmény biztosan -3 és -1 között lesz.

(és tényleg: $a - d = 0.75 - 2.25 = -1.5 \in [-3, -1]$)

- ▶ Így: $[0, 1] - [2, 3] = [-3, -1]$
- ▶ Másik példa: $[2, 3] - [0, 1] = [1, 3]$
- ▶ **Általában:** $[a, b] - [c, d] = [a - d, b - c]$

Intervallumok szorzása

- ▶ $0.75 \in [0, 1]$ intervallum * $2.25 \in [2, 3]$ intervallum



Az előzőkhöz teljesen hasonlóan szeretnénk tudni, hogy ha a kiindulási számok az adott intervallumokba esnek, akkor az eredmény melyik intervallumba esik biztosan. Szorzásnál ezt általában eldönteni csak a végpontok összes kombinációjának kipróbálásával lehet.

$[0, 1] * [2, 3]$

$$(0^*2) = 0$$

$$(0^*3) = 0$$

$$(1^*2) = 2$$

$$(1^*3) = 3$$

→ az eredmény 0 és 3 közé esik

- ▶ Így: $[0, 1] * [2, 3] = [0, 3]$
- ▶ Másik példa: $[-2, 3] * [-1, 4] = [-8, 12]$
mert: $-2 \cdot -1 = 2$ $-2 \cdot 4 = -8$ $3 \cdot -1 = -3$
minimum

merit: $-2^{*-1} = 2$

$$-2^*4 = -8$$

$$3^{*-1} = -3$$

$$3^*4 = 12$$

minimum

maximum

- **Általában:**

$$[a, b] * [c, d] = [\min(ac, ad, bc, bd), \max(ac, ad, bc, bd)]$$

A számítógép hibája

- ▶ Vegyük észre, hogy az intervallumok szélessége növekszik!
- ▶ Mi az intervallum szélessége?
Def.: $A = [a, b] \rightarrow w(A) = b - a$
pl.: $A = [-3, 6] \rightarrow w(A) = 6 - (-3) = 9$
- ▶ CÉL: olyan számítási módszerek alkalmazása, amelyeknél az eredmény intervallum minél szűkebb!
Tulajdonképpen az eredmény intervallum szélessége határozza meg, hogy mennyire pontosan ismerjük a végeredményt. (hiszen csak annyit tudunk, hogy a tényleges végeredmény valahol az eredmény intervallumon belül található)

Automatikus differenciálás

- ▶ A differenciálás (deriválás) sok-sok probléma kapcsán felmerül: szélsőérték hely keresés $\rightarrow$ optimalizálás
- ▶ Hogyan lehet, egy függvény deriváltját hatékonyan meghatározni?
 - ▶ iskolapad módszer: kézzel deriválunk
 - ▶ ugyanez csak számítógéppel: szimbolikus rendszerek használata
 - ▶ numerikus deriválás: közelítjük a deriváltat
 - ▶ automatikus differenciálás

Automatikus differenciálás

- ▶ Ötlet: nincs szükség a derivált függvény képletére, elég ha ismerjük a derivált értékét egy adott helyen.
- ▶ Pl.: $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x \leftarrow$ erre nincs szükség
 $f(3) = 9 \Rightarrow f'(3) = 6 \leftarrow$ csak **adott helyeken**
(pl.: most a 3) vagyunk kíváncsiak rá
- ▶ A derivált értéket ki lehet számítani a függvényérték számításával párhuzamosan a deriválási szabályok alkalmazásával.
- ▶ Emlékeztető (alap deriválási szabályok):

$$\begin{aligned}(f + g)' &= f' + g' \\ (f * g)' &= f' * g + f * g' \\ (f/g)' &= (f' * g - f * g')/g^2 \\ (f(g(x)))' &= f'(g(x)) * g'(x)\end{aligned}$$

Automatikus differenciálás

- ▶ Nem egy számot számolunk ki mint a függvényérték, hanem egy két számból álló párt. Az első lesz a függvényérték, a második lesz a derivált. $\rightarrow f \Leftrightarrow (f, f')$

Pl. $f(x) = x^2 \Leftrightarrow f'(x) = 2x$, ekkor $f(3) = (9, 6)$
(lásd az előző dián)

- ▶ Hogyan? $\Leftrightarrow$ Kiindulni is számpárokból fogunk!
 x helyett $(x, 1)$ -et írunk $\leftarrow$ ez egy alapeset:
 x -nek a deriváltja x szerint 1

minden c konstans helyett $(c, 0)$ -át írunk

$\leftarrow$ másik alapeset: a konstans deriváltja 0.

$$\begin{aligned} \rightarrow f(x) = x^2 &= x * x = (x, 1) * (x, 1) = (f, f') * (g, g') = \\ &= (f * g, (f * g)') = (f * g, (f * g)') = (f * g, f' * g + f * g') = \\ &= (x * x, 1 * x + x * 1) = (x^2, 2x) \end{aligned}$$

- ▶ A hatványfüggvény deriválási szabálya nélkül megkaptuk a deriváltat!
- ▶ Ugyanez számokkal:

$$f(3) = 3^2 = 3 * 3 = (3, 1) * (3, 1) = (3 * 3, 1 * 3 + 3 * 1) = (9, 6)$$



Példák

$$\begin{aligned}
 1. \quad f(x) &= x^2 + 3 = x * x + 3 = (x, 1) * (x, 1) + (3, 0) = \\
 &= (f, f') * (g, g') + (h, h') = (f * g + h, (f * g + h)') = \\
 &= (f * g + h, f' * g + f * g' + h') = \\
 &= (x * x + 3, 1 * x + x * 1 + 0) = (x^2 + 3, 2x)
 \end{aligned}$$

Számokkal:

$$\begin{aligned}
 f(4) &= 4^2 + 3 = (4, 1) * (4, 1) + (3, 0) = \\
 &= (4 * 4, 1 * 4 + 4 * 1) + (3, 0) = (16 + 3, 8 + 0) = (19, 8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad f(x) &= \frac{x+4}{3} \\
 f(2) &= \frac{(2,1)+(4,0)}{(3,0)} = \frac{(2+4,1+0)}{(3,0)} = \frac{(6,1)}{(3,0)} = \left(\frac{6}{3}, \frac{1*3-6*0}{3^2}\right) = \left(2, \frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Extra feladatok 1

1. Írj egy-egy függvényt, mely megvalósítja az összeadás, kivonás, szorzás és hatványozás műveletek intervallumos változatát. Mindegyik bemenet és kimenet egy intervallumot reprezentáló vektor, figyelj rá, hogy a páros kitevőjű hatványok csak nem negatív értékeket vehetnek fel.

Számítsd ki a $(x - 1)^6$ eredményét intervallumosan hagyományos és Horner elrendezéses alakban is. Vizsgáld meg az eredmény intervallumok hosszát.

Extra feladatok 2

1. Írd meg az automatikus differenciálás alap függvényeit - összeg, szorzat, osztás.

Pl. az összeg függvény várjon 2 paramétert, melyek mindegyike egy két elemű vektor (az egyik elem az érték, a másik elem a derivált értéke) és egy ugyanilyen kimenetet szolgáltatson.

Vizsgáld meg az $1/x$ és az x^2 függvények deriváltját néhány helyen, a Te módszereddel és a hagyományos deriválási szabályokkal.