Egyetemi jegyzet

Automaták és formális nyelvek

Fülöp Zoltán

Szegedi Tudományegyetem
Természettudományi és Informatikai Kar
Számítástudomány Alapjai Tanszék

2020. november 25.

Előszó

Ez a jegyzet az SZTE Informatikai Tanszékcsoporton tartott Automaták és formális nyelvek c. kurzusom anyagát tartalmazza. Megértéséhez szükség van diszkrét matematikai ismeretekre valamint a Formális nyelvek c. tárgy bevezető fejezeteinek ismeretére, melyek – többek között – a hasonló című [Fü99,04] tankönyvem első öt fejezetében találhatók meg.

Fel szeretném hívni az olvasó figyelmét, hogy a jegyzet még nem teljes, fejlesztés alatt lévő változat, ezért elképzelhető, hogy kisebb hibákat, hiányosságokat tartalmaz.

Ezúton fejezem ki köszönetemet Jász Juditnak és Sógor Zoltánnak, akik a 2002-es őszi félév során segítettek nekem a jegyzet nulladik változatának elkészítésében, továbbá azoknak a hallgatóknak, akik azóta észrevételeikkel hozzájárultak a fent említett hiányosságok számának csökkentéséhez.

Szeged, 2013. szeptember 9.

Fülöp Zoltán

Tartalomjegyzék

1. Fogalmak, jelölések

Ekvivalenciarelációkkal kapcsolatos alapfogalmak

Legyenek A és B egy halmazok, $f : A \to B$ pedig egy leképezés. Azt mondjuk, hogy f *injektív*, ha nem visz két különböző elemet egybe, vagy minden $a, b \in A$ esetén, ha $f(a) = f(b)$, akkor $a = b$. Továbbá, f *szürjektív*, ha minden $b \in B$-re van olyan $a \in A$, hogy $f(a) = b$. Ha f injektív és szürjektív is, akkor *bijekciónak* nevezzük.

Legyen A egy halmaz. Tetszőleges $\rho \subseteq A \times A$ részhalmazt A *feletti (kétváltozós) relációnak* hívunk. Minden $a, b \in A$ esetén röviden csak $a\rho b$-vel jelöljük azt a tényt, ha a és b ρ relációban vannak, vagyis $(a, b) \in \rho$.

Például, az $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ halmazon a $\leq$ egy reláció:

$$\leq = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ kisebb vagy egyenlő, mint } b\},$$

és $(2, 3) \in \leq$ helyett azt írjuk, hogy $2 \leq 3$. Egy másik reláció: tetszőleges $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ esetén

$$\equiv_n = \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \text{ és } b\ n\text{-nel osztva ugyanazt a maradékot adja}\}.$$

(Az $a \equiv_n b$-t gyakran $a \equiv b \pmod{n}$-nel is szokás jelölni, mi azonban az első, rövidebb jelölést használjuk.)

A ρ reláció

- *reflexív*, ha minden $a \in A$-ra $a\rho a$,
- *szimmetrikus*, ha minden $a, b \in A$-ra, ha $a\rho b$, akkor $b\rho a$,
- *tranzitív*, ha minden $a, b, c \in A$-ra, ha $a\rho b$ és $b\rho c$, akkor $a\rho c$,

A $\leq$ reflexív és tranzitív, de nem szimmetrikus. Az $\equiv_n$ reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

Azt mondjuk, hogy ρ reláció ekvivalenciareláció, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív. Ekkor a/ρ-val jelöljük az a-t tartalmazó ekvivalencia osztályt, vagyis

$$a/\rho = \{b \in A \mid a\rho b\}.$$

Az a/ρ halmazt ρ-osztálynak hívjuk. A definícó értelmében, az alábbi kifejezések mindegyike azt jelenti, hogy a és b ρ relációban vannak:

$$a\rho b, \qquad a \in b/\rho, \qquad b \in a/\rho, \qquad a/\rho = b/\rho.$$

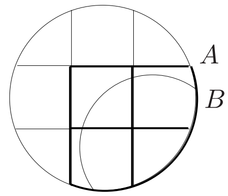
Továbbá,

$$(a, b) \notin \rho \iff a/\rho \cap b/\rho = \emptyset.$$

Minden $B \subseteq A$ esetén bevezetjük a

$$B/\rho = \{a/\rho \mid a \in B\}$$

jelölést. Például, a következő ábrán B/ρ a vastagabb vonallal jelzett négy osztályból álló halmaz. Megjegyezzük, hogy a $B \subseteq \bigcup_{b \in B} b/\rho$ tartalmazás mindig teljesül, lásd az ábrát.



Így A/ρ az összes ρ-osztályok halmaza. Ha A/ρ véges, akkor azt mondjuk, hogy ρ *véges indexű*.

Például $\equiv_n$ véges indexű ekvivalenciareláció. Osztályai $0/\equiv_n, 1/\equiv_n, \ldots, (n-1)/\equiv_n$, ahol $m/\equiv_n$ azon számok halmaza, amelyek n-nel osztva m-et adnak maradékul. Ezeket az osztályokat így is szokás jelölni: $\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}$, tehát

$$\mathbb{N}/\equiv_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}.$$

Legyen ismét $B \subseteq A$. Azt mondjuk, hogy ρ *szaturálja (vagy előállítja) B-t*, ha

$$B = \bigcup_{b \in B} b/\rho.$$

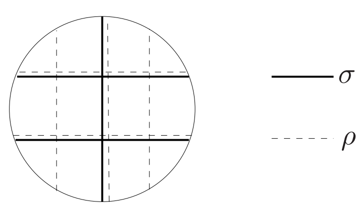
A B szaturálása azt jelenti, hogy ρ azon osztályainak egyesítése, melyeknek B-vel való metszete nem üres, éppen B-t adja vissza (és nem többet). Megjegyezzük, hogy a fenti ábrán ρ nem szaturálja B-t.

Könnyű belátni, hogy ρ akkor és csak akkor szaturálja B-t, ha

- minden $a, b \in A$ esetén, ha ($a\rho b$ és $a \in B$), akkor $b \in B$, vagy
- minden $a \in A$ esetén, ha $a/\rho \in B/\rho$, akkor $a \in B$.

1.1. Megjegyzés. Legyen A egy halmaz, továbbá legyenek ρ és σ ekvivalenciarelációk A felett, melyekre $\rho \subseteq \sigma$ teljesül. Ha ρ véges indexű, akkor σ is véges indexű.

Bizonyítás. Mivel $\rho \subseteq \sigma$, minden σ-osztály ρ-osztályok egyesítéseként áll elő (vagy, ami ugyanaz: a ρ-osztályokat úgy kapjuk, hogy a σ-osztályokat "tovább hasítjuk"), lásd az alábbi ábrát. Így $||A/\sigma|| \leq ||A/\rho||$. □



Az állítás fordítva nem igaz. Legyen például $A = \mathbb{N}$, ρ az egyenlőség reláció, $\sigma = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pedig a teljes reláció. Akkor $\rho \subseteq \sigma$, mivel $\{(a, a) \mid a \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Továbbá, σ-nak egy osztálya van, tehát véges indexű, míg ρ nem véges indexű, mert osztályai az $\{a\}$ alakú halmazok, ahol $a \in \mathbb{N}$.

Monoidok

Félcsoportnak nevezünk egy $(M, \cdot)$ rendezett párt, ahol M egy halmaz, $\cdot : M \times M \to M$ pedig egy M feletti kétváltozós asszociatív művelet. Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden $a, b, c \in M$ estén $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$. A továbbiakban, ha nem okoz félreértést, akkor gyakran $a \cdot b$ helyett csak ab-t, $(M, \cdot)$ helyett pedig M-et írunk. Egy M félcsoport *monoid*, ha van egységeleme, vagyis van olyan $e \in M$, hogy minden $a \in M$-re $ea = ae = a$.

Példák monoidokra:

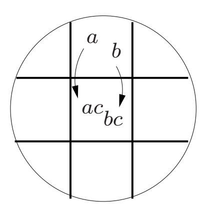
- $(\mathbb{N}, +)$ a 0 egységelemmel,
- $(\mathbb{N}, \cdot)$ az 1 egységelemmel,
- $(\Sigma^*, \text{konkatenáció})$ a ε egységelemmel.

Legyenek $(M, \cdot)$ és $(N, \circ)$ monoidok, melyek egységelemei rendre e és e'. Egy $h : M \to N$ leképezést *monoid homomorfizmusnak* (vagy röviden csak homomorfizmusnak) nevezünk, ha $h(e) = e'$ és minden $a, b \in M$-re fennáll, hogy $h(a \cdot b) = h(a) \circ h(b)$. (Ez utóbbi egyenletet, a fentebb említett egyszerűsített jelölést alkalmazva, gyakran csak $h(ab) = h(a)h(b)$ alakban írjuk.)

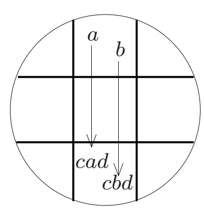
Például a $h : \Sigma^* \to \mathbb{N}$, ahol $h(x) = |x|$ (x hossza) minden $x \in \Sigma^*$-ra, homomorfizmus a Σ^* monoidból az $(\mathbb{N}, +)$ monoidba, mert $h(\varepsilon) = 0$ és $h(xy) = |xy| = |x| + |y| = h(x) + h(y)$. Megjegyezzük, hogy h szürjektív, de nem injektív. Ugyanakkor h nem homomorfizmus a Σ^*-ból az $(\mathbb{N}, \cdot)$-ba,

Legyen M egy monoid, $\rho \subseteq M \times M$ pedig ekvivalenciareláció M felett. Megadjuk a jobbkongruencia és a kongruencia definícióját. Ez utóbbit kétféleképpen is definiáljuk.

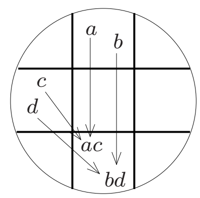
a) ρ *jobbkongruencia*, ha minden $a, b, c \in M$-re ha $a \,\rho\, b$, akkor $ac \,\rho\, bc$.



b) ρ *kongruencia*, ha $\forall a, b, c, d \in M$-re, ha $a \,\rho\, b$, akkor $cad \,\rho\, cbd$



c) ρ *kongruencia*, ha $\forall a, b, c, d \in M$-re, ha $a \,\rho\, b$ és $c \,\rho\, d$ fennállnak, akkor $ac \,\rho\, bd$ is teljesül.



Belátjuk, hogy a kongruencia két definíciója (a b) és a c)) ekvivalens.

b) $\Rightarrow$ c): Tegyük fel, hogy $a\rho b$ és $c\rho d$. Az $a\rho b$ feltételből b)-vel kapjuk, hogy $eac \,\rho\, ebc$, vagyis $ac \,\rho\, bc$. A $c\rho d$-ből, ugyancsak b) miatt kapjuk, hogy $bc \,\rho\, bd$. Végül $ac \,\rho\, bc$ és $bc \,\rho\, bd$-ből a tranvzitivitás miatt $ac \,\rho\, bd$.

c) $\Rightarrow$ b): Tegyük fel, hogy $a\rho b$. Mivel $c\rho c$ (ρ reflecív) a c) feltétel miatt kapjuk, hogy $ca \,\rho\, cb$. Ebből és $d\rho d$-ből, ugyancsak a c) feltétel miatt $cad \,\rho\, cbd$.

Továbbá, minden kongruencia egyben jobbkongruencia is, míg van olyan monoid és azon olyan jobbkongruencia, ami nem kongruencia (lásd lentebb).

Például, az $\equiv_n$ az $(\mathbb{N}, +)$ monoidon nemcsak ekvivalenciareláció, hanem kongruencia is, amit legkönnyebben a c) feltétel szerint láthatunk be: ha $a \equiv_n b$ és $c \equiv_n d$, akkor $(a + c) \equiv_n (b + d)$.

Ha $(M, \cdot)$ monoid, ρ pedig kongruencia M-en, akkor $(M/\rho, \circ)$ is a monoid az e/ρ egységelemmel, ahol $(a/\rho) \circ (b/\rho) = (a \cdot b)/\rho$. Az M/ρ monoidot a *ρ által M-en meghatározott faktormonoidnak nevezünk*.

Továbbá, a $h(a) = a/\rho$ $(a \in M)$ által definiált leképezés szürjektív homomorfizmus lesz M-ből M/ρ-ba, mert $h(a \cdot b) = (a \cdot b)/\rho = (a/\rho) \circ (b/\rho) = h(a) \circ h(b)$.

Tehát $(\mathbb{N}/\equiv_n, \oplus)$ is monoid (véges) a $\overline{0}$ egységelemmel, ahol a $\oplus$ művelet definíciója $\overline{a} \oplus \overline{b} = \overline{a + b}$. Továbbá, a $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}/\equiv_n$ leképezés, ahol $h(a) = \overline{a}$, szürjektív homomorfizmus, mert

$$h(a + b) = \overline{a + b} = \overline{a} \oplus \overline{b} = h(a) \oplus h(b).$$

A Σ^* monoid

Tetszőleges Σ ábécé esetén Σ^* monoidot alkot a konkatenációval (vagyis a szavak egymás után írásával), mint kétváltozós művelettel. Nyilvánvaló, hogy a konkatenáció asszociatív, mivel minden $x, y, z \in \Sigma^*$ esetén $(xy)z = x(yz)$. Továbbá, a konkatenáció egységeleme az ε-nal jelölt üres szó, hiszen minden $x \in \Sigma^*$-ra $x\varepsilon = \varepsilon x = x$.

Legyen most Δ egy másik ábécé és tekintsünk egy $h : \Sigma^* \to \Delta^*$ homomorfizmust. Legyen továbbá $x = a_1 \dots a_n$ egy Σ^*-beli szó, ahol $a_1, \dots, a_n \in \Sigma$. Akkor a homomorfizmus definíciója szerint $h(x) = h(a_1) \dots h(a_n)$, ami azt jelenti, hogy az x szó h melletti képét egyértelműen meghatározzák az x-et alkotó betűk h-melletti képei (mivel ezeket kell egymás után írni). A h homomorfizmust tehát egyértelműen megadhatjuk azzal, hogy minden $a \in \Sigma$-ra megadjuk $h(a)$-t.

Ez esetben az is igaz, hogy $h(\varepsilon) = \varepsilon$. Ha ugyanis $h(\varepsilon) = x \in \Delta^*$, akkor

$$x = h(\varepsilon) = h(\varepsilon\varepsilon) = h(\varepsilon)h(\varepsilon) = xx$$

ami csak úgy lehetséges, ha $x = \varepsilon$.

Például legyen $\Sigma = \{a, b\}$, $\Delta = \{a, b, c\}$ és legyen $h(a) = bc$, $h(b) = ca$. Akkor $h(ab) = bcca$, $h(aab) = bcbcca$, $h(abab) = bccabcca$, stb.

Egy speciális eset az, ha minden $a \in \Sigma$-ra $h(a) \in \Delta$. Az ilyen homomorfizmust betű-betű homomorfizmusnak nevezzük. Nyilvánvaló, hogy ha h betű-betű homomorfizmus, akkor minden $x \in \Sigma^*$-ra $|x| = |h(x)|$.

Például az előbbi Σ és Δ esetén a $h(a) = c$, $h(b) = a$ egyenlőségekkel megadott homomorfizmus egy betű-betű homomorfizmus. Ekkor $h(ab) = ca$, $h(aab) = cca$, $h(abab) = caca$, stb.

Tekintsük a Σ^* monoidot, legyen $x, y \in \Sigma^*$ és tekintsük az alábbi Σ^* feletti kétváltozós relációkat:

(a) $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $|x| = |y|$,

(b) $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha x és y ugyanazzal a betűvel kezdődik,

(c) $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha x és y ugyanazzal a betűvel végződik,

(d) $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $x = y$ vagy x és y is b betűvel kezdődik.

Könnyen belátható, hogy

(a) kongruencia (de nem véges indexű),

(b) véges indexű kongruencia,

(c) véges indexű kongruencia,

(d) jobbkongruencia, de nem véges indexű és nem is kongruencia. Valóban, például $ba \sim bba$, mert mindkét szó b-vel kezdődik. Ugyanakkor az $u = a$ és $v = \varepsilon$ szavakra $ubav = aba \not\sim abba = ubbav$.

2. Reguláris nyelvek

Automaták átmenetfüggvényének kiterjesztése

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy (determinisztikus és teljes) automata. A δ átmenetfüggvényt kiterjesztjük $\delta^* : Q \times \Sigma^* \to Q$ függvénnyé a következő módon:

(i) Minden $q \in Q$ állapotra legyen $\delta^*(q, \varepsilon) = q$,

(ii) Minden $q \in Q$ állapot és $x = ya \in \Sigma^*$ szó esetén (ahol $y \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$) legyen $\delta^*(q, x) = \delta(\delta^*(q, y), a)$.

Könnyen igazolható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ és $q \in Q$ esetén teljesül a $\delta^*(q, xy) = \delta^*(\delta^*(q, x), y)$ egyenlőség.

2.1. A Nerode-Myhill tétel

Tetszőleges L nyelv esetén bevezetjük L szintaktikus jobbkongruenciájának a fogalmát.

2.1. Definíció. Legyen Σ egy ábécé, $L \subseteq \Sigma^*$ pedig egy nyelv. Definiáljuk ρ_L relációt Σ^* felett a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma^*$-ra

$$x \rho_L y \text{ akkor és csak akkor, ha } \forall z \in \Sigma^* : xz \in L \iff yz \in L$$

$\square$

A ρ_L ekvivalenciareláció, mert reflexív, szimmetrikus, tranzitív. Ezen tulajdonságok könnyen ellenőrizhetők.

Például, legyen $\Sigma = \{a, b\}$.

- Ha $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$, akkor ρ_L osztályai az alábbiak:

  $$\{\varepsilon\}, \{a^n \mid n \geq 1\}, \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}, \{\text{összes többi szó}\},$$

  tehát ρ_L véges indexű.

- Ha $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, akkor ρ_L osztályai az alábbiak:

  $\{\varepsilon\}, \{a^1\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \{a^4\}, \ldots,$

  $\{ab, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, \ldots\}, \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, a^5b^4, \ldots\}, \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, a^6b^4, \ldots\},$

  $\{a^4b, a^5b^2, a^6b^3, a^7b^4, \ldots\}, \{a^5b, a^6b^2, a^7b^3, a^8b^4, \ldots\}, \ldots, \{\text{összes többi szó}\},$

  tehát ρ_L nem véges indexű.

2.2. Lemma. ρ_L jobbkongruencia Σ^* felett.

Bizonyítás. Mint láttuk, ρ_L ekvivalenciareláció. Most megmutatjuk, hogy ρ_L jobbkongruencia is. Vegyük evégett az $x, y, u \in \Sigma^*$ szavakat úgy, hogy $x \, \rho_L \, y$. Akkor minden $z \in \Sigma^*$-ra

$$(xu)z \in L \iff x(uz) \in L \iff y(uz) \in L \iff (yu)z \in L.$$

Tehát $x \, \rho_L \, y$-ből következik, hogy $xu \, \rho_L \, yu$, így ρ_L jobbkongruencia. □

A ρ_L-et az L *által meghatározott szintaktikus jobbkongruenciának* nevezzük.

2.3. Lemma. Minden $L \subseteq \Sigma^*$-ra ρ_L szaturálja L-et.

Bizonyítás. Vegyünk $x, y \in \Sigma^*$ szavakat, melyek ugyanazon ρ_L osztályban vannak, vagyis melyekre teljesül $x \, \rho_L \, y$. Ekkor minden $z \in \Sigma^*$-ra $xz \in L \iff yz \in L$. Használva ezen feltételt a $z = \varepsilon$ szóra kapjuk, hogy $x \in L \iff y \in L$. Vagyis ρ_L minden osztályára igaz, hogy vagy részhalmaza az L-nek, vagy az L-lel való metszete üres. Tehát $L = \bigcup_{x \in L} x/\rho_L$. □

2.4. Lemma. Minden $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv és ρ jobbkongruencia esetén, ha ρ szaturálja L-et, akkor $\rho \subseteq \rho_L$. (Más szóval ρ_L a legbővebb olyan jobbkongruencia, amely szaturálja L-et.)

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a ρ jobbkongruencia szaturálja L-et. Vegyük az $x, y \in \Sigma^*$ szavakat, melyekre $x\rho y$ és legyen $z \in \Sigma^*$ egy további tetszőleges szó. Ekkor $xz\rho yz$, mivel ρ jobbkongruencia. Továbbá, mivel ρ szaturálja L-et, az is igaz, hogy $xz \in L$ akkor és csak akkor teljesül, ha $yz \in L$. Tehát $x\rho_L y$, ami bizonyítja, hogy $\rho \subseteq \rho_L$. □

Most bevezetjük L szintaktikus kongruenciájának a fogalmát.

2.5. Definíció. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy tetszőleges nyelv. Definiáljuk a Σ^* feletti θ_L relációt a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $x\theta_L y$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha minden $u, v \in \Sigma^*$ szóra $uxv \in L \iff uyv \in L$. □

Nyilvánvaló, hogy θ_L is ekvivalenciareláció.

Például, legyen ismét $\Sigma = \{a, b\}$.

- Ha $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$, akkor θ_L osztályai az alábbiak:

$$\{\varepsilon\}, \{a^n \mid n \geq 1\}, \{b^n \mid n \geq 1\}, \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}, \{\text{összes többi szó}\},$$

  tehát θ_L véges indexű.

- Ha $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$, akkor θ_L osztályai az alábbiak:

  $\{\varepsilon\}, \{a^1\}, \{a^2\}, \{a^3\}, \{a^4\}, \ldots,$

  $\{ab, a^2b^2, a^3b^3, a^4b^4, \ldots\}, \{a^2b, a^3b^2, a^4b^3, a^5b^4, \ldots\}, \{a^3b, a^4b^2, a^5b^3, a^6b^4, \ldots\},$

  $\{a^4b, a^5b^2, a^6b^3, a^7b^4, \ldots\}, \{a^5b, a^6b^2, a^7b^3, a^8b^4, \ldots\}, \ldots,$

  $\{b^1\}, \{b^2\}, \{b^3\}, \{b^4\}, \ldots,$

  $\{ab^2, a^2b^3, a^3b^4, a^4b^5, \ldots\}, \{ab^3, a^2b^4, a^3b^5, a^4b^6, \ldots\},$

  $\{ab^4, a^2b^5, a^3b^6, a^4b^7, \ldots\}, \{ab^5, a^2b^6, a^3b^7, a^4b^8, \ldots\}, \ldots,$

  $\{$összes többi szó$\}$,

  tehát θ_L nem véges indexű.

Rutin számolással igazolható, hogy θ_L kongruencia Σ^* felett, a bizonyítás ugyanúgy megy, mint annak igazolása, hogy ρ_L jobbkongruencia, lásd 2.2. lemma. A θ_L-et az L *által meghatározott szintaktikus kongruenciának* nevezzük.

Nyilvánvaló a következő állítás.

2.6. Lemma. Minden $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén $\theta_L \subseteq \rho_L$.

Bizonyítás. Minden $x, y \in \Sigma^*$-ra

$$\begin{array}{ll} & x\theta_L y \\ \Leftrightarrow & \forall u, v \in \Sigma^*\text{-ra } uxv \in L \iff uyv \in L \\ \Rightarrow & u = \varepsilon\text{-ra és } \forall v \in \Sigma^*\text{-ra } xv \in L \iff yv \in L \\ \Leftrightarrow & x\rho_L y, \end{array}$$

tehát $\theta_L \subseteq \rho_L$.

Példa: nézzük meg, hogyan teljesül a fenti tartalmazás az $L = \{a^n b^m \mid n, m \geq 1\}$ és $L = \{a^n b^n \mid n \geq 1\}$ nyelvek esetében. □

2.7. Következmény. Minden $L \subseteq \Sigma^*$-ra θ_L szaturálja L-et.

Bizonyítás. Azonnal következik az 2.3. és 2.6. lemmákból. □

2.8. Lemma. Minden $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv és θ kongruencia esetén, ha θ szaturálja L-et, akkor $\theta \subseteq \theta_L$. (Más szóval θ_L a legbővebb olyan kongruencia, amely szaturálja L-et.)

Bizonyítás. Ugyanúgy megy, mint a 2.4. lemma bizonyítása. □

Most bebizonyítunk két lemmát.

2.9. Lemma. Ha egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv felismerhető automatával, akkor van olyan véges indexű kongruencia Σ^* felett, amely szaturálja L-et.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $L = L(M)$ valamely $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatára. Minden $x \in \Sigma^*$-ra definiáljuk a

$$\varphi_x : Q \to Q$$

leképezést úgy, hogy minden $q \in Q$-ra legyen $\varphi_x(q) = \delta^*(q, x)$. Ezután definiáljuk a θ relációt Σ^* felett a következőképpen: minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $x\theta y$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha $\varphi_x = \varphi_y$.

Először megmutatjuk, hogy θ véges indexű kongruencia Σ^* felett.

Nyilvánvaló, hogy θ ekvivalenciareláció. Megmutatjuk, hogy kongruencia is. Legyen evégett $x, y \in \Sigma^*$ két olyan szó, melyre $x\theta y$, vagyis $\varphi_x = \varphi_y$. Legyen $u, v \in \Sigma^*$ és $q \in Q$. Akkor

$$\varphi_{uxv}(q) = \delta^*(q, uxv) = \delta^*(\delta^*(\delta^*(q, u), x), v) = \delta^*(\delta^*(\delta^*(q, u), y), v) = \delta^*(q, uyv) = \varphi_{uyv}(q),$$

ami azt jelenti, hogy $\varphi_{uxv} = \varphi_{uyv}$, tehát $uxv\theta uyv$. Következésképpen θ kongruencia.

Az, hogy θ véges indexű, a következőképpen látható be. A θ definíciója szerint minden θ-osztályhoz tartozik egy Q-ból Q-ba való leképezés és különböző osztályokhoz különböző leképezések tartoznak. Következésképpen, a θ-osztályok száma legfeljebb annyi, mint a Q-ból Q-ba való leképezések száma, ami nyilvánvalóan véges szám (pontosan $||Q||^{||Q||}$). Így azt kaptuk, hogy θ véges indexű.

Végül, mivel $L = \bigcup(x/\theta \mid \delta^*(q_0, x) \in F)$, azt is beláttuk, hogy θ szaturálja L-et. □

2.10. Lemma. Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén, ha van olyan véges indexű jobbkongruencia, amely szaturálja L-et, akkor L felismerhető.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy a ρ véges indexű jobbkongruencia szaturálja L-et. Megmutatjuk, hogy L felismerhető. Ezt úgy érjük el, hogy definiálunk egy olyan M automatát, melyre $L = L(M)$.

Legyen $M = (\Sigma^*/\rho, \Sigma, \delta, \varepsilon/\rho, L/\rho)$. Az automata nyilvánvalóan véges, mivel ρ véges indexű és így Σ^*/ρ is véges halmaz.

A δ átmenetfüggvényt a következőképpen definiáljuk: minden $x \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$ esetén legyen $\delta(x/\rho, a) = xa/\rho$. Ekkor δ jóldefiniált, mivel, ha $x/\rho = y/\rho$, akkor

$$\begin{array}{llll}
\delta(x/\rho, a) & = & xa/\rho & \text{(definíció szerint)} \\
& = & ya/\rho & \text{(mivel } \rho \text{ jobbkongruencia)} \\
& = & \delta(y/\rho, a) & \text{(definíció szerint).}
\end{array}$$

Az y szó hossza szerinti indukcióval bizonyítható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $\delta^*(x/\rho, y) = xy/\rho$ teljesül. Jelöljük ezt az állítást †-rel.

Így az $L = L(M)$ egyenlőség a következőképpen igazolható: minden $x \in \Sigma^*$-ra

$$\begin{array}{llll}
x \in L(M) & \Longleftrightarrow & \delta^*(\varepsilon/\rho, x) \in L/\rho & \text{(definíció szerint)} \\
& \Longleftrightarrow & x/\rho \in L/\rho & \text{(az előbbi † megjegyzés miatt)} \\
& \Longleftrightarrow & x \in L & \text{(mivel } \rho \text{ szaturálja } L\text{-et).}
\end{array}$$

□

Most bebizonyítjuk Nerode-Myhill tételt.

2.11. Tétel. (Nerode-Myhill tétel.) *Minden $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén a következő állítások ekvivalensek:*

(1) L felismerhető automatával.

(2) Van olyan véges indexű kongruencia Σ^* felett, amely szaturálja L-et.

(3) A θ_L kongruencia véges indexű.

(4) A ρ_L jobbkongruencia véges indexű.

(5) Van olyan véges indexű jobbkongruencia Σ^* felett, amely szaturálja L-et.

Bizonyítás.
(1) $\Rightarrow$ (2): 2.9. lemma.
(2) $\Rightarrow$ (3): Az 2.8. lemma szerint $\theta \subseteq \theta_L$, tehát az 1.1. megjegyzés miatt θ_L véges indexű.
(3) $\Rightarrow$ (4): 2.6. lemma.
(4) $\Rightarrow$ (5): 2.3. lemma.
(5) $\Rightarrow$ (1): 2.10. lemma.

□

2.2. Automaták minimalizálása

Az M és M' automatákat *ekvivalensnek* hívjuk, ha $L(M) = L(M')$.

Egy M automatát *minimálisnak* nevezünk, ha bármely vele ekvivalens M' automata esetén M-nek legfeljebb annyi állapota van, mint M'-nek. Adott $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető nyelv esetén tekintsük a

$$K_L = \{M \mid M \text{ automata és } L(M) = L\}$$

osztályt. K_L elemei közül a minimális automaták érdekelnek bennünket. Megadunk egy K_L-beli minimális állapotszámú automatát. Továbbá, megmutatjuk, hogy bármely két K_L-beli minimális állapotszámú automata izomorf. Végül, algoritmust adunk a K_L-beli minimális automata meghatározására.

2.2.1. A minimális automata egyértelműségének bizonyítása

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tetszőleges automata. Bevezetjük a $\delta^*(q, x) = qx_M$ jelölést, tehát qx_M azt az állapotot jelöli, melybe az M automata a q állapotból az x szó hatására kerül. Ha nem okoz félreértést, akkor a qx_M jelölésből M-et is elhagyjuk és egyszerűen csak qx-et írunk.

Először a kezdőállapotból nem elérhető állapotokkal foglalkozunk.

2.12. Definíció. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata. M *összefüggő része* az $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ automata, ahol

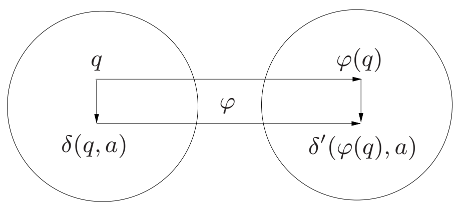
- $Q' = \{q_0x \mid x \in \Sigma^*\}$,
- $F' = F \cap Q'$,
- $\delta'(p, a) = \delta(p, a)$ minden $p \in Q'$-re.

M összefüggő, ha $M = M'$. □

Nyilvánvaló, hogy ha M' az M összefüggő része, akkor egyrészt M' az M részautomatája, másrészt $L(M) = L(M')$. Ugyancsak nyilvánvaló, hogy ha M minimális, akkor összefüggő.

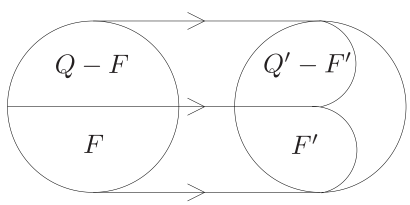
2.13. Definíció. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ és $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ automaták és $\varphi : Q \to Q'$ egy leképezés. A φ *homomorfizmus* M-ből M'-be, ha teljesülnek a következő feltételek:

(1) $\forall q \in Q$, $a \in \Sigma$: $\varphi(\delta(q, a)) = \delta'(\varphi(q), a)$,



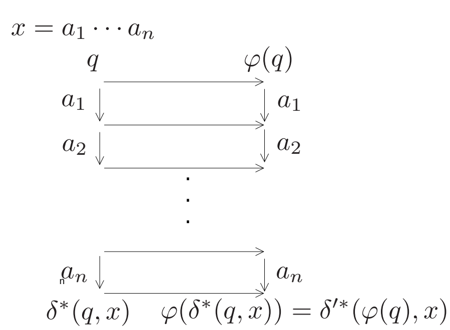
(2) $\varphi(q_0) = q_0'$,

(3) $\varphi^{-1}(F') = F$.



Ha φ ráképezés, akkor azt mondjuk, hogy *M' az M homomorf képe*. Ha φ bijekció, akkor *izomorfizmusnak* hívjuk és azt mondjuk, hogy *M és M' izomorfak*, jele $M \cong M'$. □

2.14. Megjegyzés. Bizonyítható, hogy ha φ homomorfizmus, akkor az (1) tulajdonság nemcsak egy $a \in \Sigma$ input szimbólumra, hanem tetszőleges $x \in \Sigma^*$ szóra is teljesül: minden $q \in Q$ állapot esetén $\varphi(\delta^*(q, x)) = \delta'^*(\varphi(q), x)$. A bizonyítás x hossza szerinti indukcióval végezhető el. Ezen tényt szemlélteti az alábbi ábra is:



□

A $\varphi(\delta^*(q,x)) = \delta'^*(\varphi(q),x)$ egyenlőséget egyszerűen $\varphi(qx_M) = \varphi(q)x_{M'}$ alakban is írhatjuk.

Ha M összefüggő, akkor legfeljebb egy homomorfizmus létezik M-ből M'-be. Valóban, legyenek φ és ψ M-ből M'-be történő homomorfizmusok. Ha M összefüggő, akkor minden állapota q_0x_M alakú és

$$\varphi(q_0x_M) = \varphi(q_0)x_{M'} = q_0'x_{M'} = \psi(q_0)x_{M'} = \psi(q_0x_M),$$

vagyis φ és ψ az M tetszőleges állapotán egybeesnek.

2.15. Lemma. Legyenek $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ és $M' = (Q',\Sigma,\delta',q_0',F')$ automaták. Ha van homomorfizmus M-ből M'-be, akkor $L(M) = L(M')$.

Bizonyítás. Legyen $\varphi : Q \to Q'$ homomorfizmus M-ből M'-be. Ekkor minden $x \in \Sigma^*$-ra:

$$\begin{array}{rcll} x \in L(M) & \iff & q_0x_M \in F & \text{(definíció szerint)} \\ & \iff & \varphi(q_0x_M) \in F' & \text{(mivel } \varphi^{-1}(F') = F) \\ & \iff & \varphi(q_0)x_{M'} \in F' & \text{(2.14. Megjegyzés)} \\ & \iff & q_0'x_{M'} \in F' & \text{(mivel } \varphi(q_0) = q_0') \\ & \iff & x \in L(M') & \text{(definíció szerint).} \end{array}$$

□

Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy tetszőleges felismerhető nyelv és tekintsük az

$$M_L = (\Sigma^*/\rho_L, \Sigma, \delta_L, \varepsilon/\rho_L, L/\rho_L)$$

automatát, ahol ρ_L az L szintaktikus jobbkongruenciája és minden $x \in \Sigma^*$ esetén $\delta_L(x/\rho_L, a) = xa/\rho_L$. Megjegyezzük hogy a 2.11. tétel szerint ρ_L véges indexű és így a Σ^*/ρ_L halmaz véges. Továbbá, a 2.3. lemma szerint ρ_L szaturálja L-et és így a 2.10. lemma szerint $L = L(M_L)$. Megmutatjuk M_L egy fontos tulajdonságát.

2.16. Lemma. Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető nyelv, $M = (Q,\Sigma,\delta,q_0,F)$ pedig tetszőleges összefüggő automata, amelyik L-et ismeri fel. Akkor M_L az M homomorf képe.

Bizonyítás. Definiáljuk a $\varphi : Q \to \Sigma^*/\rho_L$ leképezést oly módon, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra $\varphi(q_0x) = x/\rho_L$. A definíció korrektségét a következőképpen láthatjuk be. Ha $q_0x = q_0y$, akkor abból, hogy M is L-et ismeri fel, következik, hogy minden $z \in \Sigma^*$-ra $xz \in L \iff yz \in L$. Ez utóbbi pedig azt jelenti, hogy $x/\rho_L = y/\rho_L$ tehát $\varphi(q_0x) = \varphi(q_0y)$. Megmutatjuk, hogy φ homomorfizmus M-ből M_L-re. Valóban:

- minden $x \in \Sigma^*$-ra,

$$\varphi(\delta(q_0x,a)) = \varphi(q_0(xa)) = xa/\rho_L = \delta_L(x/\rho_L,a) = \delta_L(\varphi(q_0x),a);$$

- $\varphi(q_0) = \varphi(q_0\varepsilon) = \varepsilon/\rho_L$;

- minden $x \in \Sigma^*$-ra,

$$\begin{array}{rcll} q_0x \in F & \iff & x \in L & \text{(mivel } M \text{ is } L\text{-et ismeri fel)} \\ & \iff & x/\rho_L \in L/\rho_L & \text{(mivel } \rho_L \text{ szaturálja } L\text{-et)} \\ & \iff & \varphi(q_0x) \in L/\rho_L, & \end{array}$$

  tehát $\varphi^{-1}(L/\rho_L) = F$;

- végül nyilvánvaló az, hogy φ ráképezés (vagyis szürjektív).

□

A következő tételben bebizonyítjuk, hogy M_L az L-et felismerő minimális automata.

2.17. Tétel. *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy felismerhető nyelv. Akkor*
1) M_L az L-et felismerő minimális állapotszámú automata.
2) Az L-et felismerő minimális automata izomorfizmus erejéig egyértelműen meghatározott.

Bizonyítás.
1) bizonyítása. Vegyünk egy tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ (nem feltétlenül összefüggő) automatát, melyre ugyancsak $L = L(M)$ és mutassuk meg, hogy $||\Sigma^*/\rho_L|| \leq ||Q||$.

Legyen $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0, F')$ az M összefüggő része. A 2.16. lemma szerint M_L az M' homomorf képe. Következésképpen, $||\Sigma^*/\rho_L|| \leq ||Q'|| \leq ||Q||$ teljesül, tehát M_L minimális állapotszámú az L-et felismerő automaták között.
2) bizonyítása Tegyük fel, hogy M minimális. Ekkor az 1) részben kapott eredmény miatt $||\Sigma^*/\rho_L|| = ||Q'|| = ||Q||$. Következésképpen a 2.16. lemmában szereplő φ homomorfizmus egyben izomorfizmus is lesz. Tehát M_L és M izomorfak. □

Egyúttal bebizonyítottuk a következő eredményt is.

2.18. Következmény. *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ egy felismerhető nyelv és legyen $K_L = \{M \mid M$ automata és $L(M) = L\}$. Egy M_0 automata akkor és csak akkor minimális K_L-ben, ha minden K_L-beli automata összefüggő részének homomorf képe.*

Bizonyítás. Ha M_0 minimális, akkor a 2.17. tétel szerint izomorf M_L-lel, ami viszont a 2.16. lemma szerint homomorf képe bármely K_L-beli automata összefüggő részének.

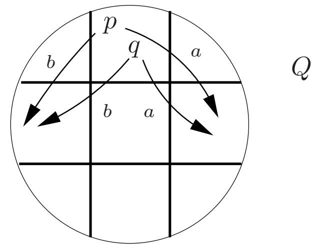
Ha viszont M_0 minden K_L-beli automata összefüggő részének homomorf képe, akkor állapotainak száma legfeljebb annyi, mint egy tetszőleges K_L-beli automatáé, tehát M_0 minimális. □

2.2.2. A minimális állapotszámú automata algoritmikus meghatározása

Kongruencia automatákon

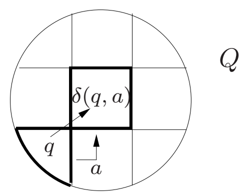
2.19. Definíció. (a) Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata és $\rho \subseteq Q \times Q$ egy ekvivalenciareláció Q-n. ρ *kongruencia M-en*, ha

(1) $\forall p, q \in Q,\ a \in \Sigma$-ra ha $p\,\rho\,q$ akkor $\delta(p, a)\,\rho\,\delta(q, a)$.



(2) ρ szaturálja F-et, azaz $\forall p, q \in Q$-ra ha $p \,\rho\, q$, akkor $p \in F \iff q \in F$.

(b) Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata, ρ pedig kongruenciareláció M-en. *M-nek a ρ által meghatározott faktorautomatája* a következő automata: $M/\rho = (Q/\rho, \Sigma, \delta_\rho, q_0/\rho, F/\rho)$, ahol $\delta_\rho(q/\rho, a) = \delta(q, a)/\rho$.



□

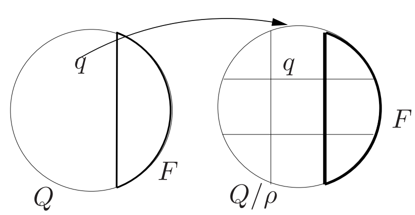
Könnyen belátható, hogy a fenti definícióban szereplő δ_ρ átmenetfüggvény jóldefiniált, mert ρ kongruencia. Most bebizonyítjuk az automatákra vonatkozó homomorfizmus tételt.

2.20. Lemma. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata.

(a) Ha ρ kongruenciareláció M-en, akkor M/ρ az M homomorf képe.

(b) Ha $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ az M homomorf képe, akkor az M automatán van olyan ρ kongruencia, hogy $M/\rho \cong M'$.

Bizonyítás. (a) Definiáljuk a $\varphi : Q \to Q/\rho$ leképezést úgy, hogy minden $q \in Q$-ra $\varphi(q) = q/\rho$.



Nyilvánvaló az, hogy φ szürjektív. Megmutatjuk, hogy φ homomorfizmus is:

- $\forall q \in Q, a \in \Sigma$-ra $\varphi(\delta(q,a)) = \delta_\rho(\varphi(q), a)$, mert
$$\varphi(\delta(q,a)) = \delta(q,a)/\rho = \delta_\rho(q/\rho, a) = \delta_\rho(\varphi(q), a).$$
- $\varphi(q_0) = q_0/\rho$.
- $\varphi^{-1}(F/\rho) = F$ teljesül, mert ρ szaturálja F-et.

(b) Definiáljuk a következő $\rho \subseteq Q \times Q$ feletti relációt:

$p\rho q$ akkor és csak akkor, ha $\varphi(p) = \varphi(q)$.

Megmutatjuk, hogy ρ kongruencia. (1) Tegyük fel, hogy $p\rho q$ teljesül és legyen $a \in \Sigma$. Ekkor
$$\varphi(\delta(p,a)) = \delta'(\varphi(p), a) = \delta'(\varphi(q), a) = \varphi(\delta(q,a)),$$
ahol az első és a harmadik egyenlőség azért teljesül, mert φ homomorfizmus, a második pedig azért, mert a feltevésünk szerint $\varphi(p) = \varphi(q)$. Kapjuk, hogy $\delta(p,a)\rho\,\delta(q,a)$.

(2) Mivel φ homomorfizmus, $\varphi^{-1}(F') = F$. Tegyük fel, hogy $p\rho q$ teljesül, vagyis $\varphi(p) = \varphi(q)$. Kapjuk, hogy
$$p \in F \iff \varphi(p) \in F' \iff \varphi(q) \in F' \iff q \in F,$$
ahol az első és a harmadik ekvivalencia a $\varphi^{-1}(F') = F$ feltétel miatt teljesül.

Definiáljuk a $\psi : Q/\rho \to Q'$ leképezést a $\psi(p/\rho) = \varphi(p)$ formuával. A definíció korrekt, mert ha $p/\rho = q/\rho$, vagyis $p\rho q$, akkor ρ definíciója szerint $\psi(p/\rho) = \varphi(p) = \varphi(q) = \psi(q/\rho)$. Az is nyilvánvaló, hogy ψ bijekció. Végül belátjuk, hogy ψ homomorfizmus:
$$\psi(\delta_\rho(p/\rho, a)) = \psi(\delta(p,a)/\rho) = \varphi(\delta(p,a)) = \delta'(\varphi(p), a) = \delta'(\psi(p/\rho), a).$$
□

2.21. Következmény. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata, ρ pedig egy kongruenciareláció M-en. Akkor $L(M) = L(M/\rho)$.

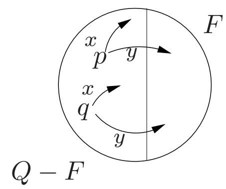
Bizonyítás. Következik az 2.20.(a) és 2.15. Lemmákból. □

A 2.20. Lemma (b) részében definiált ρ kongruencia relációt $\ker(\varphi)$-vel jelöljük.

Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy összefüggő automata és $L = L(M)$ és
$$M_L = (\Sigma^*/\rho_L, \Sigma, \delta_L, \varepsilon/\rho_L, L/\rho_L).$$
A 2.16. lemma szerint a $\varphi(q_0 x) = x/\rho_L$ egyenlőséggel definiált $\varphi : Q \to \Sigma^*/\rho_L$ leképezés homomorfizmus M-ből M_L-re. A 2.20. lemma (b) részének bizonyítása szerint $M/\ker(\varphi) \cong M_L$, tehát $M/\ker(\varphi)$ is L-et felsimerő minimális automata.

Most tetszőleges M automatára bevezetjük a ρ_M kongruenciát és megmutatjuk, hogy ha M összefüggő, akkor egyrészt ρ_M megegyezik a $\ker(\varphi)$-vel, másrészt, hogy ρ_M algoritmikusan kiszámítható.

2.22. Definíció. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata. Definiáljuk $\rho_M \subseteq Q \times Q$ relációt a következőképpen: $\forall p, q \in Q$-ra $p\, \rho_M\, q$ akkor és csak akkor teljesüljön, ha minden $x \in \Sigma^*$ esetén $px \in F \Leftrightarrow qx \in F$.



Az alábbi lemmából következik, hogy valójában ρ_M kongruencia is.

2.23. Lemma. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy összefüggő automata, $L = L(M)$ és $\varphi : Q \to \Sigma^*/\rho_L$ a $\varphi(q_0 x) = x/\rho_L$ egyenlőséggel definiált homomorfizmus M-ből M_L-be (lásd 2.16. lemma). Akkor $\rho_M = \ker(\varphi)$.

Bizonyítás. Legyen $p, q \in Q$. Mivel M összefüggő, vannak olyan $x, y \in \Sigma^*$ szavak, melyekre $p = q_0 x$ és $q = q_0 y$. Kapjuk, hogy

$$
\begin{array}{lll}
 & p \ker(\varphi)\, q & \\
\Longleftrightarrow & \varphi(p) = \varphi(q) & (\ker(\varphi) \text{ definíciója}) \\
\Longleftrightarrow & \varphi(q_0 x) = \varphi(q_0 y) & \\
\Longleftrightarrow & x/\rho_L = y/\rho_L & (\varphi \text{ definíciója}) \\
\Longleftrightarrow & (\forall z \in \Sigma^*) : xz \in L \iff yz \in L & (\rho_L \text{ definíciója}) \\
\Longleftrightarrow & (\forall z \in \Sigma^*) : q_0(xz) \in F \iff q_0(yz) \in F & (\text{mivel } L = L(M)) \\
\Longleftrightarrow & (\forall z \in \Sigma^*) : (q_0 x)z \in F \iff (q_0 y)z \in F & (q_0(xz) = (q_0 x)z \text{ és } q_0(yz) = (q_0 y)z) \\
\Longleftrightarrow & (\forall z \in \Sigma^*) : pz \in F \iff qz \in F & (p = q_0 x) \text{ és } q = q_0 y)) \\
 & p\, \rho_M\, q &
\end{array}
$$

□

Most már könnyen be tudjuk bizonyítani a következő tételt.

2.24. Tétel. *Legyen $L \subseteq \Sigma^*$ felismerhető nyelv és legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy összefüggő automata, melyre $L = L(M)$. Akkor*

$$M/\rho_M = (Q/\rho_M, \Sigma, \delta_{\rho_M}, q_0/\rho_M, F/\rho_M)$$

az L-et felismerő minimális állapotszámú automata.

Bizonyítás. A 2.17. Tétel szerint M_L az L-et felismerő minimális automata. Továbbá, a 2.20. Lemma (b) része szerint $M/\ker(\varphi) \cong M_L$, ahol φ a 2.16. lemma bizonyításában definiált homomorfizmus. Végül a 2.23. Lemma szerint $ker(\varphi) = \rho_M$. Tehát $M/\rho_M \cong M_L$. □

Most megadunk egy olyan algoritmust, mely egy M automata ismeretében kiszámítja ρ_M-et.

2.25. Algoritmus. ρ_M kiszámítása.

Input $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata.

Output ρ_M kongruencia reláció.

Módszer Közelítjük ρ_M-et a $\rho_0, \rho_1, \ldots$ (Q feletti) relációkkal.

(i) Legyen ρ_0 a következő: minden $p, q \in Q$-ra, $p\rho_0 q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p \in F \iff q \in F$. Legyen $i = 0$.

(ii) Legyen ρ_{i+1} a következő: minden $p, q \in Q$-ra, $p\rho_{i+1}q$ akkor és csak akkor teljesül, ha $p\rho_i q$ és minden $a \in \Sigma$-ra $\delta(p, a)\rho_i\delta(q, a)$.

(iii) Ha $\rho_i = \rho_{i+1}$, akkor állj, különben legyen $i = i + 1$ és menjünk (ii)-re.

□

2.26. Lemma. Az 2.25. algoritmus minden M esetén terminál (megáll) és ρ_M-et számítja ki.

Bizonyítás. Mivel $\rho_0 \supseteq \rho_1 \supseteq \ldots$ „=", van olyan $i \geq 0$, melyre $\rho_i = \rho_{i+1}$, ezért az 2.25. algoritmus mindig terminál.

Először bebizonyítjuk, hogy ha $\rho_i = \rho_{i+1}$ valamely i-re, akkor $\rho_{i+1} = \rho_{i+2} = \ldots$ is teljesül. Indirekt bizonyítást adunk, evégett feltesszük, hogy $\rho_i = \rho_{i+1}$ és $\rho_{i+1} \supset \rho_{i+2}$. Akkor van két olyan $p, q \in Q$ állapot, melyekre $p\rho_{i+1}q$, ugyanakkor *nem teljesül* $p\rho_{i+2}q$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy van olyan $a \in \Sigma$ szimbólum, melyre *nem teljesül* $\delta(p, a)\rho_{i+1}\delta(q, a)$. Mivel $\rho_i = \rho_{i+1}$, szintén *nem teljesül* $\delta(p, a)\rho_i\delta(q, a)$, tehát *nem teljesül* $p\rho_{i+1}q$ sem. Ellentmondás, mivel feltevésünk szerint $p\rho_{i+1}q$.

Legyen i_0 a legkisebb olyan szám, melyre $\rho_{i_0} = \rho_{i_0+1}$. Megmutatjuk, hogy $\rho_{i_0} = \rho_M$. Ehhez szükségünk van a következő állításra.

Állítás: Minden $i, l \geq 0$ egész szám, $p, q \in Q$ állapot és $z \in \Sigma^*$ szó esetén, melyre $|z| = l$, a $p\rho_{i+l}q$ relációból következik, hogy $pz\rho_i qz$.
Az állítás bizonyítása: l szerinti indukció. Ha $l = 0$, akkor $z = \varepsilon$, így $p\rho_{i+0}q$-ból következik, hogy $p\varepsilon\rho_i q\varepsilon$.

Most tegyük fel, hogy az állítás l-re teljesül. Legyen evégett $z = av \in \Sigma^*$, melyre $|v| = l$ (tehát $|z| = l+1$) és tegyük fel, hogy $p\rho_{i+l+1}q$. Akkor, a ρ_{i+l+1} definíciója miatt, $pa\rho_{i+l}qa$ szintén teljesül, amiből az indukciós feltevés miatt $(pa)v\rho_i(qa)v$ következik. Mivel $(pa)v = p(av) = pz$ és $(qa)v = q(av) = qz$, kapjuk, hogy $pz\rho_i qz$.

Végül megmutatjuk, hogy $\rho_{i_0} = \rho_M$.

A $\rho_{i_0} \subseteq \rho_M$ tartalmazás bizonyításával kezdjük. Tegyük fel, hogy $p\rho_{i_0}q$. Legyen $z \in \Sigma^*$ egy tetszőleges szó, melyre $|z| = l$. Mivel $\rho_{i_0} = \rho_{i_0+l}$, a $p\rho_{i_0+l}q$ reláció szintén teljesül, ahonnan az imént bebizonyított állítás szerint kapjuk, hogy $pz\rho_{i_0}qz$. Ez utóbbiból, a $\rho_0 \supseteq \rho_{i_0}$ tartalmazás miatt $pz\rho_0 qz$ következik. Ez, a ρ_0 definíciója szerint azt jelenti, hogy $pz \in F \iff qz \in F$. Mivel z egy tetszőleges szó volt, $p\rho_M q$.

A fordított irányú $\rho_M \subseteq \rho_{i_0}$ tartalmazás bizonyítása végett elegendő megmutatni a következőt: minden $p, q \in Q$ és $i \geq 0$, ha *nem teljesül* $p\rho_i q$, akkor *nem teljesül* $p\rho_M q$. Ez utóbbit i szerinti indukcióval bizonyítjuk be.

$i = 0$ eset: Ha *nem teljesül* $p\rho_0 q$, akkor $p \in F \iff q \notin F$, ami szerint *nem teljesül* $p\rho_M q$.

$i \Rightarrow i+1$: Tegyük fel, hogy *nem teljesül* $p\rho_{i+1}q$. Akkor vagy *nem teljesül* $p\rho_i q$ vagy ($p\rho_i q$ és van olyan $a \in \Sigma$, melyre *nem teljesül* $pa\rho_i qa$). Az első esetben az indukciós feltevés szerint *nem teljesül* $p\rho_M q$. A második esetben, ugyancsak az indukciós feltevés szerint *nem teljesül* $pa\rho_M qa$, tehát van olyan $z \in \Sigma^*$ szó, melyre $(pa)z \in F \iff (qa)z \notin F$. Mivel $(pa)z = p(az)$ és hasonlóan $(qa)z = q(az)$, kapjuk, hogy $p(az) \in F \iff q(az) \notin F$, ami azt jelenti, hogy *nem teljesül* $p\rho_M q$.

Ezzel a lemma bizonyítását befejeztük. □

Eredményeinket összefoglalva egy adott L reguláris nyelvhez a következőképpen határozhatjuk meg az L-et felismerő minimális automatát.

1. Megkonstruálunk egy *tetszőleges* M automatát, amely L-et ismeri fel. (Amennyiben L éppen egy automatával van megadva, akkor vesszük ezt az automatát.)
2. Megkonstruáljuk M összefüggő részét (vagyis elhagyjuk M-ből a kezdőállapotból nem elérhető állapotokat). Legyen az így kapott automata M'.
3. M'-n kiszámoljuk a $\rho_{M'}$ kongruenciát és vesszük az $M'/\rho_{M'}$ automatát.

2.3. Automaták kísérő monoidjai, felismerhető nyelvek jellemzése monoidokkal

Az M automata átmenet monoidját (vagy leképezés monoidját) a következőképpen definiáljuk. Minden $x \in \Sigma^*$ szóhoz rendeljük hozzá az $f_x : Q \to Q$ leképezést, melyet úgy definiálunk, hogy minden $q \in Q$-ra legyen $f_x(q) = qx$. Tekintsük a

$$T_M = \{f_x \,|\, x \in \Sigma^*\}$$

(véges) halmazt és vezessük be rajta a $\cdot$ kétváltozós műveletet úgy, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén legyen $f_x \cdot f_y = f_{xy}$. A $\cdot$ művelet asszociatív, mert minden $x, y, z \in \Sigma^*$-ra

$$(f_x \cdot f_y) \cdot f_z = f_{xy} \cdot f_z = f_{(xy)z} = f_{x(yz)} = f_x \cdot (f_{yz}) = f_x \cdot (f_y \cdot f_z).$$

Ugyancsak könnyen látható, hogy f_ε a T_M egységeleme. Tehát $(T_M, \cdot)$ monoid az f_ε egységelemmel.

2.27. Definíció. A T_M monoidot *M átmenet monoidjának (vagy leképezés monoidjának)* nevezzük.

Most bevezetünk egy másik monoidot.

2.28. Definíció. Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ esetén a Σ^*/θ_L monoidot L *szintaktikus monoidjának nevezzük* és S_L-lel jelöljük.

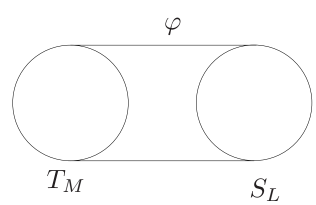
Egy adott M automata esetén szoros kapcsolat van M átmenet monoidja és $L(M)$ szintaktikus monoidja között. Ezt fejezi ki a következő tétel.

2.29. Tétel. *Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ egy automata és $L = L(M)$. Ekkor S_L a T_M homomorf képe. Továbbá, ha M minimális, akkor $S_L \cong T_M$.*

Bizonyítás. a) Vegyük a $\varphi : T_M \to S_L$ leképezést, ahol $\forall x \in \Sigma^*$-ra $\varphi(f_x) = x/\theta_L$. Megmutatjuk, hogy φ szürjektív homomorfizmus. Legyen $x, y \in \Sigma^*$, akkor:

$$\begin{aligned}
\varphi(f_x \cdot f_y) &= \varphi(f_{xy}) && \text{(szorzás } T_M\text{-ben)}\\
&= xy/\theta_L && (\varphi \text{ definíciójából})\\
&= x/\theta_L \cdot y/\theta_L && \text{(szorzás } S_L\text{-ben)}\\
&= \varphi(f_x) \cdot \varphi(f_y) && (\varphi \text{ definíciójából}).
\end{aligned}$$

Tehát φ homomorfizmus. Továbbá, minden $x \in \Sigma^*$-ra: $x/\theta_L \in S_L$ őse $f_x \in T_M$, ezért φ szürjektív.



b) A továbbiakban megmutatjuk, hogy amennyiben M minimális, úgy φ még injektív is (tehát izomorfizmus).

Tegyük fel tehát, hogy M minimális és vegyünk $x, y \in \Sigma^*$ szavakat úgy, hogy $\varphi(f_x) = \varphi(f_y)$. Megmutatjuk, hogy $f_x = f_y$, vagyis, hogy minden $q \in Q$-ra $f_x(q) = f_y(q)$.

Legyen evégett $q \in Q$. Mivel M minimális, tehát összefüggő, van olyan $u \in \Sigma^*$, melyre $q = q_0 u$. Akkor

$$\begin{array}{lll}
 & \varphi(f_x) = \varphi(f_y) & \\
\Longleftrightarrow & x/\theta_L = y/\theta_L & (\varphi \text{ definíciója(}\\
\Longrightarrow & \forall (z \in \Sigma^*) : \big(uxz \in L \iff uyz \in L\big) & (\theta_L \text{ definíciója})\\
\Longleftrightarrow & \forall (z \in \Sigma^*) : \big(q_0(uxz) \in F \iff q_0(uyz) \in F\big) & (\text{mert } L = L(M))\\
\Longleftrightarrow & \forall (z \in \Sigma^*) : \big((q_0ux)z \in F \iff (q_0uy)z \in F\big) & \\
\Longleftrightarrow & q_0ux = q_0uy & (\text{mert } \rho_M \text{ az egyenlőség reláció})\\
\Longleftrightarrow & qx = qy & (\text{mert } q = q_0u)\\
\Longleftrightarrow & f_x(q) = f_y(q) & (f_x \text{ definíciója}).
\end{array}$$

Megjegyezzük, hogy ρ_M azért az egyenlőség reláció, mert M minimális.

Mivel q teteszőleges, azt kaptuk, hogy $f_x = f_y$. Tehát φ injektív. Ezzel a tétel bizonyítását befejeztük. □

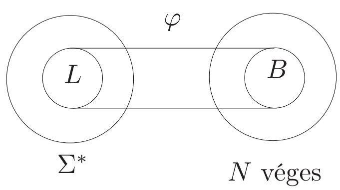
Most megadjuk a felismerhető nyelvek monoidokkal történő jellemzését.

2.30. Tétel. *Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén a következő három állítás ekvivalens:*

(1) L felismerhető.

(2) S_L véges.

(3) Van olyan N véges monoid, $\varphi : \Sigma^* \to N$ homomorfizmus, és $B \subseteq N$, hogy $L = \varphi^{-1}(B)$.



Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2) : Mivel S_L akkor és csak akkor véges, ha θ_L véges indexű, az állítás következik a 2.11. tételből.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Tegyük fel, hogy S_L véges. Legyen $N = S_L = \Sigma^*/\theta_L$ és $B = L/\theta_L$. Továbbá, definiáljuk a $\varphi : \Sigma^* \to \Sigma^*/\theta_L$ leképezést a $\varphi(x) = x/\theta_L$ egyenlettel. Ez a φ homomorfizmus és, mivel θ_L szaturálja L-et (lásd 2.7. lemma), kapjuk, hogy $L = \varphi^{-1}(B)$.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Tegyük fel, hogy van egy véges $(N, \cdot)$ monoid az 1 egységelemmel, egy $\varphi : \Sigma^* \to N$ homomorfizmus és $B \subseteq N$, melyekre $L = \varphi^{-1}(B)$.

Definiáljuk az $M = (N, \Sigma, \delta, 1, B)$ automatát, ahol a δ átmenetfüggvény a következő: minden $q \in N$-re és $a \in \Sigma$-ra, $\delta(q, a) = q \cdot \varphi(a)$. (Ahol $\cdot$ az N-beli kétváltozós művelet.)

Könnyen igazolható, hogy ekkor minden $x \in \Sigma^*$-ra, $\delta^*(q, x) = q \cdot \varphi(x)$ (x hossza szerinti indukció):

- Ha $x = \varepsilon$, akkor $\delta^*(q, \varepsilon) = q = q \cdot 1 = q \cdot \varphi(\varepsilon)$
- Ha $x = ya$, akkor

$$\delta^*(q, ya) = \delta(\delta^*(q, y), a) = \delta(q \cdot \varphi(y), a) = q \cdot \varphi(y) \cdot \varphi(a) = q \cdot \varphi(ya).$$

Végül bebizonyítjuk, hogy $L = L(M)$. Valóban, minden $x \in \Sigma^*$-ra:

$$\begin{array}{llll} x \in L(M) & \Longleftrightarrow & \delta^*(1, x) \in B & \text{(definíció szerint)} \\ & \Longleftrightarrow & 1 \cdot \varphi(x) \in B & \text{(a fenti megjegyzés miatt)} \\ & \Longleftrightarrow & \varphi(x) \in B & \text{(1 egységelem } N\text{-ben),} \end{array}$$

tehát L felismerhető. □

Most adunk egy példát reguláris nyelvek véges monoidokkal történő megadására. Tekintsük az $\mathbb{N}_{100} = \{0, 1, \ldots, 100\}$ halmazt és a $\oplus$ műveletet, ahol

$$a \oplus b = \min(a + b, 100).$$

Könnyű ellenőrizni, hogy a $\oplus$ asszociatív, például

$$(34 \oplus 18) \oplus 96 = 52 \oplus 96 = 100 \text{ és } 34 \oplus (18 \oplus 96) = 34 \oplus 100 = 100,$$

0 pedig egységelem a $\oplus$-ra nonatkozóan, tehát $\mathbb{N}_{100}$ véges monoid.

Legyen továbbá Σ egy ábécé és tekintsük a $\varphi : \Sigma^* \to \mathbb{N}_{100}$ leképezést, ahol $\varphi(x) = \min(|x|, 100)$. Ez a leképezés homomorfizmus, mert

$$\begin{aligned}\varphi(xy) = &\min(|xy|, 100) = \min(|x| + |y|, 100) = \min\big(\min(|x|, 100) + \min(|y|, 100), 100\big) = \\ &\min(|x|, 100) \oplus \min(|y|, 100) = \varphi(x) \oplus \varphi(y).\end{aligned}$$

A 2.30. tételből következik, hogy számok minden $B \subseteq \mathbb{N}_{100}$ halmazára, $\varphi^{-1}(B)$ reguláris nyelv.

További példák:

1. A fenti mintára tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén definiálhatjuk az $(\mathbb{N}_n, \oplus)$ monoidot és a megfelelő $\varphi : \Sigma^* \to \mathbb{N}_n$ homomorfizmust.

2. Mint láttuk, tetszőleges $n \in \mathbb{N}$-re $(\mathbb{N}/\equiv_n)$ véges monoid. Továbbá, például a $\varphi(x) = \overline{|x|}$ egyenlőséggel definiált $\varphi : \Sigma^* \to \mathbb{N}/\equiv_n$ leképezés homomorfizmus. Tehát minden $B \subseteq \mathbb{N}/\equiv_n$-re $\varphi^{-1}(B)$ reguláris nyelv.

2.4. Felismerhető nyelvek jellemzése monadikus másodrendű logikai formulákkal

2.4.1. Bevezetés egy példával

Tekintsük a $\Sigma = \{a, b\}$ ábécét, és tekintsük az $y = x + 1$, a $Q_a(x)$ és $Q_b(x)$ "atomi formulákat". Ezen atomi formulákból a logikában megismert módon (logikai műveletekkel és kvantorokkal) további formulákat építhetünk fel. Például,

$$\varphi_0 = \exists x \exists y (y = x + 1) \quad \text{és} \quad \varphi_1 = \exists x \exists y ((y = x + 1) \wedge Q_a(x) \wedge Q_b(y))$$

ilyen formulák.

Másrészt, minden $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$ szó meghatároz egy

$$\mathcal{A}_w = (\{1, \dots, n\}, y = x + 1, Q_a(x), Q_b(x))$$

struktúrát, ahol az $1, \dots, n$ számok w-beli pozíciókat jelentik, az $y = x + 1$, a $Q_a(x)$ és a $Q_b(x)$ atomi formulákat pedig a következőképpen interpretáljuk az $\{1, \dots, n\}$ halmaz (univerzum) felett:

- minden $i, j \in \{1, \dots, n\}$-re: $y = x + 1$ igaz az (i, j) számpáron, ha $j = i + 1$,

- minden $i \in \{1, \dots, n\}$-re: $Q_a(i)$ igaz, ha $a_i = a$ és $Q_b(i)$ igaz, ha $a_i = b$ (ahol a_i a w i-edik betűje).

Például, a $\Sigma = \{a, b\}$ esetben,

- $\mathcal{A}_{bab} = (\{1, 2, 3\}, y = x + 1, Q_a(x), Q_b(x))$,

- $\mathcal{A}_{ba} = (\{1, 2\}, y = x + 1, Q_a(x), Q_b(x))$,
- $\mathcal{A}_a = (\{1\}, y = x + 1, Q_a(x), Q_b(x))$ alakú.

Ha adott egy φ formula és egy w szó, akkor azt kérdezzük, hogy $\mathcal{A}_w$ struktúra kielégíti-e φ-t, azaz, hogy teljesül-e $\mathcal{A}_w \models \varphi$.

Például, a fenti φ_0 formula esetén, egy $\mathcal{A}_w$ struktúra akkor és csak akkor elégítik ki φ_0-t, ha a w szóban van két egymás után következő pozíció. Így $\mathcal{A}_{bab} \models \varphi_0$ és $\mathcal{A}_{ba} \models \varphi_0$, de $\mathcal{A}_a \not\models \varphi_0$.

Továbbá, egy $\mathcal{A}_w$ struktúra akkor és csak akkor elégíti ki φ_1-et, ha a w szóban van két egymás után következő pozíció, melyek közül az elsőn a, a másodikon pedig b betű van. Ezért $\mathcal{A}_{ba} \not\models \varphi_1$, de $\mathcal{A}_{bab} \models \varphi_1$ és $\mathcal{A}_a \not\models \varphi_1$.

Ezek után keressük az összes olyan w szavak halmazát, melyekre $\mathcal{A}_w$ kielégíti φ-t, vagyis keressük az

$$L_\varphi = \{w \in \Sigma^* \mid \mathcal{A}_w \models \varphi\}, \text{ rövidebben, az } L_\varphi = \{w \in \Sigma^* \mid w \models \varphi\}$$

nyelvet.

Például, az előbb mondottak értelmében

$$L_{\varphi_0} = \{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2\} \text{ és } L_{\varphi_1} = \Sigma^* ab \Sigma^*.$$

Ezért azt mondjuk, hogy a $\{w \in \Sigma^* \mid |w| \geq 2\}$ és a $\Sigma^* ab \Sigma^*$ nyelvek definiálhatók elsőrendű formulával.

Bevezetjük a következő rövidítéseket (makrókat):

- $\mathrm{First}(x)\ :\ \forall y \neg(x = y + 1)$ (vagy $\neg\exists y(x = y + 1)$)
- $\mathrm{Last}(x)\ :\ \forall y \neg(y = x + 1)$ (vagy $\neg\exists y(y = x + 1)$)

Ezeket használva, egy másik példaként, tekintsük a

$$\psi = \exists x \exists y(\mathrm{First}(x) \wedge Q_a(x) \wedge \mathrm{Last}(y) \wedge Q_b(y))$$

formulát. Ezen ψ formulát azok a szavak elégítik ki, melyeknek első betűje a, utolsó betűje b, következésképpen az első betű nem egyezik meg az utolsó betűvel. Az ilyen szavak halmaza az $a\Sigma^*b$ nyelv, tehát $L_\psi = a\Sigma^*b$. Tehát, az $a\Sigma^*b$ nyelv ugyancsak definiálható elsőrendű formulával.

Az $L = \{x \in \Sigma^* \mid\ |x| \text{ páros }\}$ nyelvet nem tudjuk elsőrendű formulákkal definiálni. Szükség van még $X, Y, \ldots$ másodrendű változókra. A másodrendű változók értékei pozíciók halmazai tehát a pozíciók halmaza feletti egyváltozós (monadikus) relációk lehetnek, míg az $x, y, \ldots$ elsőrendű változók értékei továbbra is pozíciók.

Tehát, ha adott egy $\mathcal{A}_w = (\{1, \ldots, n\}, y = x + 1, Q_a(x), Q_b(x))$ struktúra és egy φ formula, amelyben szerepelnek az x, y elsőrendű és az X, Y másodrendű változók, akkor

x, y értékei: $\{1, \ldots, n\}$ elemei,

X, Y értékei: $\{1, \ldots, n\}$ részhalmazai.

Megengedjük továbbá az $x \in Y$ atomi formulát is is, ahol x tetszőleges elsőrendű, Y pedig tetszőleges másodrendű változó. Az $x \in Y$ atomi formula az elsőrendű és a másodrendű változókat kapcsolja össze. Értelemszerűen, az $x \in Y$ formula akkor igaz egy (i, I) párra, ahol $i \in \{1, \dots, n\}$és $I \subseteq \{1, \dots, n\}$, ha $i \in I$.

Mármost az előbbi L nyelvet, vagyis a Σ feletti páros hosszúságú szavak halmazát az alábbi formula definiálja:

$$\begin{aligned}&\exists X(\forall x((\mathrm{First}(x) \to x \in X) \wedge (\mathrm{Last}(x) \to x \notin X)) \wedge \\ &\qquad \forall x \forall y((y = x+1) \to (x \in X \leftrightarrow y \notin X))),\end{aligned}$$

ahol $y \notin X$ a $\neg(y \in X)$ rövidítése. A formula a következőképpen "olvasható ki". Van pozícióknak egy olyan I halmaza, melynek az első pozíció eleme, az utolsó pozíció nem eleme, és bármely két egymás után következő (szomszédos) pozíció közül az egyik benne van, a másik pedig nincs. Ilyen I akkor van, ha a szó hossza páros, tudniillik ekkor I éppen a páratlan számú pozíciók halmaza. Tehát, a páros hosszú szavakból álló nyelv definiálható másodrendű formulával.

Egy további példa: definiáljuk az $x < y$ makrót, ahol $<$ jelentése a szokásos "kisebb" reláció. Ez a következőképpen tehető meg:

- $(x = y) := \forall X(x \in X \leftrightarrow y \in X)$ és $x \neq y := \neg(x = y)$
- $\mathrm{suffix}(X) := \forall x \forall y((x \in X \wedge y = x+1) \to y \in X)$
- $x < y := (x \neq y) \wedge \forall X((\mathrm{suffix}(X) \wedge x \in X) \to y \in X)$.

Tekintsük a

$$\psi = \exists x \exists y \Big((y = x+1) \wedge Q_a(x) \wedge Q_b(y) \wedge \forall z\big((z < x \to Q_a(x)) \wedge (y < z \to Q_b(z))\big)\Big)$$

formulát. Nyilvánvaló, hogy $L_\psi = a^+b^+$.

Felidézzük, hogy ha egy logikában

- nincsenek kvantorok, akkor azt zérusrendű logikának,
- $\forall x, \exists y$ alakú kvantifikálást engedünk meg, ahol x, y változók (melyek értékei a struktúra elemei lehetnek), akkor azt elsőrendű logikának
- $\forall x, \exists y, \forall p, \exists q$ alakú kvantifikálást engedünk meg, ahol x, y változók, p, q pedig predikátumváltozók (melyek értékei a struktúra feletti predikátumok lehetnek), akkor azt másodrendű logikának,
- ugyanazt engedjük meg, mint az előbbi pontban, de a predikátumok csak egyváltozósak lehetnek, akkor azt monadikus másodrendű logikának.

nevezzük. A fenti logika tehát monadikus másodrendű logika, mivel a másodrendű változók a struktúra alaphalmazának részhalazait, vagyis az alaphalmaz feletti egyáltozós relációkat vesznek fel értékül. Ezért a másodrendű változók egyváltozós predikátumszimbólumok.

2.4.2. Az MSO(+1) monadikus másodrendű logika definíciója

Először definiáljuk az MSO logika szintaxisát. Legyen adott egy Σ ábécé.

Változók:

> $V_1 = \{x, y, \dots\}$ az elsőrendű változók halmaza.
>
> $V_2 = \{X, Y, \dots\}$ a másodrendű változók halmaza.

Atomi formulák: $y = x + 1$, $x \in Y$ és minden $a \in \Sigma$-ra $Q_a(x)$, ahol $x, y \in V_1$, $Y \in V_2$.

Formulák:

(i) minden atomi formula egyben formula is.

(ii) ha φ és ψ formulák, akkor $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\exists x\varphi$, $\exists X\varphi$ is formulák.

Rövidítések: $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$, $\forall x\varphi$, $\forall X\varphi$ a szokásos módon. Továbbá, $\neg(y = x + 1)$ helyett $y \neq x + 1$-et, $\neg(x \in Y)$ helyett $x \notin Y$-t írunk.

Megjegyzés:

> Ha a V_2 változóhalmazt, az $x \in X$ relációt és a $\exists X$ kvantifikálást nem engedjük meg, akkor a logika elsőrendű.

Egy adott φ formula esetén a szabad és kötött változók, valamint a kiigazított formula fogalmát ugyanúgy értelmezzük, mint a már ismert predikátumkalkulus esetén. Amennyiben adott egy φ formula, feltehetjük, hogy az kiigazított, vagyis a benne szereplő szabad és kötött változók halmazai diszjunktak és a benne szereplő különböző kvantor előfordulások különböző változókat kötnek le. A szabad változókat nem tartalmazó formulákat zárt formuláknak nevezzük

Most definiáljuk az MSO logika szemantikáját.

2.31. Definíció. Legyenek $W_1 (\subseteq V_1)$ és $W_2 (\subseteq V_2)$ véges változóhalmazok. Egy (W_1, W_2)-*struktúrán* egy

$$w = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_r, S_r, T_r)$$

sorozatot értünk, ahol $a_1, \dots, a_r \in \Sigma$, $S_1, \dots, S_r \subseteq W_1$ és $T_1, \dots, T_r \subseteq W_2$ és a következő feltételek teljesülnek:

$$\bigcup_{i=1}^{r} S_i = W_1,\ \ S_i \cap S_j = \emptyset,\ \text{ha } i \neq j.$$

$\square$

Megjegyezzük, hogy $w \in \Delta^*$, ahol

$$\Delta = \{(a, S, T) \mid a \in \Sigma, S \subseteq W_1, T \subseteq W_2\} = \Sigma \times 2^{W_1} \times 2^{W_2}.$$

Például, ha $\Sigma = \{a, b\}$, $W_1 = \{x, y, z\}$ és $W_2 = \{X, Y\}$, akkor

$$w_1 = (a, \{y\}, \{X, Y\})(b, \emptyset, \{Y\})(a, \{x, z\}, \{X\})$$

és

$$w_2 = (a, \{x\}, \{X\})(b, \emptyset, \emptyset)(a, \{z\}, \{X, Y\})(a, \{y\}, \{Y\})$$

(W_1, W_2)-struktúrák, de

$$w = (a, \{x, y\}, \{X, Y\})(b, \emptyset, \{Y\})(a, \{x, z\}, \{X\})$$

nem az, mert x az első és a harmadik komponensben is szerepel.

Legyen

$$w = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_r, S_r, T_r)$$

egy (W_1, W_2)-struktúra, továbbá legyen $x \in W_1$ és $X \in W_2$. Akkor

- x értéke w-ben azon egyértelműen meghatározott i, melyre $x \in S_i$,
- X értéke w-ben az $\{i \mid X \in T_i\}$ halmaz lesz.

A fenti példában w_1-ben az $x = 3, y = 1, z = 3, X = \{1, 3\}, Y = \{1, 2\}$ míg w_2-ben az $x = 1, y = 4, z = 3, X = \{1, 3\}, Y = \{3, 4\}$ értékeket kapják.

Legyen továbbá φ egy formula, melyre igaz, hogy

- φ elsőrendű szabad változói $\subseteq W_1$ és
- φ másodrendű szabad változói $\subseteq W_2$.

Akkor a feniek értelmében w a φ minden szabad változójához rendel egy értéket. A fenti példát folytatva, tegyük fel, hogy φ egy olyan formula, melynek szabad változói $\{x, y\}$ és $\{X, Y\}$. Akkor x, y illetve X, Y értékei w_1-ben és w_2.ben fent láthatók.

Most már tudjuk definálni, hogy egy w struktúra mikor elégít ki egy φ formulát.

2.32. Definíció. Legyen φ egy formula és legyenek W_1 és W_2 véges változóhalmazok, melynek rendre tartalmazzák φ elsőrendű és másodrendű szabad változóit. Legyen továbbá

$$w = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_r, S_r, T_r)$$

egy (W_1, W_2)-struktúra. A $w \models \varphi$ (azaz a "w kielégíti φ"-t) fogalmát formulaindukcióval definiáljuk:

- $\varphi = (y = x + 1)$ esetén: $w \models \varphi \iff$ van olyan $1 \leq i \leq r - 1$, melyre $x \in S_i$ és $y \in S_{i+1}$
- $\varphi = Q_a(x)$, ahol $a \in \Sigma$ esetén: $w \models \varphi \iff$ van olyan $1 \leq i \leq r$, melyre $x \in S_i$ és $a_i = a$
- $\varphi = x \in X$ esetén: $w \models \varphi \iff$ van olyan $1 \leq i \leq r$, melyre $x \in S_i$ és $X \in T_i$
- $\varphi = \varphi_1 \land \varphi_2$ esetén: $w \models \varphi \iff w \models \varphi_1$ és $w \models \varphi_2$
- $\varphi = \neg\, \varphi_1$ esetén: $w \models \varphi \iff$ nem teljesül $w \models \varphi_1$
- $\varphi = \exists x \varphi_1$ esetén: $w \models \varphi \iff$ van olyan $1 \leq i \leq r$, melyre $w' \models \varphi_1$, ahol $w' = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_i, S_i \cup \{x\}, T_i) \dots (a_r, S_r, T_r)$

- $\varphi = \exists X \varphi_1$ esetén: $w \models \varphi \iff$ van olyan $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le r$, melyre $w' \models \varphi_1$, ahol $w' = (a_1, S_1, T_1') \dots (a_r, S_r, T_r')$ és minden $1 \le j \le r$-re

$$T_j' = \begin{cases} T_j, \text{ ha } j \notin \{i_1, \dots, i_k\} \\ T_j \cup \{X\} \text{ különben.} \end{cases}$$

$\square$

2.33. Definíció. Legyen φ egy formula és legyenek W_1 és W_2 véges változóhalmazok, melynek rendre tartalmazzák φ elsőrendű és másodrendű szabad változóit. Akkor

$$L_\varphi = \{w \mid w \text{ egy } (W_1, W_2)\text{-struktúra és } w \models \varphi\}.$$

$\square$

Nyilvánvalóan $L_\varphi \subseteq \Delta^*$, ahol

$$\Delta = \{(a, S, T) \mid a \in \Sigma, S \subseteq W_1, T \subseteq W_2\} = \Sigma \times 2^{W_1} \times 2^{W_2}.$$

Az is nyilvánvaló, hogy egy adott φ-hez a W_1 és W_2 halmazok többféleképpen is választhatók úgy, hogy tartalmazzák φ elsőrendű és másodrendű szabad változóit. Ezért L_φ függ W_1 és W_2 megválasztásától. Ha viszont φ zárt formula, vagyis nincsenek szabad változói, akkor a $W_1 = W_2 = \emptyset$ választás megfelelő. Ez esetben a (W_1, W_2)-struktúra $w = (a_1, \emptyset, \emptyset) \dots (a_r, \emptyset, \emptyset)$ alakú, ezért azonosítható az $a_1 \dots a_r$ szóval és azt mondhatjuk, hogy $L_\varphi \subseteq \Sigma^*$.

Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvről azt mondjuk, hogy definiálható monadikus másodrendű formulával, ha van olyan φ (zárt monadikus másodrendű formula), melyre $L = L_\varphi$. Azon nyelvek osztályát, melyek a fenti alakú monadikus másodrendű formulákkal definiálhatók, MSO(+1)-gyel jelöljük.

2.4.3. A reguláris nyelvek jellemzése MSO(+1) logikával

2.34. Tétel. *MSO(+1) megegyezik az automatával felismerhető nyelvek osztályával.*

Bizonyítás. a) Felismerhető $\subseteq$ MSO(+1)

Legyen $L = L(M)$, ahol $M = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ determinisztikus automata és $Q = \{q_1, \dots, q_n\}$. Ekkor minden $w \in \Sigma^*$-ra

$w = a_1 \dots a_{|w|} \in L(M) \iff$ az $\{1, \dots, |w|\}$ halmaz partícionálható az $X_1, \dots, X_n$ halmazokba úgy, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok.

(Az $i \in X_j$ tartalmazás, ahol $i = 1, \dots, |w|$, $j = 1, \dots, n$ azt jelenti, hogy M az a_i betű elolvasása előtt a q_j állapotban van.)

1) $\bigcup_{i=1}^{n} X_i = \{1, \dots, |w|\}$.

2) Ha $i \neq j$, akkor $X_i \cap X_j = \emptyset$.

3) $1 \in X_1$.

4) $\forall i = 1, \ldots, |w| - 1$-re, ha $i \in X_j$ és $i + 1 \in X_k$, akkor $\delta(q_j, a_i) = q_k$.

5) Ha $|w| \in X_j$, akkor $\delta(q_j, a_{|w|}) \in F$.

Ezen tulajdonságok leírhatóak a következő $\varphi_1, \ldots, \varphi_5$ monadikus másodrendű formulákkal (ahol használjuk a First(x) és Last(x) makrókat:

1) $\varphi_1 = \forall x\ (x \in X_1 \vee \cdots \vee x \in X_n) = \forall x\ (\bigvee_{1 \le j \le n} x \in X_j)$

2) $\varphi_2 = \forall x\ (\bigwedge_{1 \le j < k \le n} \neg(x \in X_j \wedge x \in X_k))$

3) $\varphi_3 = \forall x\ (\mathrm{First}(x) \to x \in X_1)$

4) $\varphi_4 = \forall x \forall y\ (y = x + 1 \to \bigwedge_{1 \le j,k \le n} ((x \in X_j \wedge y \in X_k) \to \bigvee_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_j, a) = q_k}} Q_a(x)))$

5) $\varphi_5 = \forall x(\mathrm{Last}(x) \to \bigwedge_{1 \le j \le n} (x \in X_j \to \bigvee_{\substack{a \in \Sigma \\ \delta(q_j, a) \in F}} Q_a(x)))$

Legyen $\varphi = \exists X_1 \ldots \exists X_n(\varphi_1 \wedge \cdots \wedge \varphi_5)$. Akkor φ zárt és a fentiek miatt $L_\varphi = L(M)$. Ezzel az egyik irányú tartalmazás bizonyítását befejeztük.

b) MSO$(+1) \subseteq$ Felismerhető

Legyen φ egy formula és legyenek W_1 és W_2 véges változóhalmazok, melyek rendre tartalmazzák φ elsőrendű és másodrendű szabad változóit. Megmutatjuk, hogy L_φ, mint (W_1, W_2)-struktúrákból álló nyelv, felismerhető automatával (vagy ami ezzel ekvivalens: reguláris). A bizonyítást két lépésben adjuk meg.
b1) Legyen K az összes (W_1, W_2)-struktúrákból álló nyelv, azaz legyen

$$K = \{w \mid w \text{ egy } (W_1, W_2)\text{-struktúra } \}.$$

Először bebizonyítjuk, hogy K felismerhető automatával. Mint láttuk $K \subseteq \Delta^*$, ahol $\Delta = \Sigma \times 2^{W_1} \times 2^{W_2}$, ezért a K-t felismerő automata input szimbólumainak halmaza Δ lesz. Továbbá, Δ^* egy

$$w = (a_1, S_1, T_1) \ldots (a_r, S_r, T_r)$$

eleme akkor fog K-ba tartozni, ha betűinek középső komponensei teljesítik az 2.31. definícióban előírt feltételeket. Az pedig, hogy w-nek megvan-e az 2.31. definícióban leírt tulajdonsága, könnyen ellenőrizhető egy véges automatával.
Valóban, legyen $M = (Q, \Delta, \delta, q_0, F)$, ahol

- $Q = 2^{W_1} \cup \{c\}$ (ahol c csapda állapot lesz),

- $q_0 = \emptyset$,

- $F = \{W_1\}$,
- minden $S \subseteq W_1$, $(a, S', T') \in \Delta$ esetén,

$$\delta(S, (a, S', T')) = \begin{cases} S \cup S' & \text{ha } S \cap S' = \emptyset \\ c & \text{különben.} \end{cases}$$

A c csapda állapotot minden input szimbólum önmagába viszi. Nyilvánvaló, hogy ekkor $L(M) = K$, tehát K felismerhető.

b2) Megmutatjuk, hogy minden φ-re L_φ felismerhető. φ szerinti formulaindukcióval bizonyítunk.

- Ha $\varphi = Q_a(x)$, akkor $L_\varphi = K \cap \Delta^* \{(a, S, T) \in \Delta \mid x \in S\} \Delta^*$, tehát L_φ felismerhető, mivel felismerhető nyelvekből állítottuk elő reguláris műveletek alkalmazásával.
- Ha $\varphi = (y = x + 1)$, akkor

  $$L_\varphi = K \cap \Delta^* \ \{(a, S, T)(a', S', T') \in \Delta^2 \mid x \in S, y \in S'\} \ \Delta^*.$$

- Ha $\varphi = x \in X$, akkor $L_\varphi = K \cap \Delta^* \ \{(a, S, T) \in \Delta \mid x \in S, X \in T\} \ \Delta^*$.
- Ha $\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$, akkor $L_\varphi = L_{\varphi_1} \cap L_{\varphi_2}$.
- Ha $\varphi = \neg \ \varphi_1$, akkor $L_\varphi = K - L_{\varphi_1}$.
- Ha $\varphi = \exists x \varphi_1$, akkor állításunk a következőképpen látható be. Egy $w = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_r, S_r, T_r)$ (W_1, W_2)-struktúra esetén $w \models \varphi$ akkor és csak akkor teljesül, ha van olyan $1 \leq i \leq r$, hogy a

  $$w' = (a_1, S_1, T_1) \dots (a_i, S_i \cup \{x\}, T_i) \dots (a_r, S_r, T_r),$$

  $(W_1 \cup \{x\}, W_2)$-struktúrára teljesül $w' \models \varphi_1$. Ezért $L_\varphi = h(L_{\varphi_1})$, ahol $h : \Delta^* \to \Delta^*$, a következő egyenlőséggel definiált betű-betű homomorfizmus: minden $(a, S, T) \in \Delta$ esetén

  $$h((a, S, T)) = (a, S - \{x\}, T).$$

  (Megjegyezzük, hogy amennyiben $x \notin S$, akkor persze $h((a, S, T)) = (a, S, T)$.) Az indukciós feltevés miatt L_{φ_1} reguláris nyelv. Továbbá, könnyen bizonyítható, hogy a reguláris nyelvek zártak a betű-betű homomorfizmusra. Tehát L_φ is reguláris nyelv lesz.

- Ha $\varphi = \exists X \varphi_1$, akkor az előző ponthoz hasonlóan kapjuk, hogy $L_\varphi = h(L_{\varphi_1})$, ahol h a következő egyenlőséggel definiált betű-betű homomorfizmus: minden $(a, S, T) \in \Delta$ esetén

  $$h((a, S, T)) = (a, S, T - \{X\}).$$

$\square$

Egy φ monadikus másodrendű formulát egzisztenciálisnak nevezünk, ha $\varphi = \exists X_1 \dots \exists X_n \psi$ és a ψ-ben szereplő másodrendű változók valamennyi előfordulása szabad.

2.35. Következmény. L felismerhető $\iff$ definiálható egzisztenciális monadikus másodrendű formulával.

Bizonyítás.

"$\Rightarrow$" Az 2.34. tétel bizonyításának a) részében lényegében ezt bizonyítottuk, mivel az ott megkonstruált φ egzisztenciális formula.

"$\Leftarrow$" Ugyanezen tétel b) részében ennél többet bizonyítottunk, mert az állítást tetszőleges monadikus másodrendű formulára igazoltuk. $\square$

Megjegyezzük, hogy ha az $y = x+1$ relációnál többet is megengedünk, akkor könnyen kiléphetünk a reguláris nyelvekből. Engedjük meg például a

$$\varrho(x, y, z) = (x + y = z)$$

relációt és legyen $\Sigma = \{a, b\}$. Ekkor a $\psi(x) = \forall z(Last(z) \rightarrow \varrho(x, x, z))$ formulát egy w szó egy x pozíciója pontosan akkor elégíti ki, ha x értéke a szó hosszának a fele. Legyen

$$\chi = \exists x(\psi(x) \wedge \forall y((y \leq x) \rightarrow Q_a(y)) \wedge ((x < y) \rightarrow Q_b(y))).$$

Akkor $L_\chi = \{a^n b^n |\ n \geq 1\}$, ami nem felismerhető nyelv!

2.5. Reguláris nyelvek jellemzései (összefoglalás)

Összefoglalásként felsoroljuk reguláris nyelvek osztályának az eddig megismert jellemzéseit.

1) determinisztikus automata
2) nemdeterminisztikus automata
3) nemdeterminisztikus automata ε-átmenettel
4) reguláris kifejezés
5) 3 típusú nyelvtan
6) 3 típusú nyelvtan $A \rightarrow aB$ és $A \rightarrow \varepsilon$ szabályokkal
7) véges indexű jobbkongruencia
8) ρ_L véges indexű
9) véges indexű kongruencia
10) θ_L véges indexű
11) $\exists M$ véges monoid, $B \subseteq M$, $\varphi: \Sigma^* \rightarrow M$ homomorfizmus, melyre $L = \varphi^{-1}(B)$
12) definiálható MSO(+1)-ben
13) definiálható MSO(+1)-ben egzisztenciális formulával

2.6. Szekvenciális gépek

Ebben a részben olyan automatákkal (szekvenciális gépekkel) fogunk foglalkozni, melyeket kimenettel láttunk el, ily módon ezek egy $\varphi:\ \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezést fognak megvalósítani. A szekvenciális gépek állapothalmaza nem lesz mindig véges. Amennyiben csak véges állapothalmazt engedünk meg, azt mindig kihangsúlyozzuk.

A következőkben definiáljuk a Mealy gép és a Moore gép fogalmát valamint az ezen gépekkel indukálható Σ^*-ból Δ^*-ba történő leképezések fogalmát.

2.6.1. Mealy gépek, Moore gépek és az általuk indukált leképezések

2.36. Definíció. Mealy gépnek nevezünk egy $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ rendszert, ahol

- Q egy megszámlálható halmaz, az állapothalmaz,
- Σ és Δ az input és az output ábécék,
- $\delta:\ Q \times \Sigma \to Q$ az átmenetfüggvény,
- $\lambda:\ Q \times \Sigma \to \Delta$ a kimenetfüggvény.

Amennyiben Q véges, M-et véges Mealy gépnek nevezzük.

Azt, hogy valamely $p, q \in Q$-ra, $a \in \Sigma$-ra és $b \in \Delta$-ra $\delta(q, a) = p$ és $\lambda(q, a) = b$, a következő ábrával szemléltetjük:

$$q \xrightarrow{a/b} p$$

míg M viselkedését egy $x = a_1 \ldots a_n$ input szó hatására a q állapotból indulva így ábrázolhatjuk:

$$q = q_0 \xrightarrow{a_1/b_1} q_1 \quad \cdots \quad q_{n-1} \xrightarrow{a_n/b_n} q_n$$

Az M *által* q*-ban indukált* $\lambda_q:\ \Sigma^* \to \Delta^*$ *leképezést* a következőképpen definiáljuk:

- $\lambda_q(\varepsilon) = \varepsilon \qquad (\varepsilon$ az üres szó)
- $\lambda_q(xa) = \lambda_q(x)\lambda(qx, a)$.

Tehát az ábrán $\lambda_q(x) = b_1 \ldots b_n$. □

Az y hossza szerinti indukcióval bizonyítható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\lambda_q(xy) = \lambda_q(x)\lambda_{qx}(y)$.

2.37. Definíció. Moore gépnek nevezünk egy $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ rendszert, ahol

- Q, Σ, Δ és δ ugyanaz, mint a Mealy gép esetén,
- $\mu:\ Q \to \Delta$ a jelfüggvény.

Amennyiben Q véges, M-et véges Moore gépnek nevezzük. □

Most M viselkedését egy $x = a_1 \dots a_n$ input szó hatására a q állapotból indulva így ábrázolhatjuk:

$$\begin{tikzcd} q = q_0 \arrow[r, "a_1"] & q_1 \arrow[d] & \cdots & q_{n-1} \arrow[r, "a_n"] \arrow[d] & q_n \arrow[d] \\ & \mu(q_1) = b_1 & & \mu(q_{n-1}) = b_{n-1} & \mu(q_n) = b_n \end{tikzcd}$$

Az M *által q-ban indukált* $\mu_q : \Sigma^* \to \Delta^*$ *leképezést* pedig a következőképpen definiáljuk:

- $\mu_q(\varepsilon) = \varepsilon$
- $\mu_q(xa) = \mu_q(x)\mu(q(xa))$.

Tehát az ábrán $\mu_q(x) = b_1 \dots b_n$. □

A Mealy gépekhez hasonlóan, minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\mu_q(xy) = \mu_q(x)\mu_{qx}(y)$.

2.38. Definíció. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek.

1) Egy $\varphi : Q \to Q'$ leképezés homomorfizmus M-ből M'-be, ha $\forall q \in Q,\ a \in \Sigma$ esetén:

- $\varphi(\delta(q, a)) = \delta'(\varphi(q), a)$
- $\lambda(q, a) = \lambda'(\varphi(q), a)$

Ha φ ráképezés, akkor M' az M homomorf képe. Ha M' az M homomorf képe és φ még injektív is (tehát bijekció), akkor M és M' izomorfak, jele $M \cong M'$.

Ha φ homomorfizmus M-ből M'-be, akkor egy $x = a_1 \dots a_n$ input szó hatására M és M' a következőképpen működnek:

$$\begin{tikzcd} M & q_0 \arrow[r, "a_1/b_1"] \arrow[d] & q_1 \arrow[d] & \cdots & q_{n-1} \arrow[r, "a_n/b_n"] \arrow[d] & q_n \arrow[d] \\ M' & \varphi(q_0) \arrow[r, "a_1/b_1"] & \varphi(q_1) & \cdots & \varphi(q_{n-1}) \arrow[r, "a_n/b_n"] & \varphi(q_n) \end{tikzcd}$$

2) Legyen $\rho \subseteq Q \times Q$ ekvivalenciareláció. ρ kongruencia az M-en, ha minden $p, q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén:

- $p\,\rho\,q \Rightarrow \delta(p,a)\,\rho\,\delta(q,a)$
- $p\,\rho\,q \Rightarrow \lambda(p,a) = \lambda(q,a)$

3) Ha ρ kongruencia az M-en, akkor M-nek a ρ által meghatározott faktorgépe az $M/\rho = (Q/\rho, \Sigma, \Delta, \delta_\rho, \lambda_\rho)$ Mealy gép, ahol minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén:

- $\delta_\rho(q/\rho, a) = \delta(q,a)/\rho$
- $\lambda_\rho(q/\rho, a) = \lambda(q,a)$.

□

A következő tétel bizonyítását csak vázlatosan közöljük.

2.39. Tétel. *Ha $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép, ρ pedig egy kongruenciareláció M-en, akkor M/ρ az M homomorf képe.*

Bizonyítás. A $\varphi(q) = q/\rho$ egyenlet által definiált $\varphi : Q \to Q/\rho$ típusú leképezés homomorfizmus lesz. Valóban,

$$\varphi(\delta(q,a)) = \delta(q,a)/\rho = \delta_\rho(q/\rho, a) = \delta_\rho(\varphi(q), a)$$

és

$$\lambda(q,a) = \lambda_\rho(q/\rho, a) = \lambda_\rho(\varphi(q), a).$$

□

2.6.2. Gépek ekvivalenciája

Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy a Mealy gépekkel megvalósítható leképezések osztálya megegyezik a Moore gépekkel megvalósítható leképezések osztályával.

2.40. Definíció. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek.

1) M egy $p \in Q$ állapota ekvivalens M' egy $q \in Q'$ állapotával, jele $p \sim q$, ha $\lambda_p = \lambda'_q$.

2) M és M' ekvivalensek, jele $M \sim M'$, ha bármelyiknek bármely p állapota ekvivalens a másik egy q állapotával. Más szóval, M és M' ekvivalensek, ha

$$\{\lambda_p \mid p \in Q\} = \{\lambda'_q \mid q \in Q'\}.$$

A Moore gépek ekvivalenciája valamint egy Mealy gép és egy Moore gép ekvivalenciája is hasonlóan definiálható. □

2.41. Tétel. *Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek és legyen M' az M egy homomorf képe. Akkor M és M' ekvivalensek.*

Bizonyítás. Legyen $\varphi : Q \to Q'$ az M-nek egy homomorfizmusa M'-re. Megmutatjuk, hogy minden $q \in Q$ állapot ekvivalens $\varphi(q)$-val, azaz minden $x \in \Sigma^*$-ra $\lambda_q(x) = \lambda'_{\varphi(q)}(x)$. Legyen evégett $x = a_1 \ldots a_n$ tetszőleges szó. Akkor:

$$\begin{tikzcd}
M & q = q_0 \arrow[r, "a_1/b_1"] \arrow[d] & q_1 \arrow[d] & \cdots & q_{n-1} \arrow[r, "a_n/b_n"] \arrow[d] & q_n \arrow[d] \\
M' & \varphi(q_0) \arrow[r, "a_1/b_1"] & \varphi(q_1) & \cdots & \varphi(q_{n-1}) \arrow[r, "a_n/b_n"] & \varphi(q_n)
\end{tikzcd}$$

tehát $\lambda_q(x) = b_1 \dots b_n$ és $\lambda'_{\varphi(q)}(x) = b_1 \dots b_n$, azaz $q \sim \varphi(q)$. Másrészt M' minden $p \in Q'$ állapotához van olyan $q \in Q$, hogy $p = \varphi(q)$, tehát $p \sim q$. □

2.42. Következmény. Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép és ρ kongruencia M-en. Ekkor M és M/ρ ekvivalensek.

Bizonyítás. A 2.39. tétel miatt M/ρ az M homomorf képe és így a 2.41. tétel miatt M és M/ρ ekvivalensek. □

Szükségünk lesz a következő lemmára.

2.43. Lemma. 1) Legyenek $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek, $p \in Q$ és $q \in Q'$. Ha $p \sim q$, akkor minden $a \in \Sigma$ esetén $\delta(p, a) \sim \delta'(q, a)$.

2) (Ugyanaz egy Mealy gépre és egy Moore gépre.) Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy Mealy gép és $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \mu)$ Moore gép, $p \in Q$ és $q \in Q'$. Ha $p \sim q$, akkor minden $a \in \Sigma$ esetén $\delta(p, a) \sim \delta'(q, a)$.

Bizonyítás. Először 1)-et bizonyítjuk. Indirekt bizonyítást adunk: tegyük fel, hogy $p \sim q$ és van olyan $a \in \Sigma$, melyre $\delta(p, a) \not\sim \delta'(q, a)$. Mivel $p \sim q$,

$$\lambda(p, a) = \lambda_p(a) = \lambda'_q(a) = \lambda'(q, a) = b.$$

Továbbá, mivel $\delta(p, a) \not\sim \delta'(q, a)$, van olyan $x \in \Sigma^*$, hogy $\lambda_{\delta(p,a)}(x) = y$, $\lambda'_{\delta'(q,a)}(x) = y'$ és $y \neq y'$. A kettőt összevetve kapjuk:

$$p \xrightarrow{a/b} \delta(p, a) \xrightarrow{x/y} r$$

$$q \xrightarrow{a/b} \delta'(q, a) \xrightarrow{x/y'} r'$$

Ez ellentmondás, mert $by \neq by'$, tehát $p \not\sim q$.

2) bizonyítása hasonlóan végezhető el. □

2.44. Tétel. *Minden $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy géphez van vele ekvivalens $N = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \mu)$ Moore gép.*

Bizonyítás. Adjuk meg az N Moore gépet a következőképpen:

- $Q' = Q \cup Q \times \Sigma$,

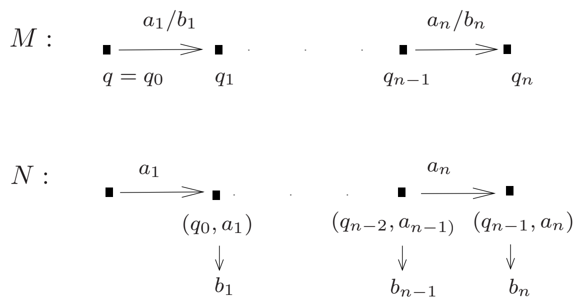
- minden $q \in Q', a \in \Sigma$ esetén

$$\delta'(q,a) = \begin{cases} (q,a) & \text{ha } q \in Q \\ (\delta(p,b),a) & \text{ha } q = (p,b) \end{cases}$$

- minden $q \in Q'$-ra

$$\mu(q) = \begin{cases} \text{tetszőleges } b \in \Delta & \text{ha } q \in Q \\ \lambda(p,b) & \text{ha } q = (p,b) \end{cases}$$

Megmutatjuk, hogy M valóban ekvivalens N-nel. Először megmutatjuk, hogy minden $q \in Q$ állapot ekvivalens q-val, mint Q'-beli állapottal. Valóban, tetszőleges $x = a_1 \dots a_n$ szó esetén $\lambda_q(x) = \mu_q(x)$, mint ahogy az alábbi ábra mutatja:



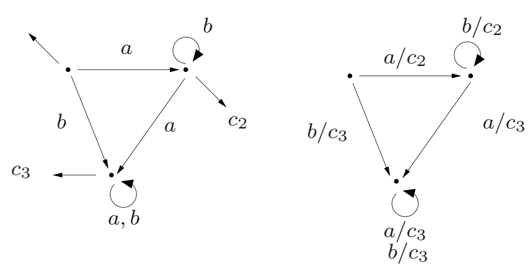
Legyen most $q \in Q'$.

- Ha $q \in Q$ is teljesül, akkor, mint már láttuk, $q \sim q$.
- Ha $q = (p,a)$, ahol $p \in Q$, akkor (p,a) megadható N-ben $\delta'(p,a) = (p,a)$ alakban, ahol $p \in Q$. Az előbb láttuk, hogy p, mint Q-beli elem ekvivalens p-vel, mint Q'-beli elemmel. Továbbá, a 2.43. lemma 2) állítása miatt $\delta'(p,a) = (p,a) \in Q'$ ekvivalens lesz $\delta(p,a) \in Q$-val. Tehát $(p,a) \sim \delta(p,a)$. □

2.45. Tétel. *Minden Moore géphez van vele ekvivalens Mealy gép.*

Bizonyítás. Tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore géphez hozzárendeljük az $M' = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gépet, ahol $\lambda(q,a) = \mu(\delta(q,a))$. Könnyen belátható, hogy M tetszőleges $q \in Q$ állapota ekvivalens lesz M'-nek a $q \in Q'$ állapotával. Tehát M és M' ekvivalensek. □

A 2.45. tételben szereplő konstrukciót az alábbi ábrán szemléltetjük.



M Moore-gép $\qquad$ M' Mealy-gép

A 2.44. és a 2.45. tételeket összefoglalva a következő állítást fogalmazhatjuk meg.

2.46. Tétel. *A Mealy gépekkel indukálható leképezések osztálya megegyezik a Moore gépekkel indukálható leképezések osztályával.*

2.6.3. Automata leképezések és véges automata leképezések

2.47. Definíció. Egy $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezést *automata leképezésnek* nevezünk, ha $\forall x, y \in \Sigma^*$-ra:

a) $|\alpha(x)| = |x|$ (α hossztartó)

b) $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha_x(y)$, ahol $\alpha_x : \Sigma^* \to \Delta^*$, α-tól és x-től függő leképezés (α prefixtartó).

□

Megjegyezzük, hogy a) miatt $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$, tehát b) miatt minden $x \in \Sigma^*$-ra $\alpha(x) = \alpha(\varepsilon x) = \alpha(\varepsilon)\alpha_\varepsilon(x) = \alpha_\varepsilon(x)$. Következésképpen $\alpha = \alpha_\varepsilon$.

2.48. Tétel. *Tetszőleges $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezésre a következő két állítás ekvivalens.*

(1) α automata leképezés (tehát bír az a) és b) tulajdonságokkal)

(2) van olyan $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ (nem feltétlenül véges) Mealy gép és $q \in Q$, melyre $\alpha = \lambda_q$.

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1): Legyen $\alpha = \lambda_q$, ahol $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy (nem feltétlenül véges) Mealy gép és $q \in Q$ egy állapot. Nyilvánvaló az, hogy λ_q hossztartó, lásd 2.36. definíció 1) rész. Másrészt, y hossza szerinti indukcióval igazolható, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$-ra

$$\lambda_q(xy) = \lambda_q(x)\lambda_{qx}(y)$$

és így

$$\alpha(xy) = \lambda_q(xy) = \lambda_q(x)\lambda_{qx}(y) = \alpha(x)\alpha_x(y),$$

ahol $\alpha_x = \lambda_{qx}$, vagyis α prefixtartó is.

(1) $\Rightarrow$ (2): Megfordítva, legyen α egy automata leképezés. Először bebizonyítjuk a következőt.

Állítás. Minden $x, y, z \in \Sigma^*$-ra $|\alpha_x(y)| = |y|$ (tehát α_x is hossztartó) és $\alpha_x(yz) = \alpha_x(y)\alpha_{xy}(z)$ (tehát α_x is prefixtartó).

Az állítás bizonyítása. Az $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha_x(y)$ egyenletből kapjuk, hogy $|\alpha(xy)| = |\alpha(x)| + |\alpha_x(y)|$. Mivel α hossztartó, $|\alpha(xy)| = |xy| = |x| + |y|$ és $|\alpha(x)| = |x|$, tehát $|\alpha_x(y)| = |\alpha(y)| = |y|$.

Továbbá, a b) tulajdonság miatt $\alpha(xyz) = \alpha(x)\alpha_x(yz)$. Másrészt, ugyancsak a b) tulajdonság miatt $\alpha(xyz) = \alpha(xy)\alpha_{xy}(z) = \alpha(x)\alpha_x(y)\alpha_{xy}(z)$. Az egyenletek jobb oldalait egyenlővé téve, majd az $\alpha(x)$ szóval egyszerűsítve kapjuk, hogy $\alpha_x(yz) = \alpha_x(y)\alpha_{xy}(z)$. Ezzel az állítást bebizonyítottuk.

Most megadjuk azt a (nem feltétlenül véges) Mealy gépet, mely egy alkalmas állapotában α-t indukálja. Legyen ez $M_\alpha = (Q_\alpha, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$, ahol

- $Q_\alpha = \{\alpha_x \mid x \in \Sigma^*\}$,
- minden $\alpha_x \in Q_\alpha$-ra és $a \in \Sigma$-ra $\delta(\alpha_x, a) = \alpha_{xa}$,
- minden $\alpha_x \in Q_\alpha$-ra és $a \in \Sigma$-ra $\lambda(\alpha_x, a) = \alpha_x(a)$.

Először is megjegyezzük, hogy δ valóban függvény, ugyanis, ha $\alpha_x = \alpha_y$, akkor minden $a \in \Sigma$-ra $\alpha_{xa} = \alpha_{ya}$. Valóban, a fenti állítás miatt, minden $z \in \Sigma^*$-ra

$$\alpha_x(az) = \alpha_x(a)\alpha_{xa}(z) \quad \text{és} \quad \alpha_y(az) = \alpha_y(a)\alpha_{ya}(z).$$

Mivel $\alpha_x(a) = \alpha_y(a)$, kapjuk, hogy $\alpha_{xa}(z) = \alpha_{ya}(z)$.

Másodszor, megmutatjuk, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$-ra $\lambda_{\alpha_x}(y) = \alpha_x(y)$. Ezt $|y|$ szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $y = \varepsilon$, akkor definíció szerint $\lambda_{\alpha_x}(\varepsilon) = \varepsilon$ és, mivel α_x hossztartó, $\alpha_x(\varepsilon) = \varepsilon$. Az indukciós lépés:

$$\begin{aligned}
& \lambda_{\alpha_x}(ya) \\
= \; & \lambda_{\alpha_x}(y)\lambda(\alpha_x y, a) \\
& \text{(a } \lambda_{\alpha_x} \text{ leképezés definíciója)} \\
= \; & \lambda_{\alpha_x}(y)\lambda(\alpha_{xy}, a) \\
& (\delta^*(\alpha_x, y) = \alpha_{xy}, \text{ bizonyítás } |y| \text{ szerinti indukcióval}) \\
= \; & \alpha_x(y)\lambda(\alpha_{xy}, a) \\
& \text{(indukciós feltevés)} \\
= \; & \alpha_x(y)\alpha_{xy}(a) \\
& (\lambda \text{ definíciója}) \\
= \; & \alpha_x(ya) \\
& \text{(az állítás miatt)}
\end{aligned}$$

Tehát $\lambda_{\alpha_\varepsilon}(x) = \alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x)$, vagyis M_α az α_ε állapotban α-t indukálja. □

Az $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ és $\beta : \Delta^* \to \Gamma^*$ leképezések $(\alpha \cdot \beta) : \Sigma^* \to \Gamma^*$ *kompozícióját* a következőképpen definiáljuk. Minden $x \in \Sigma^*$-ra,

$$(\alpha \cdot \beta)(x) = \beta(\alpha(x)).$$

Ha nem okoz félreértést, akkor $(\alpha \cdot \beta)$ helyett $\alpha \cdot \beta$-t írunk. (Két leképezés kompozíciója a leképezések "egymás után" történő alkalmazását jelenti.) Érvényes a következő tétel.

2.49. Tétel. *Az automata leképezések zártak a kompozícióra.*

Bizonyítás. Legyenek $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ és $\beta : \Delta^* \to \Gamma^*$ automata leképezések. Akkor

a) $|(\alpha \cdot \beta)(x)| = |\beta(\alpha(x))| = |\alpha(x)| = |x|$, ahol a második és harmadik egyenlőségnél kihasználtuk, hogy mind β, mind α hossztartó. Tehát $\alpha \cdot \beta$ is hossztartó.

b)

$$\begin{aligned}
&(\alpha \cdot \beta)(xy) = \beta(\alpha(xy)) = \beta(\alpha(x)\alpha_x(y)) = \\
&\beta(\alpha(x))\beta_{\alpha(x)}(\alpha_x(y)) = (\alpha \cdot \beta)(x)(\alpha_x \cdot \beta_{\alpha(x)})(y),
\end{aligned}$$

ahol kihasználtuk, hogy mind α, mind β prefixtartó. Kaptuk, hogy $\alpha \cdot \beta$ is prefixtartó az $(\alpha \cdot \beta)_x = (\alpha_x \cdot \beta_{\alpha(x)})$ leképezések mellett.

□

A fenti tételből, valamint a 2.48. Tételből következik, hogy ha veszünk két Mealy gépet, az M-et és M'-t, azok p és q állapotait, akkor mindig megadható egy harmadik M'' Mealy gép és annak egy r állapota úgy, hogy

$$\lambda_p \cdot \lambda'_q = \lambda''_r,$$

vagyis a két gép egymás utáni alkalmazása mindig helyettesíthető egy harmadik géppel.

A következőkben megmutatjuk, hogy a 2.48. Tételben definiált M_α Mealy gép bizonyos értelemben minimális az α-t indukáló Mealy gépek között.

2.50. Lemma. Legyen $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ automata leképezés és tegyük fel, hogy $\alpha = \lambda'_q$ valamely $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gép és $q \in Q'$ esetén. Tegyük fel továbbá, hogy M' q-összefüggő, vagyis $Q' = \{qx \mid x \in \Sigma^*\}$. Akkor M_α az M' homomorf képe, ahol

$$M_\alpha = (Q_\alpha, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$$

a 2.48. Tételben definiált Mealy gép.

Bizonyítás. Megjegyezzük, hogy az $\alpha = \lambda'_q$ feltételből következik, hogy $\alpha_x = \lambda'_{qx}$ minden $x \in \Sigma^*$-re (lásd a 2.48. Tétel bizonyítását).

Legyen $\varphi : Q' \to Q_\alpha$ azon leképezés, melyre minden $x \in \Sigma^*$-re $\varphi(qx) = \alpha_x$. A definíció korrekt, mivel ha $qx = qy$, akkor $\lambda'_{qx} = \lambda'_{qy}$ és így $\varphi(qx) = \alpha_x = \alpha_y = \varphi(qy)$. Nyilvánvaló, hogy φ szürjektív. Továbbá, minden $a \in \Sigma$-ra

$$\varphi(\delta'(qx, a)) = \varphi(qxa) = \alpha_{xa} = \delta(\alpha_x, a) = \delta(\varphi(qx), a)$$

és

$$\lambda'(qx, a) = \lambda'_{qx}(a) = \alpha_x(a) = \lambda(\alpha_x, a) = \lambda(\varphi(qx), a),$$

tehát φ homomorfizmus. □

A következőkben azzal foglalkozunk, hogy egy automata leképezés mely feltételek mellett lesz egyben véges automata leképezés is. Először megadjuk a véges automata leképezés definícióját.

2.51. Definíció. Egy $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezést *véges automata leképezésnek* nevezünk, ha van olyan véges $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép és $q \in Q$, hogy $\alpha = \lambda_q$, azaz $\forall x \in \Sigma^*$-ra $\alpha(x) = \lambda_q(x)$.

□

A 2.48. tételből azonnal adódik a következő észrevétel.

2.52. Következmény. Minden véges automata leképezés egyben automata leképezés is.

A következő két tételben jellemezzük azokat az automata leképezéseket, amelyek egyben véges automata leképezések is.

2.53. Tétel. *Tetszőleges $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ leképezésre, a következő két állítás ekvivalens.*

(1) α véges automata leképezés.

(2) α automata leképezés és az $\{\alpha_x \mid x \in \Sigma^*\}$ halmaz véges.

Bizonyítás. *1. lépés:* (1) $\Rightarrow$ (2). A 2.52. következmény szerint α automata leképezés is.

Annak bizonyítására, hogy az $\{\alpha_x \mid x \in \Sigma^*\}$ halmaz véges, tegyük fel, hogy az $M' = (Q', \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ véges Mealy gép valamely $q \in Q'$ állapotára teljesül, hogy $\alpha = \lambda'_q$. Azt is feltehetjük, hogy M' ezen q-ra nézve összefüggő. Akkor a 2.50. Lemma szerint M_α az M' homomorf képe ezért a Q_α halmaz is véges.

2. lépés: (2) $\Rightarrow$ (1). Vegyük az 2.48. tételben szereplő M_α Mealy gépet. Mint láttuk, M_α az α_ε állapotában α-t indukálja. Másrészt, feltételünk szerint, Q_α véges, tehát α véges automata leképezés.

$\square$

A következőkben egy másik feltételt is adunk arra, hogy egy automata leképezés mikor lesz egyben véges automata leképezés is.

Jelölés: Legyen $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ automata leképezés.

- Minden $x \in \Sigma^+$-ra $\overline{\alpha(x)}$ az $\alpha(x)$ utolsó betűje. ($\overline{\alpha(x)} \in \Delta$)
- Minden $b \in \Delta$-ra $L_b = \{x \in \Sigma^+ \mid \overline{\alpha(x)} = b\}$.

(Megjegyezzük, hogy $\bigcup_{b \in \Delta} L_b = \Sigma^+$.)

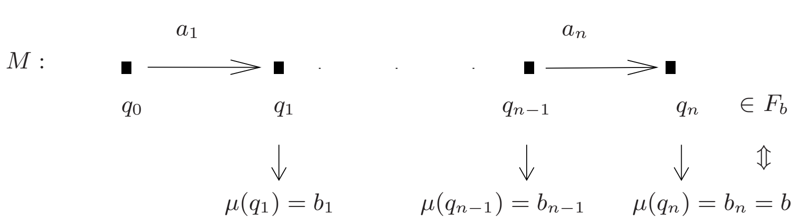
2.54. Tétel. *Legyen $\alpha : \Sigma^* \to \Delta^*$ egy leképezés. A következő két állítás ekvivalens.*

1) α véges automata leképezés

2) α automata leképezés és $\forall b \in \Delta$-ra az L_b nyelv reguláris.

Bizonyítás. 1) $\Rightarrow$ 2): Mint már láttuk, ha α véges automata leképezés, akkor automata leképezés is.

A 2.44. tétel miatt feltehetjük, hogy van egy olyan $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ véges Moore-gép és $q_0 \in Q$, melyre $\alpha = \mu_{q_0}$. Definiáljuk minden $b \in \Delta$-ra az $N_b = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F_b)$ automatát, ahol $F_b = \{q \in Q \mid \mu(q) = b\}$. Tehát N_b olyan Σ^+-beli szavakat ismer fel, amelyekre M outputjának utolsó betűje b és esetleg még az ε szót, amennyiben $\mu(q_0) = b$. Így $L_b = L(N_b) - \{\varepsilon\}$, vagyis L_b felismerhető.



2) $\Rightarrow$ 1): Erre két bizonyítást is adunk.

1. bizonyítás: $\forall b \in \Delta$-ra legyen ρ_b egy véges indexű jobbkongruencia, ami szaturálja L_b-t (az 2.11. tétel miatt van ilyen) és legyen $\rho = \bigcap_{b\in\Delta} \rho_b$. Mivel valamennyi ρ_b véges indexű jobbkongruencia, ρ is is az lesz és $\forall b$-re $\rho \subseteq \rho_b$. Legyen $M = (\Sigma^*/\rho, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore-gép, melyre minden $x \in \Sigma^*$ és $a \in \Sigma$ esetén:

- $\delta(x/\rho, a) = xa/\rho$
- $\mu(x/\rho) = \begin{cases} \text{tetszőleges, ha } x \in \varepsilon/\rho \\ \overline{\alpha(x)} \text{ különben.} \end{cases}$

(Megjegyezzük, hogy M állapotai x/ρ alakúak, ahol $x \in \Sigma^*$.)

Az, hogy δ jóldefiniált, abból következik, hogy ρ jobbkongruencia. Ugyanakkor, μ is jóldefiniált, ami a következőképpen látható be. Ha $x/\rho = y/\rho$, akkor minden $b \in \Delta$-ra $x/\rho_b = y/\rho_b$. Továbbá, mivel $\bigcup_{b\in\Delta} L_b = \Sigma^+$, van olyan $b \in \Delta$, hogy az x/ρ osztály részt vesz az L_b nyelv előállításában. Ezért $\overline{\alpha(x)} = \overline{\alpha(y)} = b$.

Az automatákhoz hasonlóan, δ kiterjesztésére most is igaz, hogy minden $x, y \in \Sigma^*$ esetén $\delta^*(x/\rho, y) = xy/\rho$.

Állítjuk, hogy $\forall x$-re $\alpha(x) = \mu_{\varepsilon/\rho}(x)$. Valóban,

(i) Ha $x = \varepsilon$, akkor $\alpha(x) = \varepsilon$ ($|\alpha(x)| = |x|$ miatt) és
$\mu_{\varepsilon/\rho}(\varepsilon) = \varepsilon$ (a Moore-gép által indukált leképezés definíciója szerint).

(ii) Ha $x = x'a$, akkor
$$\begin{aligned} \mu_{\varepsilon/\rho}(x'a) &= \mu_{\varepsilon/\rho}(x')\mu(x'a/\rho) \\ &= \alpha(x')\mu(x/\rho) && \text{(indukciós feltevés)} \\ &= \alpha(x')\overline{\alpha(x)} && \text{(μ definíciója)} \\ &= \alpha(x) && \text{(mert α automata leképezés).} \end{aligned}$$

2. bizonyítás: Legyen $\Delta = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Tegyük fel, hogy az L_{b_i} $(1 \le i \le n)$ nyelv felismerhető az $M_i = (Q_i, \Sigma, \delta_i, q_i, F_i)$ automatával. Legyen $N = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \mu)$ Moore-gép, ahol

- $Q = Q_1 \times \cdots \times Q_n = \{(p_1, \ldots, p_n) \mid p_i \in Q_i,\ 1 \le i \le n\}$
- Minden $(p_1, \ldots, p_n) \in Q$-ra és $a \in \Sigma$-ra $\delta((p_1, \ldots, p_n), a) = (\delta_1(p_1, a), \ldots, \delta_n(p_n, a))$.
- $\mu((p_1, \ldots, p_n)) = \begin{cases} b_i \text{ ha } \exists 1 \le i \le n : p_i \in F_i \text{ és } \forall\ 1 \le j \le n, \text{ ha } i \ne j \text{ akkor } p_j \notin F_j \\ \text{tetszőleges különben.} \end{cases}$

A δ átmenetfüggvény tulajdonsága lesz, hogy minden $(p_1, \ldots, p_n) \in Q$-ra és $x \in \Sigma^*$-ra $\delta^*((p_1, \ldots, p_n), x) = (\delta_1^*(p_1, x), \ldots, \delta_n^*(p_n, x))$, vagy másik jelöléssel: $(p_1, \ldots, p_n)x_N = (p_1 x_{M_1}, \ldots, p_n x_{M_n})$.

Állítjuk, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra $\alpha(x) = \mu_{(q_1,\ldots,q_n)}(x)$. Valóban:

(i) Ha $x = \varepsilon$, akkor $\alpha(x) = \varepsilon$ ($|\alpha(x)| = |x|$ miatt)

$\mu_{(q_1,\dots,q_n)}(\varepsilon) = \varepsilon$. (a Moore-gép által indukált leképezés definíciója szerint).

(ii) Ha $x = x'a$, akkor

$$\begin{aligned}
\mu_{(q_1,\dots,q_n)}(x'a) &= \mu_{(q_1,\dots,q_n)}(x')\mu(q_1x'a_{M_1},\dots,q_nx'a_{M_n}) \\
&= \alpha(x')\mu(q_1x_{M_1},\dots,q_nx_{M_n}) && \text{(indukciós feltevés)} \\
&= \alpha(x')\overline{\alpha(x)} && (\mu \text{ definíciója}) \\
&= \alpha(x) && (\text{mert } \alpha \text{ automata leképezés}).
\end{aligned}$$

□

2.6.4. Gépek minimalizálása

Ebben a fejezetben megadjuk egy adott véges Mealy géppel ekvivalens, minimális állapotszámú Mealy gép konstrukcióját.

2.55. Definíció. Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ egy Mealy gép, $\rho_M \subseteq Q \times Q$ pedig a következő reláció. Minden $p, q \in Q$-ra

$$p\,\rho_M q \iff \lambda_p = \lambda_q(\iff p \sim q).$$

2.56. Észrevétel. Minden $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ Mealy gép esetén ρ_M kongruencia M-en.

Bizonyítás. Az, hogy ρ_M ekvivalenciareláció, könnyen belátható. Továbbá minden $p, q \in Q$-ra:

- $p\ \rho_M\ q \Rightarrow \delta(p, a)\ \rho_M\ \delta(q, a)$, mert ezek is ekvivalensek (lásd 2.43. lemma).
- $p\ \rho_M\ q \Rightarrow \lambda(p, a) = \lambda(q, a)$, mert $\lambda(p, a) = \lambda_p(a)$ és $\lambda(q, a) = \lambda_q(a)$. □

2.57. Következmény. M és M/ρ_M gépek ekvivalensek.

Bizonyítás. 2.56. észrevétel és 2.42. következmény. □

M/ρ_M-et az M-hez tartozó redukált gépnek nevezzük. Továbbá, azt mondjuk, hogy M redukált, ha $M \cong M/\rho_M$.

2.58. Tétel. *Az $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ és $N = (P, \Sigma, \Delta, \delta', \lambda')$ Mealy gépek akkor és csak akkor ekvivalensek, ha $M/\rho_M \cong N/\rho_N$.*

Bizonyítás. "$\Leftarrow$" irány: Az M ekvivalens M/ρ_M-mel, $M/\rho_M \cong N/\rho_N$, és az N/ρ_N ekvivalens N-nel összefüggésekből azonnal adódik, hogy M ekvivalens N-nel.

"$\Rightarrow$" irány: Először megállapítjuk, hogy M/ρ_M ekvivalens N/ρ_N-nel, mert: M/ρ_M ekvivalens M-mel, M ekvivalens N-nel és N ekvivalens N/ρ_N-nel.

Az $M/\rho_M = (Q/\rho_M, \Sigma, \Delta, \delta_{\rho_M}, \lambda_{\rho_M})$ és $N/\rho_N = (P/\rho_N, \Sigma, \Delta, \delta'_{\rho_N}, \lambda'_{\rho_N})$ jelölésekkel élve, definiáljuk a $\varphi : Q/\rho_M \to P/\rho_N$ leképezést a következőképpen: $\varphi(q/\rho_M) = p/\rho_N$, ha q/ρ_M és p/ρ_N ekvivalensek. Egyrészt megmutatjuk, hogy φ bijekció. Valóban,

- φ ráképezés, mert M és N ekvivalensek és
- φ injektív, mert M/ρ_M redukált (az ekvivalens állapotok már össze vannak vonva).

Másrészt φ homomorfizmus. Valóban,

1) $\varphi(\delta_{\rho_M}(q/\rho_M, a)) = \delta'_{\rho_N}(\varphi(q/\rho_M), a)$

   Legyen ugyanis $p/\rho_N = \varphi(q/\rho_M)$. Ekkor q/ρ_M és p/ρ_N ekvivalensek, tehát az 2.43. lemma miatt $\delta_{\rho_M}(q/\rho_M, a)$ és $\delta'_{\rho_N}(p/\rho_N, a)$ is ekvivalensek. Következésképpen:
   $$\varphi(\delta_{\rho_M}(q/\rho_M, a)) = \delta'_{\rho_N}(p/\rho_N, a) = \delta'_{\rho_N}(\varphi(q/\rho_M), a).$$

2) $\lambda_{\rho_M}(q/\rho_M, a) = \lambda'_{\rho_N}(\varphi(q/\rho_M), a)$

   Ugyanis q/ρ_M és $\varphi(q/\rho_M)$ ekvivalensek, így bármely szóra - az 1 hosszú a szóra is - ugyanazt a kimenetet adják.

Tehát φ izomorfizmus, vagyis $M/\rho_M \cong N/\rho_N$. □

2.59. Tétel. *Tetszőleges M Mealy gép esetén legyen*

$$K_M = \{N \mid M \text{ és } N \text{ ekvivalensek}\}.$$

Akkor M/ρ_M minimális K_M-ben. Továbbá, bármely K_M-beli minimális Mealy gép izomorf M/ρ_M-mel.

Bizonyítás. Legyen $N \in K_M$ tetszőleges. Akkor a 2.58. tétel szerint $M/\rho_M \cong N/\rho_N$, amely utóbbi a 2.39. tétel miatt homomorf képe N-nek. Tehát M/ρ_M homomorf képe bármely $N \in K_M$-nek. Ezért M/ρ_M minimális.

Ha N is minimális, akkor az N-ből M/ρ_M-re képező homomrfizmus injektív, tehát izomorfizmus. □

A következő tétel bizonyítását gyakorlatnak szánjuk.

2.60. Tétel. *Minden M véges Mealy gép esetén ρ_M algoritmikusan kiszámítható.*

Bizonyítás. Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$. ρ_M-et a következő $\rho_1, \rho_2, \ldots$ sorozattal közelítjük.

(i) Legyen $i = 1$ és számítsuk ki ρ_1-et a következő összefüggés alapján: $\forall p, q \in Q$ esetén $p\,\rho_1 q \iff \forall a \in \Sigma : \ \lambda(p, a) = \lambda(q, a)$

(ii) Számítsuk ki ρ_{i+1}-et : $\forall p, q \in Q$ esetén $p\,\rho_{i+1} q \iff p\,\rho_i q$ és $\forall a \in \Sigma$: $\delta(p, a)\,\rho_i \delta(q, a)$

(iii) Ha $\rho_i = \rho_{i+1}$, akkor állj, különben legyen $i = i + 1$ és menjünk (ii)-re.

Ekkor $\rho_1 \supseteq \rho_2 \supseteq \ldots \supseteq \rho_i \supseteq \ldots$" = ", tehát $\exists i: \ \rho_i = \rho_{i+1} = \rho_{i+2} \ldots$. Erre az i-re $\rho_M = \rho_i$. A bizonyítást az 2.26. lemma bizonyításához hasonlóan végezhetjük el. □

Az eddigieket összefoglalva, megadjuk egy adott véges Mealy géppel ekvivalens, minimális állapotszámú Mealy gép konstrukcióját.

2.61. Tétel. *Legyen $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, \lambda)$ tetszőleges véges Mealy gép. Számoljuk ki ρ_M-t (2.60. tétel) és határozzuk meg az $M/\rho_M = (Q/\rho_M, \Sigma, \Delta, \delta_{\rho_M}, \lambda_{\rho_M})$ faktorgépet. Ekkor M/ρ_M az M-mel ekvivalens minimális állapotszámú Mealy gép.*

Bizonyítás. Lásd 2.59. tétel. □

2.6.5. Általánosított szekvenciális gépek

2.62. Definíció. Az *általánosított szekvenciális gép* egy $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F)$ rendszer, ahol

- Q egy véges, nemüres halmaz, az *állapothalmaz*,
- Σ és Δ rendre az *input- és output ábécék*,
- $\delta \subseteq Q \times \Sigma \times \Delta^* \times Q$, véges halmaz, az *átmenetek halmaza*,
- $q_0 \in Q$, a *kezdőállapot*,
- $F \subseteq Q$, a *végállapothalmaz.*

Egy $(p, a, u, q) \in \delta$ átmenet intuitív jelentése, hogy M a p állapotból az a input jel hatására a q állapotba megy át, miközben az $u \in \Delta^*$ output szót bocsátja ki.

M egy *futásán* egy olyan

$$w = (p_0, a_1, u_1, p_1)(p_1, a_2, u_2, p_2) \ldots (p_{n-2}, a_{n-1}, u_{n-1}, p_{n-1})(p_{n-1}, a_n, u_n, p_n)$$

szót értünk, ahol $n \geq 0$ és minden $1 \leq i \leq n$-re $(p_{i-1}, a_i, u_i, p_i) \in \delta$.

Azt mondjuk, hogy a w futás *elfogadó*, ha $p_0 = q_0$ és $p_n \in F$. A w futáshoz hozzárendeljük az $in(w) = a_1 \ldots a_n \in \Sigma^*$ és $out(w) = u_1 \ldots u_n \in \Delta^*$ input és output szavakat. Pontosabban, definiáljuk az $in : \delta^* \to \Sigma^*$ betű-betű homomorfizmust és $out : \delta^* \to \Delta^*$ homomorfizmust az $in(p, a, u, q) = a$ és $out(p, a, u, q) = u$ összefüggésekkel.

Az M által definiált (vagy indukált) relációt a

$$\tau_M = \{(in(w), out(w)) \mid w \text{ az } M \text{ elfogadó futása } \}$$

formulával definiáljuk. Tehát $\tau_M \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$.

Egy $\tau \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$ relációt *szekvenciális relációnak* nevezünk, ha van olyan M általánosított szekvenciális gép, hogy $\tau = \tau_M$.

A szekvenciális relációk jellemezhetők a következő tételben leírt módon. A tételt Nivat tételeként említik a szakirodalomban.

2.63. Tétel. *(Nivat tétele) Egy $\tau \subseteq \Sigma^* \times \Delta^*$ reláció akkor és csak akkor szekvenciális, ha van olyan Γ ábécé, $L \subseteq \Gamma^*$ reguláris nyelv, $\varphi : \Gamma^* \to \Sigma^*$ betű-betű homomorfizmus, $\psi : \Gamma^* \to \Delta^*$ homomorfizmus, hogy*

$$\tau = \{(\varphi(w), \psi(w)) \mid w \in L\}.$$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy τ szekvenciális, vagyis $\tau = \tau_M$ valamely $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta, q_0, F)$ szekvenciális gépre. Megkonstruálunk egy olyan automatát, amely pontosan M elfogadó futásait ismeri fel. Legyen ez $N = (Q, \Gamma, \delta_N, q_0, F)$, ahol

- $\Gamma = \delta$,
- minden $p \in Q$ és $(p', a, u, q') \in \Gamma$ esetén
$$\delta_N(p, (p', a, u, q')) = \begin{cases} q', & \text{ha } p = p' \\ \text{nincs értelmezve}, & \text{különben.} \end{cases}$$

Tehát N olyan szavakat fogad el, amelyekben a betűk M átmenetei, vagyis (p, a, u, q) alakú rendezett négyesek. A konstrukcióból pedig azonnal látható, hogy N akkor és csak akkor fogad el egy szót, ha teljesül rá a következő három feltétel:

- az első betűben lévő első állapot q_0,
- az első betű kivételével minden betűben lévő első állapot megegyezik a megelőző betűben lévő második állapottal és
- az utolsó betű második állapota F-beli.

Következésképpen, N éppen M elfogadó futásait ismeri fel, vagyis

$$L(N) = \{w \in \Gamma^* \mid w \text{ az } M \text{ elfogadó futása }\}.$$

Legyen ezután a $\varphi = in$ és $\psi = out$. Kapjuk, hogy

$$\tau_M = \{(\varphi(w), \psi(w)) \mid w \in L(N)\}.$$

Mivel $L(N)$ reguláris nyelv, készen vagyunk.

Megfordítva, tegyük fel, hogy van olyan Γ ábécé, $L \subseteq \Gamma^*$ reguláris nyelv, $\varphi : \Gamma^* \to \Sigma^*$ betű-betű homomorfizmus, $\psi : \Gamma^* \to \Delta^*$ homomorfizmus, hogy $\tau = \{(\varphi(w), \psi(w)) \mid w \in L\}$. Tegyük fel, hogy L-et az $N = (Q, \Gamma, \delta, q_0, F)$ automata ismeri fel (vagyis $L = L(N)$). Konstruáljuk meg $M = (Q, \Sigma, \Delta, \delta_M, q_0, F)$ általánosított szekvenciális gépet, ahol

$$\delta_M = \{(p, a, u, q) \mid p, q \in Q, (\exists c \in \Gamma) : \delta(p, c) = q, \varphi(c) = a \text{ és } \psi(c) = u\}.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$w = (p_0, a_1, u_1, p_1)(p_1, a_2, u_2, p_2) \dots (p_{n-1}, a_n, u_n, p_n)$$

az M egy futása, akkor és csak akkor, ha van olyan $c_1 \dots c_n \in \Gamma^*$, hogy $\delta^*(p_0, c_1 \dots c_n) = p_n$ továbbá, amelyre $\varphi(c_1 \dots c_n) = a_1 \dots a_n = in(w)$ és $\psi(c_1 \dots c_n) = u_1 \dots u_n = out(w)$.

Ebből következik, hogy w akkor és csak akkor elfogadó futás, ha van olyan $c_1 \dots c_n \in L(N)$, hogy $\varphi(c_1 \dots c_n) = in(w)$ és $\psi(c_1 \dots c_n) = out(w)$. Tehát $\tau = \tau_M$. □

3. Környezetfüggetlen nyelvek

3.1. Környezetfüggetlen nyelvtanok átalakítása

Gyakran szükség van arra, hogy egy környezetfüggetlen nyelvtanon olyan átalakításokat hajtsunk végre, melyek nem változtatják meg a nyelvtan által generált nyelvet. Ebben a részben néhány ilyen nevezetes átalakítást ismertetünk.

3.1.1. Láncszabály-mentesítés

3.1. Definíció. Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan esetén az $A \to B$ alakú szabályokat *láncszabályoknak* nevezzük. Továbbá, amennyiben P-ben nincsenek láncszabályok, úgy azt mondjuk, hogy G *láncszabálymentes*. □

3.2. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. Megadható olyan $G' = (N, \Sigma, P', S)$ láncszabálymentes környezetfüggetlen nyelvtan, amelyre $L(G') = L(G)$. Amennyiben G 3 típusú, úgy G' is 3 típusú lesz.

Bizonyítás. Először minden $A \in N$-re meghatározzuk azon $B \in N$ nemterminálisok halmazát, melyekre $A \Rightarrow^* B$ úgy, hogy a levezetés közben csak láncszabályokat alkalmaztunk. Jelöljük ezt a halmazt N_A-val. Megjegyezzük, hogy $A \in N_A$ (mivel $A \Rightarrow^* A$ nulla számú láncszabállyal.) Az N_A halmaz kiszámítását a következő iterációval végezzük:

(i) Legyen $N_0 = \{A\}$ (mert $A \in N_A$) és legyen $i = 0$.

(ii) Legyen $N_{i+1} = N_i \cup \{C \in N \mid \exists\, B \in N_i$ úgy, hogy $B \to C \in P\}$.

(iii) Amennyiben $N_i = N_{i+1}$ legyen $N_A = N_i$, különben legyen $i = i + 1$ és ismételjük meg a (ii) pontot.

Az olvasóra bízzuk annak igazolását, hogy a fenti algoritmus valóban N_A-t határozza meg.

Most konstruáljuk meg P'-t a következőképpen:

$P' = \emptyset$;
Minden $A \in N$-re,
  minden $B \in N_A$-ra,
    minden $B \to \alpha \in P$ szabály esetén:
      Ha $B \to \alpha$ nem láncszabály akkor
      vegyük fel az $A \to \alpha$ szabályt P'-be;

Nyilvánvaló, hogy P'-ben nem lesznek láncszabályok, ugyanakkor P' tartalmazni fog minden olyan P-beli szabályt, ami nem láncszabály. Az is nyilvánvaló, hogy ha G 3 típusú akkor G' is az lesz. Továbbá, az is teljesülni fog, hogy $L(G') = L(G)$, ez utóbbi a következők miatt.

Minden olyan G-beli levezetésben, ami S-ből indul ki és terminális szóban végződik, alkalmazhatunk láncszabályokat. Ilyenkor egy A nemterminálisból indulunk ki, alkalmazunk valamennyi láncszabályt, amelyekkel elérünk egy B nemterminálist, majd alkalmazunk egy $B \to \alpha$ szabályt, ami nem láncszabály. (Ez utóbbi lépés szükségszerűen bekövetkezik, mert különben nem érhetnénk el a terminális szót.) Ekkor azonban teljesül, hogy $B \in N_A$ és, hogy $B \to \alpha \in P$, tehát az $A \to \alpha$ szabály P'-ben van. Következésképpen A-ból levezethető α G'-ben egyetlen lépésben. Ilyen módon a G-beli, S-ből induló és terminális szóban végződő levezetésekben alkalmazott láncszabályok elhagyhatók, és a levezetés megkapható P'-beli szabályokkal is.

Megfordítva, minden G'-beli levezetésben alkalmazott szabály vagy P-ben is benne van, vagy helyettesíthető P-beli láncszabályok sorozatának és egy nem láncszabálynak az alkalmazásával. □

A lemmában szereplő konstrukciót egy 3 típusú nyelvtanon mutatjuk be.

3.3. Példa. Legyen G az a 3 típusú nyelvtan amelynek szabályai a következők:

- $S \to A \,|\, ab$
- $A \to B \,|\, bA$
- $B \to bB \,|\, C \,|\, a$
- $C \to bb.$

Az N_S, N_A, N_B és N_C halmazokat kiszámolva, kapjuk, hogy: $N_S = \{S, A, B, C\}$, $N_A = \{A, B, C\}$, $N_B = \{B, C\}$ és $N_C = \{C\}$. Ezután kapjuk, hogy G' szabályai a következők lesznek:

- $S \to ab \,|\, bA \,|\, bB \,|\, a \,|\, bb$
- $A \to bA \,|\, bB \,|\, a \,|\, bb$
- $B \to bB \,|\, bb \,|\, a$
- $C \to bb.$

□

3.1.2. ε-mentesítés

3.4. Definíció. Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan *ε-mentes*, ha P nem tartalmaz $A \to \varepsilon$ alakú szabályokat, kivéve esetleg az $S \to \varepsilon$ szabályt. Ha azonban $S \to \varepsilon \in P$, akkor S nem szerepel semelyik P-beli szabály jobb oldalán. □

Minden környezetfüggetlen nyelvtan ε-mentes alakra hozható, pontosabban igaz a következő állítás.

3.5. Lemma. Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz megkonstruálható olyan ε-mentes $G' = (N', \Sigma, P', S')$ környezetfüggetlen nyelvtan, melyre $L(G) = L(G')$.

Bizonyítás. Legyen tehát $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtan. A lemmát két lépésben bizonyítjuk be.

a) Először megadunk egy olyan ε-mentes $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, melyre $L(G_1) = (L(G) - \{\varepsilon\})$. Ehhez meghatározzuk azon nemterminálisok H halmazát, melyekből levezethető ε. H a következő iterációval határozható meg.

(i) Legyen $H_1 = \{A \in N \mid A \to \varepsilon \in P\}$ és $i = 1$.

(ii) Legyen $H_{i+1} = H_i \cup \{A \in N \mid (\exists A \to \alpha \in P)$ úgy, hogy $\alpha \in H_i^*\}$.

(iii) Ha $H_{i+1} = H_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és hajtsuk végre az (ii) lépést.

Könnyen igazolható, hogy minden $A \in N$-re akkor és csakis akkor teljesül $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$, ha van olyan i, hogy $A \in H_i$. (Nevezetesen az elegendőség i szerinti indukcióval bizonyítható, a szükségesség pedig az $A \Rightarrow_G^* \varepsilon$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval.) Továbbá az iterációs algoritmus terminál, mivel $H_1 \subseteq H_2 \subseteq \ldots N$, ezért van olyan i_0, hogy $H_{i_0} = H_{i_0+1}$. Az is könnyen látható, hogy ezen i_0-ra $H_{i_0+1} = H_{i_0+2} = \ldots$. Az eddig elmondottakból következik, hogy $A \in H_{i_0}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $A \Rightarrow^* \varepsilon$, tehát a $H = H_{i_0}$ választás megfelelő lesz. (Mellesleg $\varepsilon \in L(G)$ akkor és csak akkor, ha $S \in H$.)

Most megadjuk G_1-et, amihez definiáljuk P_1 szabályhalmazt a következőképpen. Legyen P_1 a legszűkebb olyan halmaz, melyre teljesül, hogy

- minden olyan $A \to \alpha \in P$ szabály esetén melyre $\alpha \neq \varepsilon$,
- minden olyan $A \to \alpha_1$ szabály P_1-ben van, melyre $\alpha_1 \neq \varepsilon$ és α_1 úgy keletkezik α-ból, hogy töröljük belőle H-beli nemterminálisok 0 vagy több előfordulását.

(Például, ha $A, B \in H$ és az $A \to aCBbAB$ szabály P-beli, akkor az $A \to aCBbAB$, $A \to aCbAB$, $A \to aCBbB$, $A \to aCBbA$, $A \to aCbB$, $A \to aCbA$, $A \to aCBb$ és $A \to aCb$ szabályok mindegyike P_1-ben lesz. Ugyanakkor, ha $C \to AB$ is P-ben van, akkor a $C \to A$ és a $C \to B$ szabályok is P_1-be kerülnek, de $C \to \varepsilon$ már nem.)

Végül legyen $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$. Nyilvánvaló az, hogy G_1 ε-mentes lesz, hiszen az $\alpha_1 \neq \varepsilon$ feltétel miatt egyetlen ε-szabályt sem vettünk fel P_1-be. Ugyanakkor az

$$L(G_1) = (L(G) - \{\varepsilon\})$$

feltétel is teljesül, ami a következőképpen látható be.

Egyrészt $L(G_1) \subseteq (L(G) - \{\varepsilon\})$, mivel ha veszünk egy G_1-beli levezetést, akkor abban minden olyan $A \to \alpha_1$, P_1-beli szabály alkalmazása, amely nincs P-ben, helyettesíthető azon $A \to \alpha$, P-beli szabállyal amelyből $A \to \alpha_1$ keletkezett és azon nemterminálisok ε-ra történő levezetésével, amelyeket α-ból elhagytunk.

A fordított irányú $(L(G) - \{\varepsilon\}) \subseteq L(G_1)$ tartalmazás pedig azért igaz, mert ha alkalmazunk egy $A \to \alpha$ P-beli szabályt, majd α-ból egy ε-tól különböző szót vezetünk le úgy, hogy ugyanakkor az α-ban szereplő 0 vagy több nemterminálisból ε-t vezetünk le, akkor $A \to \alpha$ alkalmazása helyettesítthető egy olyan $A \to \alpha_1$ P_1-beli szabály alkalmazásával, melyet $A \to \alpha$-ból kaptunk.

b) Most második lépésként, a G_1 ismeretében megadjuk a lemmában szereplő G'-t a következőképpen. Ha $\varepsilon \notin L(G)$ (vagyis, ha $S \notin H$), akkor legyen $G' = G_1$, különben pedig legyen $G' = (N \cup \{S'\}, \Sigma, P_1 \cup \{S' \to S, S' \to \varepsilon\}, S')$. Nyilvánvaló, hogy mindkét esetben G' is ε-mentes, és $L(G') = L(G)$. □

3.6. Példa. Legyen G az alábbi nyelvtan:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ABC \\ A & \to & BB \,|\, \varepsilon \\ B & \to & CC \,|\, a \\ C & \to & AA \,|\, b. \end{array}$$

Adjuk meg a G-vel ekvivalens ε-mentes nyelvtant!

A 3.5. Lemmában leírt módon először meghatározzuk azon nemterminálisok H halmazát, amelyekből levezethető ε. Kapjuk, hogy $H_1 = \{A\}$, $H_2 = \{A, C\}$, $H_3 = \{A, C, B\}$, $H_4 = \{S, A, C, B\}$ és $H_5 = \{S, A, C, B\}$, tehát $H = \{S, A, C, B\}$. Mellesleg $\varepsilon \in L(G)$, mivel $S \in H$.

A következő lépésben megkonstruáljuk G_1-et:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & ABC \,|\, AB \,|\, BC \,|\, AC \,| A \,|\, B \,|\, C \\ A & \to & BB \,|\, B \\ B & \to & CC \,|\, C \,|\, a \\ C & \to & AA \,|\, A \,|\, b. \end{array}$$

Ezen G_1-re $L(G_1) = (L(G) - \{\varepsilon\})$. A G-vel ekvivalens G' ε-mentes nyelvtant úgy kapjuk, hogy G_1 szabályaihoz hozzávesszük még az $S' \to S$ és $S' \to \varepsilon$ szabályokat, ahol S' lesz az új kezdőszimbólum. □

3.1.3. A felesleges szimbólumok elhagyása

A környezetfüggetlen nyelvtan definíciója megenged olyan redundáns eseteket is, melyeket a gyakorlatban célszerű elkerülni. Például tekintsük azt a nyelvtant, melynek szabályai $S \to a|aB$, $A \to b$ és $B \to Bc$. Nyilvánvaló, hogy ez a nyelvtan ekvivalens az egyetlen $S \to a$ szabályt tartalmazó nyelvtannal, mivel az $S \to aB$, $A \to b$ és a $B \to Bc$ szabályok nem alkalmazhatók egyetlen olyan levezetésben sem, amelyik S-ből indul ki és egy terminális szóban végződik. Az $A \to b$ szabály esetén ennek az az oka, hogy az A nemterminális "nem érhető el" S-ből kiinduló levezetéssel, míg az $S \to aB$ és a $B \to Bc$ szabályok azért nem alkalmazhatóak, mert (habár B elérhető S-ből) B-ből nem vezethető le egyetlen terminális szó sem. Ebben a részben az ilyen "rossz" tulajdonságokkal rendelkező szimbólumok felderítésére és kiszűrésére alkalmas algoritmusokat adunk meg.

3.7. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az $X \in (N \cup \Sigma)$ szimbólumról azt mondjuk, hogy *használható*, ha vannak olyan $x, y, z \in \Sigma^*$ szavak, amelyekre $S \Rightarrow^* xXz \Rightarrow^* xyz$. (Megjegyezzük, hogy ha $X \in \Sigma$, akkor $X = y$.)

□

Célunk egy olyan algoritmus megadása, amellyel környezetfüggetlen nyelvtanokból ki tudjuk szűrni a nem használható (vagy felesleges) szimbólumokat és ezáltal minden környezetfüggetlen nyelvtanhoz meg tudunk adni egy vele ekvivalens, és csak használható szimbólumokat tartalmazó nyelvtant. Ezt két lépésben érjük el, először az ún. nem produktív nemterminálisokat szűrjük ki.

3.8. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az $A \in N$ nemterminálisról azt mondjuk, hogy *produktív*, ha van olyan $z \in \Sigma^*$ szó, amelyre $A \Rightarrow^* z$. □

A fenti definícióból következik, hogy $L(G) \neq \emptyset$ akkor és csak akkor áll fenn, ha S produktív.

3.9. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Ha $L(G) \neq \emptyset$, akkor megadható olyan $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan, melyre $L(G) = L(G_1)$ és minden N_1-beli nemterminális produktív.

Bizonyítás. Először kiszámoljuk az N-beli produktív nemterminálisok U halmazát. U a következő iterációval határozható meg.

(i) Legyen $U_1 = \{A \in N \mid (\exists A \to x \in P)$ valamely $x \in \Sigma^*$-ra$\}$ és legyen $i = 1$.

(ii) Legyen $U_{i+1} = U_i \cup \{A \in N \mid (\exists A \to \alpha \in P)$ úgy, hogy $\alpha \in (U_i \cup \Sigma)^*\}$.

(iii) Ha $U_{i+1} = U_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és hajtsuk végre az (ii) lépést.

Megint csak könnyen igazolható, hogy minden $A \in N$-re akkor és csakis akkor teljesül $A \Rightarrow_G^* z$ valamely $z \in \Sigma^*$-ra, ha van olyan i, hogy $A \in U_i$. (Az elegendőség most is i szerinti indukcióval bizonyítható, míg a szükségesség az $A \Rightarrow_G^* z$ levezetés lépéseinek száma szerinti indukcióval.) Továbbá az iterációs algoritmus terminál, mivel $U_1 \subseteq U_2 \subseteq \ldots N$, ezért van olyan i_0, hogy $U_{i_0} = U_{i_0+1}$. Az is könnyen látható, hogy ezen i_0-ra $U_{i_0+1} = U_{i_0+2} = \ldots$. A fentiekből következik, hogy $A \in U_{i_0}$ akkor és csakis akkor teljesül, ha A produktív, tehát az $U = U_{i_0}$ választás megfelelő lesz.

Melléktermékként kapjuk, hogy $L(G) \neq \emptyset$ akkor és csak akkor, ha $S \in U$.

Most megadjuk a G_1 nyelvtant. Ha $L(G) \neq \emptyset$ (tehát, ha $S \in U$), akkor legyen $N_1 = U$, álljon P_1 azon P-beli szabályokból, amelyek csak $(N_1 \cup \Sigma)$-beli szimbólumokat tartalmaznak, és legyen $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$.

Nyilvánvaló az, hogy minden N_1-beli nemterminális produktív. Azt kell még igazolni, hogy $L(G_1) = L(G)$, más szóval, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra, $S \Rightarrow_G^* x$ akkor és csakis akkor, ha $S \Rightarrow_{G_1}^* x$. Ha $S \Rightarrow_{G_1}^* x$, akkor $S \Rightarrow_G^* x$ is szükségszerűen teljesül, mivel $P_1 \subseteq P$. Fordítva, ha $S \Rightarrow_G^* x$, akkor valamennyi ebben a derivációban szereplő nemterminális produktív, tehát valamennyi ebben a derivációban szereplő szabály P_1-ben is ott van. Ezért $S \Rightarrow_{G_1}^* x$. □

A következőkben a nem elérhető szimbólumok kiszűrésével foglalkozunk.

3.10. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az $X \in (N \cup \Sigma)$ szimbólumról azt mondjuk, hogy *elérhető*, ha vannak olyan $\alpha, \beta \in (N \cup \Sigma)^*$-beli szavak, amelyekre $S \Rightarrow^* \alpha X \beta$. (Más szóval X elérhető, ha előfordul valamely mondatformában.) □

3.11. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Ha Σ-ban van legalább egy elérhető terminális, akkor megkonstruálható olyan $G' = (N', \Sigma', P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan melyre $L(G) = L(G')$ és G'-nek minden szimbóluma elérhető.

Bizonyítás. Először kiszámoljuk az $(N \cup \Sigma)$-beli elérhető szimbólumok H halmazát. H a következő iterációval határozható meg. Legyen

(i) Legyen $H_0 = \{S\}$ és legyen $i = 0$.

(ii) Legyen $H_{i+1} = H_i \cup \{X \in (N \cup \Sigma) \,|\, (\exists A \to \alpha X \beta \in P)$ úgy, hogy $A \in H_i\}$.

(iii) Ha $H_{i+1} = H_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$ és hajtsuk végre az (ii) lépést.

Igazolható, hogy minden $X \in (N \cup \Sigma)$ esetén, X akkor és csakis akkor érhető el, ha van olyan i, hogy $X \in H_i$. Továbbá, az iterációs algoritmus terminál, mivel $H_0 \subseteq H_1 \subseteq \ldots (N \cup \Sigma)$, ezért van olyan i_0, hogy $H_{i_0} = H_{i_0+1}$. Ezen i_0-ra $H_{i_0+1} = H_{i_0+2} = \ldots$. A fentiekből következik, hogy $X \in H_{i_0}$, akkor és csakis akkor teljesül, ha X elérhető, tehát a $H = H_{i_0}$ választás megfelelő lesz.

Most megadjuk a G' nyelvtant. Legyen $N' = N \cap H$, $\Sigma' = \Sigma \cap H$ és álljon P' azon P-beli szabályokból, amelyek csak $(N' \cup \Sigma')$-beli szimbólumokat tartalmaznak. Amennyiben $\Sigma' \neq \emptyset$, legyen $G' = (N', \Sigma', P', S)$.

Nyilvánvaló az, hogy minden $(N' \cup \Sigma')$-beli szimbólum elérhető. Azt kell még igazolni, hogy $L(G') = L(G)$, vagyis, hogy minden $x \in \Sigma^*$-ra, $S \Rightarrow_G^* x$ akkor és csakis akkor, ha $S \Rightarrow_{G'}^* x$. Ha $S \Rightarrow_{G'}^* x$, akkor $S \Rightarrow_G^* x$ most is szükségszerűen teljesül, mivel $P' \subseteq P$. Fordítva, ha $S \Rightarrow_G^* x$, akkor valamennyi, ebben a derivációban szereplő szimbólum elérhető, tehát valamennyi, ebben a derivációban szereplő szabály P'-ben is ott van. Ezért $S \Rightarrow_{G'}^* x$. □

A produktív tulajdonságra és a szimbólumok elérhetőségére vonatkozó eredményeink kombinálásával kapjuk a következő tételt.

3.12. Tétel. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Ha $L(G) \neq \emptyset$ és Σ-ban van elérhető terminális, akkor megkonstruálható olyan $G' = (N', \Sigma', P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan melyre $L(G) = L(G')$ és G'-nek minden szimbóluma használható.

Bizonyítás. Először alkalmazzuk G-re a 3.9. Lemmában szereplő algoritmust. Ha $L(G) \neq \emptyset$, akkor konstruáljuk meg a G-vel ekvivalens $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, melynek minden nemterminálisa produktív.

Ezután alkalmazzuk a 3.11. Lemmában szereplő algoritmust G_1-re. Ha Σ-ban van legalább egy elérhető terminális (vagyis, ha $\Sigma \cap H \neq \emptyset$), akkor konstruáljuk meg $G' = (N', \Sigma', P', S)$ nyelvtant.

Állítjuk, hogy ez a nyelvtan eleget tesz a tételben szereplő feltételeknek. Valóban, a 3.9. és a 3.11. Lemmák miatt $L(G) = L(G_1) = L(G')$.

Azt is megmutatjuk, hogy G' minden szimbóluma használható. Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy van olyan $X \in (N' \cup \Sigma')$ szimbólum, amely nem használható, vagyis nem léteznek olyan $x, y, z \in \Sigma'^*$ szavak, amelyekre $S \Rightarrow^*_{G'} xXz \Rightarrow^*_{G'} xyz$. Ez kétféleképpen lehetséges.

Egyrészt lehet úgy, hogy már az $S \Rightarrow^*_{G'} xXz$ deriváció sem teljesül semmilyen $x, z \in \Sigma'^*$-ra. Ugyanakkor, mivel G' minden szimbóluma (és így X is) elérhető, vannak olyan $\alpha, \beta \in (N' \cup \Sigma')^*$ szavak, melyekre $S \Rightarrow^*_{G'} \alpha X \beta$. Mivel G' definíciója miatt $P' \subseteq P_1$, az is igaz, hogy $S \Rightarrow^*_{G_1} \alpha X \beta$. Továbbá, mivel G_1-ben minden nemterminális produktív, vannak olyan $x', z' \in \Sigma^*$ szavak, melyekre $S \Rightarrow^*_{G_1} x'Xz'$. Viszont ebben a levezetésben szereplő valamennyi szimbólum elérhető, tehát $x', z' \in \Sigma'^*$ és $S \Rightarrow^*_{G'} x'Xz'$ is teljesülnek, ami ellentmond feltevésünknek. Így az első eset nem lehetséges.

Marad a második eset, vagyis amikor léteznek olyan $x, z \in \Sigma'^*$ szavak, amelyekre $S \Rightarrow^*_{G'} xXz$, de $X \Rightarrow^*_{G'} y$ nem teljesül semmilyen $y \in \Sigma'^*$-ra. Ez csak úgy lehet, ha $X \in N'$ és X nem produktív G'-ben. Ugyanakkor, mivel G_1-ben minden nemterminális produktív, és $N' \subseteq N_1$, van olyan $y' \in \Sigma^*$, melyre $X \Rightarrow^*_{G_1} y'$. De ekkor a $P' \subseteq P_1$ feltétel miatt azt kapjuk, hogy $S \Rightarrow^*_{G_1} xXz \Rightarrow^*_{G_1} xy'z$. Mivel minden, ezen derivációban szereplő szimbólum elérhető, kapjuk, hogy $S \Rightarrow^*_{G'} xXz \Rightarrow^*_{G'} xy'z$, ami ellentmondás.

Összevetve azt kaptuk, hogy G' minden szimbóluma használható. $\square$

3.13. Példa. Legyen G az alábbi szabályokból álló nyelvtan:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \,|\, B \\ A & \rightarrow & aB \,|\, bS \,|\, b \\ B & \rightarrow & AB \,|\, Ba \\ C & \rightarrow & AS \,|\, b. \end{array}$$

Konstruáljuk meg a G-vel ekvivalens azon G' nyelvtant, melynek minden szimbóluma használható!

A 3.12. Lemmában szereplő algoritmust követve, először meghatározzuk G produktív nemterminálisait, a 3.9. Lemmában megadott módon. Kapjuk, hogy $U_1 = \{A, C\}$, $U_2 = \{S, A, C\}$, $U_3 = \{S, A, C\}$, tehát G-ben csak a B nem produktív. Csak azokat a szabályokat tartjuk meg, amelyekben S, A, C, a és b szerepelnek. Így kapjuk az alábbi G_1 nyelvtant:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \\ A & \rightarrow & bS \,|\, b \\ C & \rightarrow & AS \,|\, b. \end{array}$$

Most a 3.11. Lemmában megadott módon kiszámoljuk az S-ből elérhető szimbólumokat. Ekkor $H_0 = \{S\}$, $H_1 = \{S, A\}$, $H_2 = \{S, A, b\}$, $H_3 = \{S, A, b\}$, tehát a G_1-ben elérhető szimbólumok S, A és b. Csak ezen szimbólumokból álló szabályokat megtartva kapjuk G'-t:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \\ A & \rightarrow & bS \,|\, b. \end{array}$$

$\square$

3.1.4. A balrekurzió megszüntetése

3.14. Definíció. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan és legyen $A \in N$.

- Azt mondjuk, hogy A *közvetlenül balrekurzív* G*-ben*, ha P-ben van $A \to A\alpha$ alakú szabály.
- Továbbá, A *balrekurzív* G*-ben*, ha van olyan $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$ szó, amelyre $A \Rightarrow^+ A\alpha$.
- Végül a G nyelvtan balrekurzív, ha tartalmaz legalább egy balrekurzív nemterminálist.

□

A fenti definícióból következik, hogy minden közvetlenül balrekurzív nemterminális egyúttal balrekurzív is. Például az aritmetikai kifejezéseket generáló G_{ar}:

- $K \to K + T$, $K \to T$,
- $T \to T * F$, $T \to F$,
- $F \to (K)$, $F \to a$

esetében a K nemterminális közvetlenül balrekurzív, és így G_{ar} is balrekurzív.

Tetszőleges G nyelvtan és A nemterminális esetén nyilvánvaló annak megállapítása, hogy A közvetlenül balrekurzív-e G-ben: csak meg kell nézni, hogy G-nek van-e $A \to A\alpha$ alakú szabálya. Annak eldöntése, hogy A balrekurzív-e már nem ilyen egyszerű, ugyanakkor nem is nehéz.

3.15. Lemma. Tetszőleges ε-mentes $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan és $A \in N$ esetén eldönthető, hogy A balrekurzív-e G-ben.

Bizonyítás. Számoljuk ki a

$$H_A = \{B \in N \mid A \Rightarrow_G^+ B\gamma\}$$

halmazt. Mivel G ε-mentes, A akkor és csak akkor balrekurzív, ha $A \in H_A$.

H_A kiszámítása a következő iterációs algoritmussal történik:

1. Legyen $i = 0$ és $H_i = \{B \in N \mid A \to B\alpha \in P\}$;
2. Legyen $H_{i+1} = H_i \cup \{B \in N \mid \exists (C \in H_i) : C \to B\alpha \in P\}$;
3. Ha $H_{i+1} = H_i$, akkor álljunk meg, különben legyen $i = i + 1$, és menjünk 2-re;

Nyilvánvaló annak igazolása, hogy az algoritmus véges lépés után $H_i = H_A$ mellett terminál. □

Most kifejlesztünk egy olyan módszert, amellyel a balrekurzió kiküszöbölhető egy nyelvtanból anélkül, hogy az általa generált nyelv megváltozna.

Szükségünk lesz a következő lemmára.

3.16. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan és legyen $A \to \alpha B\beta \in P$ (vagyis tekintsük G-nek egy olyan szabályát melynek jobb oldalában szerepel legalább egy nemterminális). Legyenek a B bal oldalú szabályok $B \to \gamma_1 \,|\, \ldots \,|\, \gamma_n$. Legyen

$$P' = (P - \{A \to \alpha B\beta\}) \cup \{A \to \alpha\gamma_1\beta, \ldots, A \to \alpha\gamma_n\beta\},$$

és $G' = (N, \Sigma, P', S)$. Akkor $L(G) = L(G')$ és ha G ε-mentes, akkor G' is az.

Bizonyítás. Először is megjegyezzük, hogy ha G ε-mentes, akkor P'-be sem veszünk fel ε-szabályokat, tehát G' is ε-mentes lesz.

Az $L(G') \subseteq L(G)$ tartalmazás is nyilvánvaló. Valóban, minden G'-beli levezetésben alkalmazott P'-beli szabály vagy P-ben is benne van, vagy $A \to \alpha\gamma_i\beta$ alakú, ahol $1 \leq i \leq n$. Ez utóbbi szabály alkalmazása azonban helyettesíthető az $A \Rightarrow_G \alpha B\beta \Rightarrow_G \alpha\gamma_i\beta$, két lépéses G-beli levezetéssel. Ilyen módon minden G'-beli levezetés szimulálható G-beli levezetéssel.

A fordított irányú $L(G) \subseteq L(G')$ tartalmazást a következőképpen bizonyítjuk. Legyen $x \in L(G)$, vagyis feltesszük, hogy $S \Rightarrow_G^* x$. Ha ezen levezetésben nem alkalmaztuk az $A \to \alpha B\beta$ szabályt, akkor minden alkalmazott szabály P'-ben is benne van, tehát $S \Rightarrow_{G'}^* x$. Ellenkező esetben tekintjük $S \Rightarrow_G^* x$-ben az $A \to \alpha B\beta$ szabály legelső alkalmazását és felírjuk a levezetést

$$\begin{array}{lll} S & \Rightarrow_G^* & \alpha_1 A\beta_1 \\ & \Rightarrow_G & \alpha_1\alpha B\beta\beta_1 \qquad \text{(ez } A \to \alpha B\beta \text{ első alkalmazása)} \\ & \Rightarrow_G^* & \alpha_1'\alpha' B\beta'\beta_1' \\ & \Rightarrow_G & \alpha_1'\alpha'\gamma_i\beta'\beta_1' \qquad \text{(a } B \text{ helyettesítése)} \\ & \Rightarrow_G^* & x_1'x'x_iy'y_1' = x \end{array}$$

alakban. Ez a G-beli levezetés azonban helyettesíthető a következő levezetéssel:

$$\begin{array}{lll} S & \Rightarrow_{G'}^* & \alpha_1 A\beta_1 \qquad \text{(eddig nem alkalmaztuk } A \to \alpha B\beta\text{-t)} \\ & \Rightarrow_{G'} & \alpha_1\alpha\gamma_i\beta\beta_1 \qquad \text{(mert } A \to \alpha\gamma_i\beta \in P'\text{)} \\ & \Rightarrow_G^* & \alpha_1'\alpha'\gamma_i\beta'\beta_1' \\ & \Rightarrow_G^* & x_1'x'x_iy'y_1' = x. \end{array}$$

Ezáltal egy olyan "vegyes" levezetést kaptunk melyben mind P mind P'-beli szabályok szerepelnek, ugyanakkor az $A \to \alpha B\beta$ szabályt eggyel kevesebbszer alkalmaztuk benne mint az eredeti levezetésben. A fenti eljárást iterálva (vagyis az $A \to \alpha B\beta$ szabálynak mindig a legelső alkalmazását tekintve) végül az x szónak egy olyan levezetését kapjuk, amelyben az $A \to \alpha B\beta$ szabály nem szerepel, tehát amely G'-beli. Következésképpen $x \in L(G')$. □

Amennyiben egy G' nyelvtan egy G nyelvtanból a 3.16. Lemmában leírt módon áll elő, akkor azt mondjuk, hogy G'-t 1 típusú transzformációval kapjuk G-ből. Az 1 típusú transzformáció tehát megőrzi a nyelvtan által generált nyelvet.

Az 1 típusú transzformáció akkor is működik, ha az $A \to \alpha B\beta$ szabályban $A = B$. Tegyük fel például, hogy az $A \to aAA$ szabály G-beli, és A alternatívái $A \to aAA \,|\, b$. Ekkor 1 típusú transzformációt hajtunk végre G-n, ha az $A \to aAA$ szabályt töröljük és helyette bevesszük az $A \to aaAAA \,|\, abA$ szabályokat. Az így kapott G'-ben az A bal oldalú szabályok tehát $A \to aaAAA \,|\, abA \,|\, b$ lesznek.

Most egy újabb transzformációt ismertetünk, amely a közvetlenül balrekurzív szimbólumok számának csökentésére irányul.

3.17. Lemma. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan, amely nem tartalmaz $A \to A$ alakú szabályokat. Legyen továbbá $A \in N$ közvetlenül balrekurzív, és legyenek az A bal oldalú szabályok

$$A \to A\alpha_1 \,|\, \dots \,|\, A\alpha_n \,|\beta_1 \,|\, \dots \,|\, \beta_m,$$

ahol $\beta_1, \dots, \beta_m$ egyike sem kezdődik A-val. Legyen

- $N_1 = N \cup \{A'\}$, ahol $A' \notin (N \cup \Sigma)$ egy új nemterminális,
- legyen $P_1 = (P - \{A \to A\alpha_1, \dots, A \to A\alpha_n\}) \cup P'$, ahol
$$\begin{array}{rcl} P' & = & \{A \to \beta_1 A', \dots, A \to \beta_m A'\} \\ & \cup & \{A' \to \alpha_1 A', \dots, A' \to \alpha_n A'\} \\ & \cup & \{A' \to \alpha_1, \dots, A' \to \alpha_n\}. \end{array}$$
- és végül legyen $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$.

Akkor $L(G) = L(G_1)$ és A nem közvetlenül balrekurzív G_1-ben. Továbbá, ha G ε-mentes, akkor G_1 is az.

Bizonyítás. (Vázlat.) A második állítás nyilvánvaló és az is nyilvánvaló, hogy A nem közvetlenül balrekurzív G_1-ben. Az $L(G) = L(G_1)$ egyenlőség igazolásához elegendő megmutatni, hogy minden $C \in N$-re és $x \in \Sigma^*$-ra

$$C \Rightarrow^*_{G,l} x \text{ akkor és csakis akkor, ha } C \Rightarrow^*_{G_1,l} x.$$

Tegyük fel, hogy $C \Rightarrow^*_{G,l} x$. Ezen levezetésben szereplő, nem A-ra vonatkozó helyettesítések G_1-ben is elvégezhetők, mert a nem A bal oldalú szabályok P_1-ben is benne vannak. Az A nemterminálisból kiinduló rész-derivációk pedig

$$A \Rightarrow_{G,l} A\alpha_{i1} \Rightarrow_{G,l} \dots \Rightarrow_{G,l} A\alpha_{ik} \dots \alpha_{i1} \Rightarrow_{G,l} \beta_j \alpha_{ik} \dots \alpha_{i1} \Rightarrow^*_{G,l} y_j x_{ik} \dots x_{i1}$$

alakúak. Ez a rész-deriváció viszont helyettesíthető az

$$\begin{array}{l} A \Rightarrow_{G_1,l} \beta_j A' \Rightarrow^*_{G_1,l} y_j A' \Rightarrow_{G_1,l} y_j \alpha_{ik} A' \Rightarrow^*_{G_1,l} y_j x_{ik} A' \Rightarrow_{G_1,l} \dots \Rightarrow_{G_1,l} \\ y_j x_{ik} \dots x_{i2} \alpha_{i1} \Rightarrow^*_{G_1,l} y_j x_{ik} \dots x_{i2} x_{i1}, \end{array}$$

G_1-beli derivációval. Így $C \Rightarrow^*_{G_1,l} x$ is teljesül. A formális bizonyítás a $C \Rightarrow^*_{G,l} x$ levezetés hossza szerinti indukcióval végezhető el. A megfordított irányú következtetés hasonlóan végezhető el. □

Amennyiben egy G_1 nyelvtan egy G nyelvtanból a 3.17. Lemmában leírt módon áll elő, akkor azt mondjuk, hogy G_1-et 2 típusú transzformációval kapjuk G-ből. A lemma szerint a 2 típusú transzformáció is megőrzi a nyelvtan által generált nyelvet, továbbá, eggyel csökkenti a nyelvtanban szereplő közvetlenül balrekurzív nemterminálisok számát. (Valóban, a 3.17. Lemmában szereplő G nyelvtanban A közvetlenül balrekurzív, de G_1-ben már nem, ugyanakkor A' pedig nem közvetlenül balrekurzív G_1-ben.)

A 2 típusú transzformációra vonatkozó eredményekből azonnal adódik a következő tétel.

3.18. Tétel. *Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz megkonstruálható olyan $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan amely nem tartalmaz közvetlenül balrekurzív nemterminálisokat és amelyre $L(G) = L(G_1)$.*

Bizonyítás. G-ből kiindulva, addig alkalmazzuk a 2 típusú transzformációt, amíg el nem fogynak a közvetlenül balrekurzív nemterminálisok. □

Végül kimondhatjuk ezen rész fő eredményét.

3.19. Tétel. *Tetszőleges G környezetfüggetlen nyelvtanhoz konstruálható olyan G' nem balrekurzív környezetfüggetlen nyelvtan, amelyre $L(G) = L(G')$.*

Bizonyítás. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$. Tegyük fel, hogy G ε-mentes és nem tartalmaz $A \to A$ alakú szabályokat. Hajtsuk végre a következő algoritmust.

(1) A 3.18. tételben szereplő módon küszöböljük ki G-ből a közvetlenül balrekurzív nemterminálisokat.

(2) Ha ezek után G-ben nem marad balrekurzív nemterminális, akkor készen vagyunk. (Megjegyezzük, hogy a 3.15. lemma szerint ez a tulajdonsága G-nek algoritmikusan eldönthető.)

Ellenkező esetben vegyünk egy A nemterminálist amely balrekurzív G-ben. Legyenek az A bal oldalú szabályok $A \to \gamma_1 \,|\, \dots \,|\gamma_n$. Mivel A nem közvetlenül balrekurzív, a $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ szavak egyike sem kezdődik A-val. Ugyanakkor A balrekurzív, tehát tehát P-ben lennie kell egy $B \to A\beta$ szabálynak, melyre $B \neq A$ és egy

$$A \Rightarrow_G^* B\delta \Rightarrow_G A\beta\delta = A\alpha$$

derivációnak. Töröljük P-ből ezt a $B \to A\beta$ szabályt és vegyük be helyette a $B \to \gamma_1\beta \,|\, \dots \,|\gamma_n\beta$ szabályokat. Ezáltal G-n egy 1 típusú transzformációt hajtunk végre, tehát a nyelvtan által generált nyelv nem változik.

Amennyiben a fenti eljárást minden $B \to A\beta$ alakú szabályra elvégezzük, A nem lesz balrekurzív (mert A-ból indulva "nem találunk vissza A-hoz"). Ugyanakkor, amennyiben valamelyik γ_i B-vel kezdődik, az így kapott nyelvtanban a $B \to \gamma_i\beta$ szabály miatt B közvetlenül balrekurzívvá válik. Ha azonban B ily módon közvetlenül balrekurzívvá vált, akkor már előtte is balrekurzív volt, mert $B \Rightarrow_G A\beta \Rightarrow_G \gamma_i\beta$ és γ_i B-vel kezdődik. Tehát valójában csökkenteni tudtuk G balrekurzív nemterminálisainak számát eggyel. Folytassuk az algoritmust az (1) pontban.

Belátható, hogy az algoritmus terminál és nem balrekurzív nyelvtant ad végeredményül. Ez amiatt van, mert az (1) pontban nem keletkeznek újabb balrekurzív nemterminálisok (ld. 2 típusú transzformáció), a (2) pont pedig mindig csökkenti a balrekurzív nemterminálisok számát. □

3.20. Példa. Legyen G a következő nyelvtan:

$$\begin{array}{lll} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, Sb \\ C & \to & SB \,|\, CC \,|\, a. \end{array}$$

Adjuk meg a G-vel ekvivalens nem balrekurzív nyelvtant.

1. lépés. Megszüntetjük a közvetlen balrekurziót. Egyetlen közvetlen balrekurzív nemterminális van, a C. A 2 típusú transzformáció C-re történő alkalmazásával a következő nyelvtant kapjuk:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, Sb \\ C & \to & SB \,|\, a \,|\, SBC' \,|\, aC' \\ C' & \to & C \,|\, CC'. \end{array}$$

2. lépés. A kapott nyelvtanban meghatározzuk a balrekurzív szimbólumokat. A 3.15. lemmában szereplő algoritmust alkalmazva kapjuk, hogy $H_S = H_B = H_C = \{B, C, S\}$, tehát mindhárom nemterminálisunk balrekurzív. Először S balrekurzivitását szüntetjük meg. Ehhez a $B \to Sb$, $C \to SB$ és $C \to SBC'$ szabályokra kell 1 típusú transzformációt alkalmazni (úgy, hogy mindhárom szabály esetében S helyére az alternatíváit helyettesítjük). Ekkor az alábbi nyelvtant kapjuk:

$$\begin{array}{lcl} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, BCb \,|\, ab \\ C & \to & BCB \,|\, aB \,|\, a \,|\, BCBC' \,|\, aBC' \,|\, aC' \\ C' & \to & C \,|\, CC'. \end{array}$$

Ezen nyelvtan esetében $H_S = \{B, C\}$, tehát S már nem balrekurzív. Ugyanakkor B közvetlenül balrekurzív lett, tehát a következő lépésben ezt kell megszüntetni.

3. lépés. B közvetlen balrekurzivitásának megszüntetése. A megfelelő 2 típusú transzformáció alkalmazásával a következő nyelvtant kapjuk.

$$\begin{array}{lcl} S & \to & BC \,|\, a \\ B & \to & CS \,|\, ab \,|\, CSB' \,|\, abB' \\ B' & \to & Cb \,|\, CbB' \\ C & \to & BCB \,|\, aB \,|\, a \,|\, BCBC' \,|\, aBC' \,|\, aC' \\ C' & \to & C \,|\, CC'. \end{array}$$

Most $H_B = H_C = \{B, C\}$, tehát mind B mind C balrekurzív. Az algoritmus B balrekurzivitásának megszüntetésével folytatódhat. A befejezést az olvasóra bízzuk. □

3.2. Környezetfüggetlen nyelvtanok normálformái

Először teszünk egy olyan észrevételt, melyre később szükségünk lesz.

3.21. Észrevétel. Vegyük a $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtant és az alábbi sorrendben futtassuk le rá a következő algoritmusokat:

- ε-mentesítés (3.5. lemma)
- láncszabály-mentesítés (3.2. lemma)
- felesleges szimbólumok elhagyása (3.12. lemma).

Ha az algoritmusokat a fenti sorrendben hajtjuk végre, akkor egyik algoritmus sem rontja el a nyelvtannak azt a tulajdonságát, amelyet az őt megelőző algoritmus eredményezett, ezért eredményül egy ε-mentes, láncszabálymentes nyelvtant kapunk, mely nem tartalmaz felesleges szimbólumokat.

□

(Megjegyezzük, hogy ez nem lenne igaz, ha például, először a láncszabály-mentesítést majd utána az ε-mentesítést hajtanánk végre. Valóban, az ε-mentesítéssel újabb láncszabályok keletkezhetnek.)

3.2.1. Chomsky-normálalakra hozás

Ebben a fejezetben bevezetjük a Chomsky normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan fogalmát és megmutatjuk, hogy minden G környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Chomsky normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan.

3.22. Definíció. Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan *Chomsky-normálformájú* (vagy Chomsky normálalakban van), ha P-ben csak $S \to \varepsilon$, $A \to BC$ és $A \to a$ alakú szabályok vannak. Ha azonban $S \to \varepsilon \in P$, akkor S nem szerepel semelyik P-beli szabály jobb oldalán.

3.23. Tétel. *Minden $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Chomsky-normálformájú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan.*

Bizonyítás. A 3.21. észrevétel értelmében feltehetjük, hogy G ε- és láncszabály mentes. Ezek után G'-t két lépésben konstruáljuk meg.

1. lépés: Megadunk egy $G_1 = (N_1, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, mely ekvivalens G-vel, és csak $S \to \varepsilon$, $A \to a$ és $A \to A_1 \dots A_n$ alakú szabályokat tartalmaz, ahol $a \in \Sigma$, $n \geq 2$ és $A, A_1, \dots, A_n \in N_1$. Evégett legyen

- $N_1 = N \cup \{a' \mid a \in \Sigma\}$
- P_1 a legszűkebb halmaz, amire a következők teljesülnek:
  - ha $S \to \varepsilon \in P$, akkor $S \to \varepsilon \in P_1$
  - ha $A \to a \in P$, akkor $A \to a \in P_1$
  - ha $A \to X_1 \dots X_n \in P$, ahol $n \geq 2$, akkor $A \to X_1' \dots X_n' \in P_1$, ahol $X_i' = \begin{cases} X_i, \text{ ha } X_i \in N \\ a', \text{ ha } X_i = a \in \Sigma \end{cases}$
  - minden $a \in \Sigma$-ra legyen $a' \to a \in P_1$.

Könnyű belátni, hogy $L(G_1) = L(G)$. Jelöljük evégett minden $w \in \Sigma^*$ esetén H_w-vel az összes olyan $w' \in (\Sigma \cup \{a' \mid a \in \Sigma\})^*$ szó halmazát, melyeket úgy kapunk w-ből, hogy valamennyi (esetleg 0) benne szereplő $a \in \Sigma$ betűt a'-vel helyettesítünk.

Ekkor n szerinti indukcióval igazolható a következő állítás: minden $A \in N$ és $w \in \Sigma^*$ esetén

$$A \Rightarrow_G^n w \iff (\exists w' \in H_w) A \Rightarrow_{G_1}^n w'.$$

Továbbá, nyilvánvaló, hogy minden $w' \in H_w$-re, $w' \Rightarrow_{G_1}^m w$, ahol m a w' szóban szereplő a' alakú nemterminálisok száma. Következésképpen

$$S \Rightarrow_G^* w \iff (\exists w' \in H_w) S \Rightarrow_{G_1}^* w' \Rightarrow_{G_1}^* w,$$

tehát $L(G_1) = L(G)$.

2. lépés: Most megkonstruáljuk G_1-ből a kívánt $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtant. Legyen P' a legszűkebb halmaz, amire az alábbiak teljesülnek:

- ha $S \to \varepsilon \in P_1$, akkor $S \to \varepsilon \in P'$,

- ha $A \to a \in P_1$, akkor $A \to a \in P'$,
- ha $A \to BC \in P_1$, akkor $A \to BC \in P'$,
- ha $A \to A_1 \dots A_n$ $(n > 2)$ $\in P_1$, akkor az

$$\begin{array}{rcll} A & \to & A_1\langle A_2 \dots A_n\rangle, & (\dagger) \\ \langle A_2 \dots A_n\rangle & \to & A_2\langle A_3 \dots A_n\rangle, & \\ & \vdots & & \\ \langle A_{n-1}A_n\rangle & \to & A_{n-1}A_n & \end{array}$$

  szabályok P'-ben vannak, ahol $\langle A_2 \dots A_n\rangle, \dots, \langle A_{n-1}A_n\rangle$ új nemterminálisok.

Legyen továbbá $N' = N_1 \cup \{$ új nemterminálisok $\}$.
Nyilvánvaló, hogy G' Chomsky-normálalakban van. Azt kell még megmutatni, hogy $L(G') = L(G_1)$.
Ehhez elegendő belátni, hogy minden $A \in N_1$ és $w \in \Sigma^*$ esetén

$$A \Rightarrow^*_{G_1,l} w \iff A \Rightarrow^*_{G',l} w.$$

"$\Rightarrow$" bizonyítása: Tegyük fel, hogy $A \Rightarrow^m_{G_1,l} w$ valamely $m \geq 1$-re. m szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy $A \Rightarrow^*_{G',l} w$.
Ha $m = 1$, akkor egyetlen P_1-beli szabályt alkalmaztunk, amely definíció szerint benne van P'-ben is, ezért $A \Rightarrow^m_{G',l} w$ is teljesül.
Ha $m \geq 1$ és $A \Rightarrow^{m+1}_{G_1,l} w$, akkor a levezetés felírható

$$A \Rightarrow_{G_1,l} A_1 \dots A_n \Rightarrow^m_{G_1,l} w_1 \dots w_n = w$$

alakban, ahol az $A \to A_1 \dots A_n$ szabály P_1-ben van és minden $1 \leq i \leq n$-re $A_i \Rightarrow^{m_i}_{G_1,l} w_i$, valamely $m_i < m$-re. (Ez úgy jön ki, hogy $m_i \leq m - n + 1$, tehát $m \geq n \geq 2$ miatt $m_i \leq m-n+1 = m-(n-1) < m$.) Így az indukciós feltevés miatt minden $1 \leq i \leq n$-re $A_i \Rightarrow^*_{G',l} w_i$ is teljesül.
Másrészt, ha $n = 2$, akkor az $A \to A_1A_2$ szabály P'-ben is benne van, tehát

$$A \Rightarrow_{G',l} A_1A_2 \Rightarrow^*_{G',l} w_1w_2 = w.$$

Ha viszont $n > 2$, akkor a fenti, $(\dagger)$-gal jelölt szabályok vannak P'-ben és ezért

$$\begin{array}{rlll} A & \Rightarrow_{G',l} & A_1\langle A_2 \dots A_n\rangle & (\dagger\dagger) \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1\langle A_2 \dots A_n\rangle & \\ & \Rightarrow_{G',l} & w_1A_2\langle A_3 \dots A_n\rangle & \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1w_2\langle A_3 \dots A_n\rangle & \\ & & \dots & \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1w_2 \dots w_{n-2}\langle A_{n-1}A_n\rangle & \\ & \Rightarrow_{G',l} & w_1w_2 \dots w_{n-2}A_{n-1}A_n & \\ & \Rightarrow^*_{G',l} & w_1w_2 \dots w_{n-2}w_{n-1}w_n = w. & \end{array}$$

"$\Leftarrow$" bizonyítása: Most tegyük fel, hogy $A \Rightarrow^m_{G',l} w$ valamely $m \geq 1$-re. m szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy $A \Rightarrow^*_{G_1,l} w$. Lényegében az előző irányú bizonyítást fordítjuk meg.

Ha $m = 1$, akkor egyetlen P'-beli szabályt alkalmaztunk, amely definíció szerint benne van P_1-ben is, ezért $A \Rightarrow^m_{G_1,l} w$ is teljesül.

Ha $A \Rightarrow^{m+1}_{G_1,l} w$, akkor két eset lehetséges.

Az egyik, amikor a levezetés felírható $A \Rightarrow_{G',l} A_1A_2 \Rightarrow^m_{G',l} w_1w_2 = w$ alakban, ahol $A_1, A_2 \in N_1$. Ekkor az $A \to A_1A_2$ szabály P_1-ben is benne van, mivel azokat változtatás nélkül vettük át. Másrészt, az indukciós feltevés miatt, $i = 1, 2$-re $A_i \Rightarrow^*_{G_1,l} w_i$, tehát $A \Rightarrow_{G_1,l} A_1A_2 \Rightarrow^*_{G_1,l} w_1w_2 = w$.

A másik eset, amikor az $A \Rightarrow^{m+1}_{G',l} w$ levezetés (††) alakban írható fel. Ekkor, ugyancsak definíció szerint az $A \to A_1 \dots A_n$ szabály P_1-ben van. Másrészt, az indukciós feltevés szerint minden $1 \leq i \leq n$-re $A_i \Rightarrow^*_{G_1,l} w_i$ is teljesül. Mindezt összevetve, kapjuk, hogy

$$A \Rightarrow_{G_1,l} A_1 \dots A_n \Rightarrow^*_{G_1,l} w_1 \dots w_n = w.$$

$\square$

3.2.2. Greibach normálalakra hozás

Ebben a fejezetben bevezetjük a Greibach normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan fogalmát és megmutatjuk, hogy minden G környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Greibach normálformájú környezetfüggetlen nyelvtan.

Előbb azonban felelevenítünk néhány, a parciálisan rendezett halmazokra vonatkozó fogalmat.

Egy A halmaz feletti $< \subseteq A \times A$ reláció *szigorú parciális rendezés*, ha irreflexív és tranzitív, azaz

- $\forall a \in A$-ra $a \not< a$ és
- $\forall a, b, c \in A$-ra, ha $a < b$ és $b < c$, akkor $a < c$.

Ha $<$ szigorú parciális rendezés, akkor az $(A, <)$ párt *szigorú parciálisan rendezett halmaznak* nevezzük. Vegyük észre, hogy szigorú parciális rendezés esetén lehet két olyan elem, mondjuk a és b, amelyekre sem $a < b$ sem $b < a$ nem teljesül. Például, tetszőleges H halmaz összes részhalmazainak halmazán a $\subset$ (szigorú tartalmazás) egy szigorú parciális rendezés.

A $<$ szigorú parciális rendezés *lineáris rendezés*, ha $\forall a, b \in A$-ra $a < b$ vagy $b < a$ vagy $a = b$ teljesül. Tehát lineáris rendezés estén már bármelyik két elem összehasonlítható. Ha A egy véges halmaz, akkor minden A feletti $<$ lineáris rendezést megadhatunk az A elemeinek azon $a_1, a_2, \dots, a_n$ felsorolásával, amelyre teljesül, hogy $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Fordítva is igaz, az A elemeinek minden felsorolása egy lineáris rendezést definiál az A halmazon.

Például,

$$\text{ha } H = \{a, b, c\}, \text{ akkor } (2^H, \subset) \text{ szigorú parciálisan rendezett halmaz}$$

(ahol 2^H jelöli H összes részhalmazainak halmazát). Teljesül, hogy $\emptyset \subset \{a\}$, $\{a\} \subset \{a, b\}$, de az $\{a\}$ és $\{b\}$, valamint az $\{a, b\}$ és $\{b, c\}$ halmazok összehasonlíthatatlanok.

Ha A véges halmaz, akkor minden A feletti $<$ szigorú parciális rendezés beágyazható egy lineáris rendezésbe, amely a következőképpen értendő[1].

3.24. Lemma. Minden $(A, <)$ szigorú parciálisan rendezett véges halmaz esetén megadható az A elemeinek olyan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ felsorolása, melyre teljesül, hogy minden $a, b \in A$ esetén, ha $a < b$ és $a = a_i$ és $b = a_j$, akkor $i < j$. (Ez utóbbit úgy is mondjuk, hogy a felsorolás respektálja a $<$ relációt.)

Bizonyítás. Mivel A véges halmaz, van olyan $a \in A$ amelyiknél nincs kisebb elem, vagyis nincs olyan $b \in A$, amelyre $b < a$. (Az ilyen a elemet minimálisnak nevezzük.) Válasszunk ki egy minimális a elemet és legyen $a_1 = a$. Ezután tekintsük az $A \setminus \{a\}$ halmazt. Ismét válasszunk ki egy minimális elemet, legyen ez b és legyen $a_2 = b$. Tekinstük az $A \setminus \{a, b\}$ halmazt. Ezt az eljárást folytatva, amíg a halmaz kiürül, kapjuk az A-nak a kívánt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ felsorolását. □

Megjegyezzük, hogy egy adott A szigorú parciálisan rendezett halmaznak több beágyazása is lehetséges, mert az egyes fázisokban több minimális elem is választható. Például, a fenti $(2^H, \subset)$ szigorú parciálisan rendezett halmaz esetében az

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\},$$

$$\emptyset, \{c\}, \{b\}, \{a\}, \{b, c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\},$$

és

$$\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\},$$

felsorolások mindegyike respektálja a $\subset$ relációt.

3.25. Definíció. Egy $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan *Greibach-normálformájú* (vagy Greibach normálalakban van), ha ε mentes és P-ben bármely szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $a \in \Sigma$ és $\alpha \in N^*$.

Ha egy nyelvtan Greibach normálformában van, akkor az $S \Rightarrow \varepsilon$ deriváció kivételével minden deriváció minden egyes lépése pontosan egy terminális szimbólumot ír ki. Tehát egy Greibach normálformában lévő nyelvtanban bármely ε-tól különböző szó levezetése pontosan annyi lépésben történik, mint amennyi a szónak a hossza. Továbbá, ha egy Greibach normálformában lévő nyelvtanhoz az ismert módon veremautomatát konstruálunk, akkor az így kapott veremautomata minden egyes lépésben olvas legalább egy input szimbólumot, tehát nem lesznek ε-mozgásai.

3.26. Tétel. *Minden $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtanhoz van vele ekvivalens Greibach-normálformájú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ környezetfüggetlen nyelvtan.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $G = (N, \Sigma, P, S)$, ε- és láncszabálymentes és nem balrekurzív. (Mindezt a 3.2. és 3.5. Lemmák és a 3.19. tétel miatt az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük.) A $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtant ismét két lépésben adjuk meg.

[1] Az állítás bizonyos feltételek mellett igaz nem véges halmazokra is, számunkra azonban elegendő csak a véges esetet vizsgálni.

1. lépés: Megadunk egy G-vel ekvivalens $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant, amiben minden szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $a \in \Sigma$ és $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$.

Definiáljuk evégett a $<$ relációt a nemterminálisok N halmaza felett a következőképpen:

$$\forall A, B \in N\text{-re } A < B \iff \exists \alpha : \ A \Rightarrow^+ B\alpha.$$

Speciálisan, ha $A \to B\alpha$ egy szabály, akkor $A < B$.

Ez a $<$ reláció szigorú parciális rendezés, mert:

- irreflexív, mivel G nem balrekurzív és ezért nincs olyan A nemterminális, amelyre $A \Rightarrow^+ A\alpha$ (lásd 3.14. definíció),
- és tranzitív, mivel ha $A \Rightarrow^+ B\alpha$ és $B \Rightarrow^+ C\beta$, akkor $A \Rightarrow^+ C\beta\alpha$.

Ágyazzuk be a $<$ szigorú parciális rendezés egy lineáris rendezésbe, vagyis adjuk meg N-nek egy $A_1, A_2, \ldots, A_n$ felsorolását, ami respektálja a $<$-t (lásd 3.24. lemma). Akkor ezen felsorolás rendelkezik a következő tulajdonsággal:

> minden $1 \leq i \leq n$-re és $A_i \to \gamma$ szabályra, $\gamma = \varepsilon$ vagy γ első betűje terminális vagy az $A_{i+1}, \ldots, A_n$ nemterminálisok valamelyike. Ez utóbbi azért igaz, mert ha a szabály $A_i \to B\gamma'$, akkor $A_i < B$, ezért $B \in \{A_{i+1}, \ldots, A_n\}$.
>
> Ebből következik, hogy A_n minden alternatívája vagy ε vagy terminálissal kezdődik.)

Ezután alakítsuk át G-t a következőképpen.

Minden $i = n-1, \ldots, 1$-re

minden $j = i+1, \ldots, n$-re

minden $A_i \to A_j\alpha$ alakú szabályra hajtsunk végre 1-típusú transzformációt az $A_i \to A_j\alpha$ és az $A_j \to \gamma_1 | \ldots | \gamma_m$ szabályokkal, ahol $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ az A_j összes alternatívái. (Vagyis helyettesítjük az $A_i \to A_j\alpha$ szabályt az $A_i \to \gamma_1\alpha, \ldots, A_i \to \gamma_m\alpha$ szabályokkal.)

Vegyük észre, hogy a j szerinti ciklus lefutása után A_i minden alternatívája vagy ε vagy terminális betűvel kezdődik.

Ezért az i szerinti ciklus lefutása után egy olyan $G_1 = (N, \Sigma, P_1, S)$ nyelvtant kapunk, amelyben minden szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$. Továbbá, G_1 ekvivalens G-vel, hiszen az átalakítás során csak 1-típusú transzformációkat hajtottunk végre, melyek megőrzik a nyelvtan által generált nyelvet (lásd 3.16. lemma).

2. lépés: Most G_1-ből kiindulva megkonstruáljuk a keresett $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtant. Legyen evégett

- $N' = N \cup \{a' \mid a \in \Sigma\}$,
- P' a legszűkebb olyan halmaz, amire teljesül, hogy
  - ha $S \to \varepsilon \in P_1$, akkor $S \to \varepsilon \in P'$,
  - ha $A \to aX_1 \ldots X_m \in P_1$, akkor $A \to aX_1' \ldots X_m' \in P'$, ahol

$$X_i' = \begin{cases} X_i & \text{ha } X_i \in N \\ a' & \text{ha } X_i = a \in \Sigma, \end{cases}$$

- minden $a \in \Sigma$-ra $a' \to a \in P'$.

Nyilvánvaló, hogy Greibach normálalakban van. Továbbá, $L(G') = L(G_1)$, ami ugyanúgy bizonyítható, mint a 3.23. tétel első lépésében. □

Összefoglalás

Tetszőleges $G = (N, \Sigma, P, S)$ nyelvtan átalakítható vele ekvivalens

- Chomsky normálalakú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtanná (lásd 3.23. tétel).

  ($L(G) = L(G')$ és P'-ben minden szabály $S \to \varepsilon$, $A \to BC$ vagy $A \to a$ alakú. Ha $S \to \varepsilon \in P'$, akkor S nem szerepel semelyik szabály jobb oldalán.)

- Greibach normálalakú $G' = (N', \Sigma, P', S)$ nyelvtanná (lásd 3.26. tétel).

  ($L(G) = L(G')$ és minden szabály $S \to \varepsilon$ vagy $A \to a\alpha$ alakú, ahol $\alpha \in N^*$.)

3.3. Parikh tétel

Jelöljük $\mathbb{N}$-nel a nemnegatív egész számok halmazát. Ebben a fejezetben központi szerepet játszanak majd az $\mathbb{N}$ feletti $n \geq 1$ dimenziós vektorok, melyek halmazát $\mathbb{N}^n$-nel jelöljük.

Vektorok összeadását a komponensenkénti összeadással definiáljuk, továbbá egy $t \in \mathbb{N}^n$ vektornak egy $m \in \mathbb{N}$ nemnegatív egész számmal való skalár szorzatán azt az mt vektort értjük, amelyet úgy kapunk, hogy t minden komponensét megszorozzuk m-mel. Vagyis, ha

$$t = (a_1, \ldots, a_n) \text{ és } t' = (b_1, \ldots, b_n),$$

akkor

$$t + t' = (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n) \text{ és } mt = (m \cdot a_1, \ldots, m \cdot a_n).$$

3.27. Definíció. Legyen $n \geq 1$ egy tetszőleges egész szám.

(1) Egy $S \subseteq \mathbb{N}^n$ halmaz *lineáris*, ha van olyan $k \geq 0$ és vannak olyan $t_0, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}^n$ vektorok, hogy

$$S = \{t_0 + n_1 t_1 + \ldots + n_k t_k \mid n_1, \ldots n_k \in \mathbb{N}\} = \{t_0 + \sum_{j=1}^{k} n_j t_j \mid n_j \in \mathbb{N}\}.$$

(2) Egy $S \subseteq \mathbb{N}^n$ halmaz *féllineáris*, ha véges sok lineáris halmaz egyesítése. □

A definíció miatt nyilvánvaló, hogy a féllineáris vektorhalmazok zártak az egyesítésre, vagyis ha S és S' féllineáris, akkor $S \cup S'$ is féllineáris. (Ugyanez lineáris vektorhalmazokra nem igaz.)

3.28. Definíció. Legyen Σ egy ábécé, és $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ az ábécé elemeinek egy a továbbiakban rögzített felsorolása.

1. Tetszőleges $x \in \Sigma^*$-ra az x *a_i-hosszát* $|x|_{a_i}$-val jelöljük és értjük alatta az x-ben szereplő a_i-k számát (multiplicitással számolva).

2. Definiáljuk a $par : \Sigma^* \to \mathbb{N}^n$ leképezést a következő módon: minden $x \in \Sigma^*$-ra $par(x) = (|x|_{a_1}, \ldots, |x|_{a_n})$. A par függvényt *Parikh függvénynek*, $par(x)$-et az x *Parikh vektorának* nevezzük.

3. $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén $par(L) = \{par(x) \mid x \in L\}$.

4. L_1 és L_2 nyelvek *betűekvivalensek*, ha $par(L_1) = par(L_2)$. □

A megfelelő definíciókból azonnal következnek az alábbi azonosságok tetszőleges x, y szavakra, $m \in \mathbb{N}$ számra és L_1, L_2 nyelvekre:

1. $par(xy) = par(x) + par(y)$ (vagyis par homomorfizmus, lást 1 fejezet).

2. $par(x^m) = m \cdot par(x)$,

3. $par(L_1 \cup L_2) = par(L_1) \cup par(L_2)$.

3.29. Példa. Legyen $\Sigma = \{a, b\}$. Az

- $x = abbab$ szóra: $|x|_a = 2$, $|x|_b = 3$ és $par(x) = (2, 3)$,
- az $y = aab$ szóra: $|y|_a = 2$, $|y|_b = 1$ és $par(y) = (2, 1)$.

Ezért

$$par(xy) = par(abbabaab) = (4, 4) = (2, 3) + (2, 1) = par(x) + par(y),$$

továbbá,

$$par(x^2) = par(xx) = par(abbababbab) = (4, 6) = 2 \cdot (2, 3) = 2 \cdot par(x).$$

Legyen továbbá

$$L = \{ababb, baabba, abba, aabbababa\}$$

és

$$L' = \{babba, aaabbb, abba, baba, abababaab\}.$$

Ekkor

$$par(L) = par(L') = \{(2, 3), (3, 3), (2, 2), (5, 4)\},$$

tehát L és L' betűekvivalensek.

Vegyük észre, hogy L és L' akkor és csak akkor betűekvivalensek, ha L' magkapható az L-ből oly módon, hogy bizonyos szavakban a betűk sorrendjét megváltoztatjuk (a betűket átrendezzük).

Tekintsük például az $L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ környezetfüggetlen nyelvet, melyre

$$par(L) = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\} = \{(0, 0) + n(1, 1) \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(Tehát $par(L)$ lineáris a $t_0 = (0, 0)$ és $t_1 = (1, 1)$ vektorokkal.

Rendezzük át L $a^n b^n$ alakú szavaiban a betűk sorrendjét $(ab)^n$-re, vagyis $aabb$-t $abab$-re, $aaabbb$-t $ababab$-re, stb.

Kapjuk az $L' = \{(ab)^n \mid n \geq 0\}$ nyelvet. Nyilván $par(L') = \{(0,0),(1,1),(2,2),\ldots\}$, tehát L és L' betűekvivalensek. Ugyanakkor L' reguláris nyelv.

□

Azt szeretnénk megmutatni, hogy az előbbi példában szereplő jelenség általánosan is igaz, vagyis minden környezetfüggetlen nyelvhez megadható vele betűekvivalens reguláris nyelv. Evégett először bebizonyítjuk a következő egyszerű lemmát.

3.30. Lemma. Minden $S \subseteq \mathbb{N}^n$ féllineáris halmazhoz van olyan L reguláris nyelv, melyre $par(L) = S$.

Bizonyítás. a) Először tegyük fel, hogy S egy lineáris halmaz. Akkor léteznek olyan $t_0, \ldots, t_l \in \mathbb{N}^n$ vektorok, hogy $S = \{t_0 + \sum_{j=1}^{l} n_j t_j \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\}$.

Tegyük fel, hogy $t_j = (m_{j_1}, \ldots, m_{j_n})$, ahol $m_{j_1}, \ldots, m_{j_n} \in \mathbb{N}$ minden $0 \leq j \leq l$-re.

Legyen $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$ egy n betűs ábécé és legyen minden $0 \leq j \leq l$-re x_j a következő szó:

$$x_j = a_1^{m_{j_1}} \ldots a_n^{m_{j_n}}.$$

Ekkor $par(x_j) = (m_{j_1}, \ldots, m_{j_n}) = t_j$. Továbbá legyen

$$L = x_0(x_1)^* \ldots (x_l)^*$$

Nyilvánvaló, hogy L reguláris nyelv és megmutatható, hogy $par(L) = S$. Valóban, mivel – másképp felírva –

$$L = \{x_0(x_1)^{n_1} \ldots (x_l)^{n_l} \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\},$$

kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} par(L) &= \{par(x_0(x_1)^{n_1} \ldots (x_l)^{n_l}) \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\} \\ &= \{t_0 + n_1 t_1 + \ldots + n_l t_l \mid n_1, \ldots, n_l \geq 0\} = S. \end{aligned}$$

b) Ha S féllineáris, akkor $S = S_1 \cup \ldots \cup S_k$, ahol minden $1 \leq i \leq k$-re S_i lineáris. Akkor az a) pont szerint minden $1 \leq i \leq k$-ra van olyan L_i reguláris nyelv, melyre $par(L_i) = S_i$.

Legyen $L = L_1 \cup \ldots \cup L_k$. Akkor L reguláris és $par(L) = par(L_1) \cup \ldots \cup par(L_k) = S_1 \cup \ldots \cup S_k = S$. □

Ezen fejezet fő eredménye a következő.

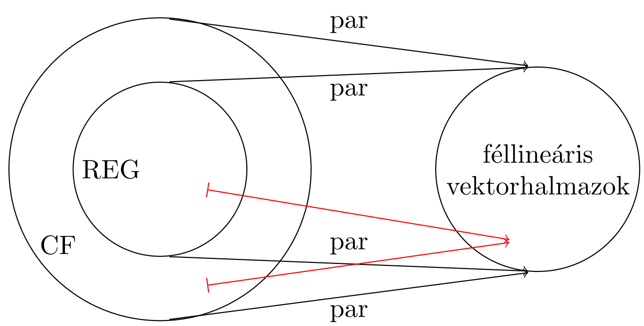
3.31. Tétel. *Tetszőleges $S \subseteq \mathbb{N}^n$-re a következő három állítás ekvivalens:*

(1) S féllineáris,

(2) $S = par(L)$, valamely L környezetfüggetlen nyelvre,

(3) $S = par(L)$, valamely L reguláris nyelvre.

A tétel állítása a következő ábrán szemléltethető.



Bizonyítás.

(1) $\Rightarrow$ (3) 3.30. lemma.

(3) $\Rightarrow$ (2) Abból következik, hogy minden reguláris nyelv környezetfüggetlen is.

(2) $\Rightarrow$ (1) 3.32. tétel (vagyis Parikh tétele).

□

A következő lépésként bebizonyítjuk Parikh tételét. A bizonyítás előtt felidézzük, hogy egy A nemterminális szimbólum esetén D_A-val jelöljük az A gyökerű derivációs fák halmazát. Továbbá, tetszőleges $F \in D_A$ derivációs fa esetén $fr(F)$-fel jelöljük F határát, vagyis a leveleiről balról jobbra haladva leolvasható szimbólumokból alkotott szót.

3.32. Tétel. (Parikh tétele) *Ha L környezetfüggetlen nyelv, akkor $par(L)$ féllineáris.*

Bizonyítás. Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan és $L = L(G)$.

Legyen $U \subseteq N$ úgy, hogy $S \in U$. Definiáljuk $L_U \subseteq L(G)$ nyelvet a következőképpen: minden $x \in L(G)$-re $x \in L_U$ akkor és csak akkor, ha van olyan $F \in D_S$, melyre

- $fr(F) = x$ (azaz F határa x),
- F nemterminális csúcsai pontosan U elemeivel vannak címkézve oly módon, hogy U minden eleme fel van használva.

Megjegyezzük, hogy egy adott x szóhoz több olyan F derivációs fa is létezhet, amelyik x-nek az L_U-ba tartozását igazolja. Továbbá egy x szó több L_U halmazhba is tartozhat.

Az így definiált halmazokra

$$L = \bigcup_{U \subseteq N, S \in U} L_U,$$

amit a következőképpen bizonyítunk. A definíció miatt a jobb oldal nyilván része a bal oldalnak. Fordítva, legyen $x \in L$. Akkor van olyan F derivációs fa, melynek gyökere S, határa pedig x. Legyen U azon nemterminálisok halmaza, melyek F csúcsaiban szerepelnek. Ekkor $x \in L_U$, tehát x eleme a jobb oldalnak is.

Következésképpen

$$par(L) = \bigcup_{U \subseteq N, S \in U} par(L_U).$$

tehát annak megmutatásához, hogy $par(L)$ féllineáris, elegendő igazolni, hogy tetszőleges (fix) U-ra $par(L_U)$ féllineáris.

Állítás Tetszőleges $U \subseteq N$-re, ahol $S \in U$ a $par(L_U)$ halmaz féllineáris.
Bizonyítás Legyen $||U|| = r$. Megadunk egy féllineáris K halmazt és megmutatjuk, hogy $K = par(L_U)$.

K megadásához bevezetünk további halmazokat.

(1) A $H \subseteq L_U$ nyelvet a következőképpen definiáljuk. Minden $x \in L_U$-ra, $x \in H$ akkor és csak akkor, ha az x L_U-hoz való tartozását igazoló $F \in D_S$ derivációs fák között van olyan, melynek minden útján (gyökértől levélig), minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő. Vegyük észre, hogy H véges.

(2) Minden $A \in U$-ra definiáljuk a $H_A \subseteq \Sigma^* A \Sigma^*$ nyelvet a következőképpen. Minden $x_1, x_2 \in \Sigma^*$-ra, $x_1 A x_2 \in H_A$ akkor és csak akkor, ha van olyan $F \in D_A$, hogy

- $fr(F) = x_1 A x_2$,
- F nemterminális csúcsai U elemeivel vannak címkézve (de nem követeljük meg, hogy U minden elemét fel is használjuk),
- F minden útján minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő.

Észrevesszük, hogy minden A-ra H_A véges. Legyen

$$par(H) = \{s_1, \ldots, s_k\} \quad \text{és} \quad \bigcup_{A \in U} par(H_A) = \{t_1, \ldots, t_l\},$$

ahol $par(H_A) = \{par(x_1 x_2) \mid x_1 A x_2 \in H_A\}$. Legyen továbbá minden $1 \le i \le k$-ra

$$K_i = \{s_i + \sum_{j=1}^{l} n_j t_j \mid n_j \ge 0\}$$

és végül legyen

$$K = K_1 \cup \ldots \cup K_k.$$

Nyilvánvaló, hogy K féllineáris vektorhalmaz, mivel lineáris halmazok egyesítése.

Megmutatjuk, hogy $par(L_U) = K$.

$K \subseteq par(L_U)$ bizonyítása:

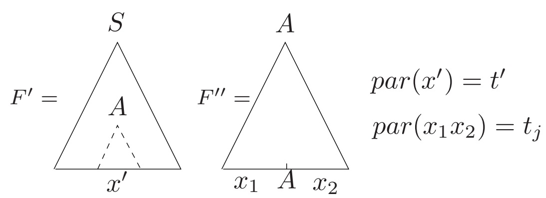
Nyilvánvaló, hogy minden $t \in K$-ra igaz, hogy $t = s_i$ valamely $1 \le i \le k$-ra vagy van olyan $t' \in K$ és $1 \le j \le l$, hogy $t = t' + t_j$.

Megmutatjuk, hogy minden $t \in K$-ra létezik $x \in L_U$, hogy $t = par(x)$. A t felépítése szerinti indukciót alkalmazunk.

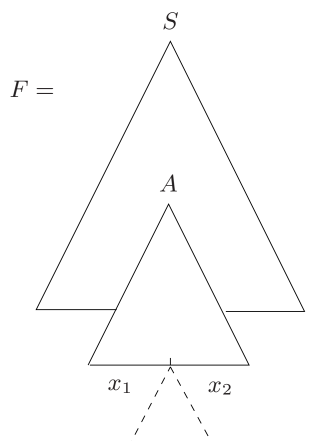
(i) Ha $t = s_i$, akkor létezik $x \in H$, hogy $par(x) = t$. Mivel $H \subseteq L_U$, $x \in L_U$ is teljesül.

(ii) Legyen $t = t' + t_j$, ahol $t' \in K$. Az indukciós feltevés, hogy van olyan $x' \in L_U$, melyre $par(x') = t'$. Akkor, az L_U definíciója miatt, létezik $F' \in D_S$ derivációs fa úgy, hogy $fr(F') = x'$ és F' nemterminális csúcsai pontosan az U elemeivel vannak címkézve. Másrészt létezik $A \in U$ és $x_1 A x_2 \in H_A$ úgy, hogy $par(x_1 A x_2) = par(x_1 x_2) = t_j$. Akkor, a H_A definíciója szerint, létezik $F'' \in D_A$ úgy, hogy $fr(F'') = x_1Ax_2$ és F'' belső csúcsai U elemeivel vannak címkézve.

Mivel $x' \in L_U$, F' pedig x' derivációs fája, F'-nek van A-val címkézett csúcsa.



Konstruáljuk meg az F fát úgy, hogy F'-ben egy A-val címkézett csúcs helyére az F'' fát helyettesítjük.



Legyen $fr(F) = x$. Ekkor $x \in L_U$, mivel F nemterminális csúcsai pontosan U elemeivel vannak címkézve. Másrészt $par(x) = par(x') + par(x_1x_2) = t' + t_j = t$, vagyis amit bizonyítani akartunk.

<u>*$par(L_U) \subseteq K$ bizonyítása:*</u>

Megmutatjuk, hogy minden $x \in L_U$-hoz létezik $t \in K$, hogy $par(x) = t$.

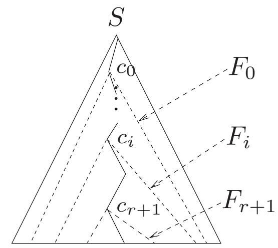
Legyen evégett $x \in L_U$, akkor van olyan $F \in D_S$, melyre $fr(F) = x$ és F nemterminális csúcsai pontosan U elemeivel vannak címkézve. Két eset lehetséges.

1) F útjain (gyökértől levélig) minden nemterminális legfeljebb $(r+1)$-szer fordul elő. Ekkor $x \in H$, tehát valamely $1 \leq i \leq k$-ra $par(x) = s_i$. Mivel $s_i \in K$, ezért ez az eset készen van.

2) F-ben van olyan út, melyen valamely nemterminális $r+1$-nél többször fordul elő. Ekkor F-ben vannak olyan $c_0, \ldots, c_{r+1}$ csúcsok, melyekre teljesülnek a következő feltételek.

- Minden $0 \leq i \leq r$-re c_{i+1} a c_i leszármazottja.

- $c_0, c_1, \ldots, c_{r+1}$ címkéje ugyanaz a nemterminális, melyet jelöljünk A-val,
- A c_1 gyökerű részfában (és így a $c_2, \ldots, c_{r+1}$ gyökerű részfákban is) minden úton minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő.

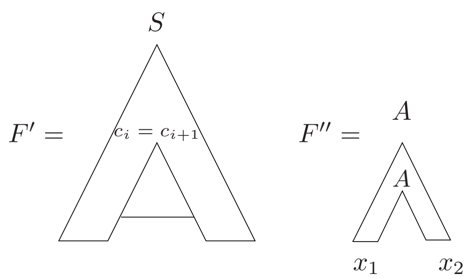


Legyenek $F_0, F_1 \ldots, F_{r+1}$ rendre a $c_0, c_1, \ldots, c_{r+1}$ gyökerű részfák és minden $1 \leq i \leq r+1$-re jelölje címke$(F_i) \subseteq N$ azon nemterminálisok halmazát, amelyek előfordulnak az F_i fában címkeként. Mivel minden $0 \leq i \leq r$-re F_{i+1} az F_i részfája, nyilvánvalóan teljesül a

$$\text{címke}(F_{r+1}) \subseteq \text{címke}(F_r) \subseteq \ldots \subseteq \text{címke}(F_1) \subseteq U$$

tartalmazás. Mivel $||U|| = r$, így van olyan $1 \leq i \leq r$, hogy címke$(F_i) =$ címke(F_{i+1}).

Jelöljük F'-vel azt a fát, amit úgy kapunk F-ből, hogy benne azonosítjuk a c_i és c_{i+1} csúcsokat. Továbbá jelöljük F''-vel azt a fát, amit az F_i fából kapunk úgy, hogy töröljük belőle az F_{i+1} részfát, kivéve annak c_{i+1} gyökerét.



$fr(F') = x'$ $\qquad$ $fr(F'') = x_1 A x_2$

Mivel F_i-re is igaz, hogy benne minden úton minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő, $fr(F'') \in H_A$. Tehát $par(x_1 x_2) = t_j$ valamilyen $1 \leq j \leq l$-re. Így

$$par(x) = par(x') + par(x_1 x_2) = par(x') + t_j$$

valamilyen $1 \leq j \leq l$-re.

A továbbiakban két eset lehetséges:

2.1) F' útjain (gyökértől levélig) minden nemterminális legfeljebb $r+1$-szer fordul elő. Ekkor $x' \in H$ és ezért van olyan $1 \leq i \leq k$, hogy $par(x') = s_i$. Ekkor $par(x) = s_i + t_j \in K$.

2.2) Ha F' nem ilyen, akkor a 2)-ben leírt eljárást folytatva véges számú lépés után kapjuk, hogy
$$par(x) = s_i + \sum_{j=1}^{l} n_j t_j \in K.$$
$\square$

Két érdekes következmény.

3.33. Következmény. Minden L környezetfüggetlen nyelvhez van vele betűekvivalens reguláris nyelv.

Bizonyítás. Következik 3.31. tételből. $\square$

3.34. Következmény. A $\Sigma = \{a\}$ egybetűs ábécé feletti reguláris nyelvek megegyeznek ugyanezen ábécé feletti környezetfüggetlen nyelvekkel.

Bizonyítás. Legyen $L \subseteq \{a\}^*$ egy környezetfüggetlen nyelv. A 3.31. tétel szerint van $L' \subseteq \{a\}^*$ reguláris nyelv, amelyik betűekvivalens L-lel. Az L' szavait az L szavaiból kapjuk betűátrendezéssel. Továbbá, mivel csak egy betűnk van, a betűk átrendezése nem változtatja meg L-et. Ezért $L' = L$. $\square$

Vegyük például a következő G nyelvtant:
$$\begin{aligned} &S \to aaABaBaa \mid aBaAa \mid \varepsilon \\ &A \to BaaAa \mid aaABa \mid aa \\ &B \to aAaBAaa \mid AaaB \mid a. \end{aligned}$$
Ekkor $L(G)$ reguláris nyelv.

3.4. A Chomsky - Schützenberger tétel

Tekintsük a
$$Z_n = \{ \overset{1}{[}\,, \overset{1}{]}\,, \ldots, \overset{n}{[}\,, \overset{n}{]} \},$$
n darab nyitó és záró zárójelből álló ábécét és a
$$G_n: \ S \to \overset{1}{[}\, S\, \overset{1}{]} \Bigm| \ldots \Bigm| \overset{n}{[}\, S\, \overset{n}{]} \Bigm| SS \Bigm| \varepsilon$$
környezetfüggetlen nyelvtant. Legyen $P_n = L(G_n)$. Ekkor P_n nem más, mint a Z_n-ből készíthető szabályos zárójelezések halmaza. A P_n nyelvet *Dyck nyelvnek* is nevezzük.

Például, $n = 3$ esetén P_3 tartalmazza a következő szavakat:
$$\overset{2}{[}\ \overset{2}{]}\,,\ \overset{2}{[}\ \overset{2}{]}\ \overset{1}{[}\ \overset{1}{]}\,,\ \overset{2}{[}\ \overset{1}{[}\ \overset{1}{]}\ \overset{2}{]}\ \overset{1}{[}\ \overset{1}{]}\,,\ \overset{2}{[}\ \overset{1}{[}\ \overset{1}{]}\ \overset{3}{[}\ \overset{3}{]}\ \overset{2}{]}\,, \text{ stb.}$$

A Dyck nyelvek speciális szerepet játszanak a környezetfüggetlen nyelvek elméletében: minden környezetfüggetlen nyelv lényegében egy viszonylag egyszerűen módosított Dyck nyelv. Valójában a szabályos zárójelezésekkel fogható meg a környezetfüggetlen nyelvek azon strukturális tulajdonsága, amely megkülönbözteti őket a reguláris nyelvektől.

3.35. Tétel. *Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén a következő két állítás ekvivalens:*

(1) L környezetfüggetlen,

(2) van olyan $n \geq 2$, $R \subseteq Z_n^*$ reguláris nyelv, $h : Z_n^* \to \Sigma^*$ homomorfizmus, hogy $L = h(P_n \cap R)$.

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1): A P_n nyelv környezetfüggetlen, mert $P_n = L(G_n)$. Továbbá $P_n \cap R$ is környezetfüggetlen, mert a környezetfüggetlen nyelvek zártak a reguláris nyelvvel való metszésre. Végül $h(P_n \cap R)$ is környezetfüggetlen, mert a környezetfüggetlen nyelvek zártak a homomorfizmusra.

(1) $\Rightarrow$ (2): Legyen $L = L(G)$, ahol $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy G Chomsky normálalakban van (lásd 3.23. tétel). Csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor P nem tartalmazza az $S \to \varepsilon$ szabályt.

Definiáljuk a $G' = (N, \Gamma, P', S)$ nyelvtant, ahol

- $\Gamma = \{ \underset{\pi}{\overset{1}{[}}, \underset{\pi}{\overset{1}{]}}, \underset{\pi}{\overset{2}{[}}, \underset{\pi}{\overset{2}{]}} \mid \pi \in P\}$.

- P' a legszűkebb szabályhalmaz, amelyre

  1) ha $\pi = A \to BC \in P$, akkor $A \to \underset{\pi}{\overset{1}{[}} B \underset{\pi}{\overset{1}{]}} \underset{\pi}{\overset{2}{[}} C \underset{\pi}{\overset{2}{]}} \in P'$,

  2) ha $\pi = A \to a \in P$, akkor $A \to \underset{\pi}{\overset{1}{[}} \underset{\pi}{\overset{1}{]}} \underset{\pi}{\overset{2}{[}} \underset{\pi}{\overset{2}{]}} \in P'$.

Nyilvánvaló, hogy $L(G') \subseteq P_\Gamma$, ahol P_Γ a Γ-ból készíthető szabályos zárójelezések halmaza, vagyis G' csak Γ-ból készíthető szabályos zárójelezéseket generál.

Vegyük észre az alábbi két fontos tényt.

1. Ha P-ben m szabály van akkor bijekció létesíthető Γ és Z_{2m} között. Még pontosabban, ha $\pi_1, \ldots, \pi_m$ a P-beli szabályok egy felsorolása, akkor az

$$\underset{\pi_i}{\overset{1}{[}} \mapsto \overset{2i-1}{[}\ ,\quad \underset{\pi_i}{\overset{1}{]}} \mapsto \overset{2i-1}{]}\ ,\quad \underset{\pi_i}{\overset{2}{[}} \mapsto \overset{2i}{[}\ ,\quad \underset{\pi_i}{\overset{2}{]}} \mapsto \overset{2i}{]}\ , 1 \leq i \leq m$$

   megfeleltetés egy bijekció Γ-ból Z_{2m}-be.

2. Van olyan $h : \Gamma^* \to \Sigma^*$ homomorfizmus, melyre $h(L(G')) = L(G)$. Valóban, a következő h leképezés homomorfizmussá való kiterjesztése ilyen:

   - minden $\pi = A \to BC$ szabály esetén

$$h(\underset{\pi}{\overset{1}{[}}) = h(\underset{\pi}{\overset{1}{]}}) = h(\underset{\pi}{\overset{2}{[}}) = h(\underset{\pi}{\overset{2}{]}}) = \varepsilon,$$

- minden $\pi = A \to a$ szabály esetén

$$h(\underset{\pi}{\overset{1}{[}}) = a,\ h(\underset{\pi}{\overset{1}{]}}) = h(\underset{\pi}{\overset{2}{[}}) = h(\underset{\pi}{\overset{2}{]}}) = \varepsilon.$$

A fenti két állításból következik, hogy bizonyítás befejezéséhez elegendő megadni egy olyan $R \subseteq \Gamma^*$ reguláris nyelvet, melyre

$$L(G') = P_\Gamma \cap R.$$

Ugyanis a fentiek értelmében

$$L(G) = h(L(G')) = h(P_\Gamma \cap R) = h(P_{2m} \cap R).$$

Általánosabban, legyen $A \in N$-re $L(G', A) = \{z \in \Gamma^* \mid A \Rightarrow^*_{G'} z\}$. Ekkor nyilvánvalóan $L(G', A) \subseteq P_\Gamma$ is teljesül. Megadunk egy $R_A \subseteq \Gamma^*$ reguláris nyelvet, melyre

$$L(G', A) = P_\Gamma \cap R_A.$$

Ebből nyilván következik a tétel, mivel

$$L(G') = L(G', S) = P_\Gamma \cap R_S.$$

A következőkben megvizsgáljuk, hogy mely tulajdonságokkal kell rendelkeznie egy $z \in P_\Gamma$ szónak ahhoz, hogy $z \in L(G', A)$ is teljesüljön. Meg fogunk adni öt ilyen tuajdonságot. Könnyen belátható, hogy ezen öt tulajdonság mindegyike teljesül tetszőleges $z \in L(G', A)$ szóra (de általában nem teljesül minden P_Γ-beli szóra). Sőt, azt is meg fogjuk mutatni, hogy ezen tulajdonságok elegendőek is ahhoz, hogy azonosítsák az $L(G', A)$-ba tartozó P_Γ-beli szavakat. Az öt tulajdonság a következő:

1) z-ben minden $\pi \in P$ esetén $\underset{\pi}{\overset{1}{]}}$ után $\underset{\pi}{\overset{2}{[}}$ következik,

2) z-ben minden $\pi \in P$-re a $\underset{\pi}{\overset{2}{]}}$ után nem következik balzárójel,

3) z-ben minden $\pi = A' \to B'C' \in P$ esetén $\underset{\pi}{\overset{1}{[}}$ után $\underset{\rho}{\overset{1}{[}}$ következik, ahol ρ B' baloldalú szabály, és $\underset{\pi}{\overset{2}{[}}$ után $\underset{\sigma}{\overset{1}{[}}$ következik, ahol σ C' baloldalú szabály,

4) z-ben minden $\pi = A' \to a \in P$ szabály esetén $\underset{\pi}{\overset{1}{[}}$ után $\underset{\pi}{\overset{1}{]}}$ és $\underset{\pi}{\overset{2}{[}}$ után $\underset{\pi}{\overset{2}{]}}$ következik,

5) z $\underset{\pi}{\overset{1}{[}}$-vel kezdődik, ahol π A baloldalú szabály.

Meg fogjuk mutatni, hogy minden i $\in \{1, \ldots, 5\}$ esetén, az i) tulajdonsággal rendelkező Γ^*-beli szavak egy reguláris nyelvet alkotnak. Ezt úgy bizonyítjuk be, hogy az i) tulajdonsághoz megadunk egy G_i reguláris nyelvtant, amely az i) tulajdonságú szavakat generálja. Ily módon az összes olyan Γ^*-beli szavak, melyek kielégítik mind az öt tulajdonságot, szintén reguláris nyelvet alkotnak: tudniillik, vesszük az egyes tulajdonságokhoz tartozó reguláris nyelvek metszetét. Ez utóbbi reguláris nyelv lesz R_A.

Most megadjuk az egyes tulajdonságokat leíró nyelveket generáló G_i nyelvtanokat.

1) G_1 a következő reguláris nyelvtan:

$$S \to aS \mid \varepsilon, \text{ ahol } a \in \Gamma - \{ \underset{\pi}{\overset{1}{]}} \mid \pi \in P\},$$

$$S \to \underset{\pi}{\overset{1}{]}} \; \underset{\pi}{\overset{2}{[}} S, \text{ minden } \pi \in P\text{-re}.$$

2) G_2 a következő reguláris nyelvtan:

$$S \to aS \mid \varepsilon, \text{ ahol } a \in \Gamma - \{ \underset{\pi}{\overset{2}{]}} \mid \pi \in P\},$$

$$S \to \underset{\pi}{\overset{2}{]}} X, \text{ minden } \pi \in P\text{-re}.$$

$$X \to \underset{\pi}{\overset{2}{]}} X \;\Big|\; \underset{\pi}{\overset{1}{]}} S \;\Big|\; \varepsilon, \text{ minden } \pi \in P\text{-re}.$$

3) G_3 a következő reguláris nyelvtan:

$$S \to aS \mid \varepsilon, \text{ ahol } a \in \Gamma - \{ \underset{\pi}{\overset{1}{[}}, \underset{\pi}{\overset{2}{[}} \mid \pi = A' \to B'C',\ \pi \in P\},$$

$$S \to \underset{\pi}{\overset{1}{[}} X_\pi, \text{ ahol } \pi = A' \to B'C',$$

$$X_\pi \to \underset{\rho}{\overset{1}{[}} X_\rho, \text{ ahol } \pi = A' \to B'C',\ \rho = B' \to D'E',$$

$$X_\pi \to \underset{\rho}{\overset{1}{[}} S, \text{ ahol } \pi = A' \to B'C',\ \rho = B' \to a,$$

$$S \to \underset{\pi}{\overset{2}{[}} Y_\pi, \text{ ahol } \pi = A' \to B'C',$$

$$Y_\pi \to \underset{\sigma}{\overset{1}{[}} X_\sigma, \text{ ahol } \pi = A' \to B'C',\ \sigma = C' \to D'E',$$

$$Y_\pi \to \underset{\sigma}{\overset{1}{[}} S, \text{ ahol } \pi = A' \to B'C',\ \sigma = C' \to a.$$

4) G_4 a következő reguláris nyelvtan:

$S \to aS \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma - \{ \overset{1}{\underset{\pi}{[}}, \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \mid \pi = A' \to a,\ \pi \in P\}$,

$S \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} \overset{1}{\underset{\pi}{]}} S$ és $S \to \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \overset{2}{\underset{\pi}{]}} S$, ahol $\pi = A' \to a$.

5) G_5 a következő reguláris nyelvtan:

$S \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} X$, ahol $\pi = A \to BC$ vagy $\pi = A \to a$,

$X \to aX \mid \varepsilon$, ahol $a \in \Gamma$.

Legyen tehát $R_A = L(G_1) \cap \ldots \cap L(G_5)$, ami nyilvánvalóan reguláris nyelv. Állítjuk, hogy $L(G', A) = P_\Gamma \cap R_A$, vagyis

$$\forall x \in \Gamma^* : A \Rightarrow^*_{G'} x \iff x \in P_\Gamma \cap R_A.$$

A következőkben ezt az állítást bizonyítjuk be.

$\Rightarrow$ irány: Teljesül, mert minden A-ból levezetett x szó szabályosan zárójelezett és rendelkezik mind az öt tulajdonsággal.

$\Leftarrow$ irány: $|x|$ szerinti indukcióval.

(i) A legrövidebb szó $P_\Gamma \cap R_A$-ban $x = \overset{1}{\underset{\pi}{[}} \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \overset{2}{\underset{\pi}{]}}$ alakú, ahol $\pi = A \to a$.

Tehát $A \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P'$, és így $A \Rightarrow_{G'} x$.

(ii) Minden egyéb szó $P_\Gamma \cap R_A$-ban $x = \overset{1}{\underset{\pi}{[}} y \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} z \overset{2}{\underset{\pi}{]}}$ alakú, ahol $\pi = A \to BC$, $y \in P_\Gamma \cap R_B$ és $z \in P_\Gamma \cap R_C$. Ugyanis, $y \in P_\Gamma$, mivel y is szabályos zárójelezés. Továbbá, $y \in R_B$, mert nyilván y is rendelkezik az 1)–5) tulajdonságokkal és a 3) tulajdonság miatt $\overset{1}{\underset{\rho}{[}}$-val kezdődik, ahol ρ B baloldalú szabály. Tehát $y \in P_\Gamma \cap R_B$. Hasonlóan látható, hogy $z \in P_\Gamma \cap R_C$.

Az indukciós feltevés szerint $B \Rightarrow^*_{G'} y$ és $C \Rightarrow^*_{G'} z$. Továbbá, G' konstrukciója szerint $A \to \overset{1}{\underset{\pi}{[}} B \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} C \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \in P'$.

Összevetve, kapjuk, hogy $A \Rightarrow_{G'} \overset{1}{\underset{\pi}{[}} B \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} C \overset{2}{\underset{\pi}{]}} \Rightarrow^*_{G'} \overset{1}{\underset{\pi}{[}} y \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} z \overset{2}{\underset{\pi}{]}} = x$.

Tehát $L(G') = P_\Gamma \cap R_S$ (mivel $L(G', S) = L(G')$) és ezért $L(G) = h(L(G')) = h(P_\Gamma \cap R_S)$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

$\square$

Megjegyzés: A bizonyításban szereplő L_i reguláris nyelvek megadhatók reguláris kifejezésekkel is. Például: $L_1 = \bigcup_{\pi \in P} \left(\Gamma^*_\pi \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \overset{2}{\underset{\pi}{[}} \Gamma^*_\pi\right)^*$, ahol $\Gamma_\pi = \Gamma - \{ \overset{1}{\underset{\pi}{]}} \}$. Hasonlóan, az

L_i reguláris nyelvek megadhatók automatával is.

3.36. Következmény. *Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén a következő két állítás ekvivalens:*

(1) L környezetfüggetlen,

(2) van olyan Δ ábécé, $R \subseteq \Delta^*$ reguláris nyelv, léteznek $h : \Delta^* \to \Sigma^*$ és $g : \Delta^* \to Z_2^*$ homomorfizmusok, hogy $L = h(g^{-1}(P_2) \cap R)$.

Bizonyítás. (2) $\Rightarrow$ (1): Ez az irány nyilvánvaló, mert mint láttuk P_2 környezetfüggetlen, továbbá a környezetfüggetlen nyelvek zártak a homomorfizmusra, az inverz homomorfizmusra és a reguáris nyelvvel való meteszetre.
(1) $\Rightarrow$ (2): Ez az irány pedig köveztezik a 3.35. Tételből és abból, hogy

$$- \ g(\overset{i}{[}\,) = \overset{1}{[}\ \underbrace{\overset{2}{[}\ \ldots\ \overset{2}{[}}_{i}\ \overset{1}{[} \quad \text{és } g(\overset{i}{]}\,) = \overset{1}{]}\ \underbrace{\overset{2}{]}\ \ldots\ \overset{2}{]}}_{i}\ \overset{1}{]}\ , \ i = 1, \ldots, n$$

leképezésekkel definiált $g : Z_n^* \to Z_2^*$ homomorfizmusra, $g^{-1}(P_2) = P_n$. □

Más szóval: minden környezetfüggetlen nyelv megkapható a P_2-ből homomorfizmus, az inverz homomorfizmus és a reguáris nyelvvel való meteszés véges sokszori alkalmazásával.

3.5. Környezetfüggetlen nyelvek fixpont jellemzése

3.5.1. Parciálisan rendezett halmazok

Egy $\leq \subseteq A \times A$ reláció *parciális rendezés*, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, azaz $\forall a \in A$-ra $a \leq a$, $\forall a, b \in A$-ra, ha $a \leq b$ és $b \leq a$, akkor $a = b$ és $\forall a, b, c \in A$-ra, ha $a \leq b$ és $b \leq c$, akkor $a \leq c$. Ha $\leq$ parciális rendezés, akkor az $(A, \leq)$ párt parciálisan rendezett halmaznak nevezzük.

3.37. Megjegyzés. 1) Legyen $< \subseteq A \times A$ szigorú parciális rendezés (a 3.2.2 alfejezetben megadott definíció szerint). Akkor $\leq \subseteq A \times A$ parciális rendezés, ahol $\forall a, b \in A$ esetén $a \leq b$ akkor és csak akkor, ha $a < b$ vagy $a = b$.
2) Legyen $\leq \subseteq A \times A$ parciális rendezés. Akkor $< \subseteq A \times A$ szigorú parciális rendezés, ahol $\forall a, b \in A$ esetén $a < b$ akkor és csak akkor, ha $a \leq b$ és $a \neq b$.

□

3.38. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $A \subseteq P$. Egy $a \in A$ elem az A *legkisebb eleme*, ha minden $b \in A$-ra $a \leq b$.

3.39. Lemma. (A legkisebb elem unicitása.) Ha $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $A \subseteq P$, akkor A-nak legfeljebb egy legkisebb eleme van.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy $a, a' \in A$ legkisebb elemek. Ekkor $a \leq a'$, mert a legkisebb elem és $a' \leq a$, mert a' is legkisebb elem. Mivel $\leq$ antiszimmetrikus, kapjuk, hogy $a = a'$. □

3.40. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $A \subseteq P$. Egy $a \in P$ elem az A egy *felső korlátja*, ha $\forall b \in A$-ra $b \leq a$. Ha ilyen elem létezik, akkor A felülről korlátos. Ha az A felső korlátai a halmazának van legkisebb eleme, akkor azt A *legkisebb felső korlátjának* nevezzük és $\bigvee A$-val jelöljük. □

A 3.39. lemmából következik, hogy ha $\bigvee A$ létezik, akkor az egyértelműen meghatározott.

3.41. Példa. Legyen H egy halmaz, $\mathcal{P}(H)$ pedig a H összes részhalmazainak a halmaza. Ekkor $(\mathcal{P}(H), \subseteq)$ parciálisan rendezett halmaz. Legyen továbbá $A \subseteq \mathcal{P}(H)$. Akkor $\bigvee A = \bigcup_{X \in A} X$ az A legkiFebb felső korlátja, ami a következőképpen látható be.

Mivel minden $X \in A$-ra $X \subseteq \bigvee A$, ezért $\bigvee A$ az A felső korlátja.

Most indirekt bizonyítással belátjuk, hogy $\bigvee A$ a legkisebb felső korlát. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis, hogy

A-nak van olyan Y felső korlátja, melyre $\bigvee A \not\subseteq Y$.

Akkor van olyan $x \in \bigvee A$, melyre $x \notin Y$,

akkor van olyan $X \in A$ és $x \in X$, melyre $x \notin Y$,

akkor van olyan $X \in A$, melyre $X \not\subseteq Y$,

tehát Y nem felső korlátja A-nak, ami ellentmondás.

□

3.42. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz.

- Ha $a_0, a_1, \ldots$ P-beli sorozat esetén létezik $\bigvee\{a_0, a_1, \ldots\}$, akkor ezt $\bigvee a_n$-nel jelöljük.
- Egy $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$ alakú P-beli sorozatot *P-beli felszálló láncnak* nevezünk.

□

3.43. Definíció. Egy $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz *teljes*, ha

- van legkisebb eleme,
- minden $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$ P-beli felszálló lánc esetén létezik $\bigvee a_n$.

3.44. Példa.

- $(\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}, \leq)$ nem teljes, mert nincs legkisebb eleme
- $(\{0, 1, 2, \ldots\}, \leq)$ nem teljes, mert nincs minden felszálló láncnak felső korlátja,
- $(\{0, 1, 2, \ldots, \infty\}, \leq)$ teljes, ahol minden n-re $n \leq \infty$.

- $([0,1), \leq)$ nem teljes, mert bár létezik legkisebb eleme, de például az $1-1/n$ felszálló láncnak nem létezik a halmazhoz tartozó felső korlátja.

- $([0,1], \leq)$ teljes.

Most egy olyan példát adunk teljes parciálisan rendezett halmazra, melyet a későbbiekben intenzíven felhasználunk.

Legyen Σ egy ábécé és $k \geq 1$ egy természetes szám. Tekintsük a

$$(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k = \{(L_1, \ldots, L_k) \mid L_i \subseteq \Sigma^*\}$$

halmazt és vezessük be rajta a $\leq$ rendezést a következő módon. Bármely két $(L_1, \ldots, L_k)$ és $(L'_1, \ldots, L'_k)$ elem esetén

$$(L_1, \ldots, L_k) \leq (L'_1, \ldots, L'_k) \iff \forall 1 \leq i \leq k: \; L_i \subseteq L'_i.$$

Akkor a $(\mathcal{P}(\Sigma^*)^k, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz teljes, mert

- legkisebb eleme $(\emptyset, \ldots, \emptyset)$,
- minden $(L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}), n \geq 0$ felszálló lánc esetén

$$\bigvee (L_1^{(n)}, \ldots, L_k^{(n)}) = (\bigcup_{n=0}^{\infty} L_1^{(n)}, \ldots, \bigcup_{n=0}^{\infty} L_k^{(n)}).$$

□

3.45. Definíció. Legyenek $(A, \leq)$ és $(B, \leq)$ parciálisan rendezett halmazok és legyen $f : A \to B$ egy leképezés.

a) f *monoton*, ha $\forall a, b \in A$-ra ha $a \leq b$, akkor $f(a) \leq f(b)$.

b) Tegyük fel, hogy minden $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$, A-beli felszálló lánc esetén, ha $\bigvee a_n$ létezik, akkor $\bigvee f(a_n)$ is létezik B-ben. Ez esetben f *folytonos*, ha minden $a_0 \leq a_1 \leq \ldots$, A-beli felszálló lánc esetén

$$f(\bigvee a_n) = \bigvee f(a_n).$$

□

Vegyük észre, hogy a folytonosság definíciója emlékeztet a valós függvények folytonosságát definiáló

$$f(\lim_{n\to\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n)$$

képletre.

Azonnal adódik a következő észrevétel.

3.46. Lemma. Legyenek $(A, \leq)$ és $(B, \leq)$ parciálisan rendezett halmazok és $f : A \to B$ egy folytonos leképezés. Akkor f monoton.

Bizonyítás. Legyen $a, b \in A$ és $a \leq b$. Megmutatjuk, hogy $f(a) \leq f(b)$.

Tekintsük evégett az $a \leq b \leq b \leq \ldots$ A-beli felszálló láncot. Ennek a legkisebb felső korlátja nyilván b. Mivel f folytonos, $f(b) = \bigvee\{f(a), f(b)\}$. Másrészt, definíció szerint, $f(a) \leq \bigvee\{f(a), f(b)\} = f(b)$, tehát $f(a) \leq f(b)$. □

3.47. Definíció. Legyen $(P, \leq)$ parciálisan rendezett halmaz és $f : P \to P$ egy leképezés. Egy $c \in P$ elem az f *fixpontja*, ha $f(c) = c$.

Minden $n \geq 0$-ra az $f^{(n)} : P \to P$ leképezést a következőképpen definiáljuk. Minden $a \in P$-re $f^{(0)}(a) = a$, és $f^{(n+1)}(a) = f(f^{(n)}(a))$.

□

Most már be tudjuk bizonyítani az alfejezet fő eredményét.

3.48. Tétel. *(Fixpont tétel.) Legyen $(P, \leq)$ teljes parciálisan rendezett halmaz és $f : P \to P$ folytonos leképezés. Akkor $\bigvee f^{(n)}(\perp)$ az f legkisebb fixpontja, ahol $\perp$ a P legkisebb eleme.*

Bizonyítás. Legyen $a_0 = \perp, a_1 = f(\perp), \ldots, a_n = f^{(n)}(\perp), \ldots$. Ekkor $a_0 \leq a_1 \leq a_2 \ldots$ egy felszálló lánc, mert

$$\begin{array}{llll} a_0 = \perp & \leq & f(a_0) = a_1 & \text{(mert } \perp \text{ a } P \text{ legkisebb eleme)} \\ a_1 = f(a_0) & \leq & f(a_1) = a_2 & \text{(mert } f \text{ folytonos, és így monoton)} \\ \quad\vdots & & & \end{array}$$

Megmutatjuk, hogy $f(\bigvee a_n) = \bigvee a_n$, vagyis, hogy $\bigvee a_n$ az f fixpontja. Mivel f folytonos,

$$f(\bigvee a_n) = \bigvee f(a_n)$$

továbbá,

$$\bigvee f(a_n) = \bigvee\{a_1, a_2, \ldots\} = \bigvee\{a_0, a_1, \ldots\} = \bigvee a_n.$$

Végül megmutatjuk, hogy $\bigvee a_n$ az f legkisebb fixpontja. Evégett tegyük fel, hogy c az f egy további fixpontja. Akkor $\perp \leq c$, mivel $\perp$ a P legkisebb eleme. Akkor f monotonitása miatt minden n-re $f^{(n)}(\perp) \leq f^{(n)}(c) = c$. Következésképpen $\bigvee f^{(n)}(\perp) \leq c$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. □

3.5.2. Folytonos leképezések $(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ felett

Folytonos függvények zártsági tulajdonságai:

Most bevezetünk két függvényműveletet, majd megmutatjuk, hogy a folytonos függvények zártak ezekre a műveletekre. A továbbiakban Σ egy ábécé, $k \geq 1$ pedig egy egész szám.

3.49. Definíció. Legyenek $f, g : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvények. Akkor az $f + g$ és fg függvényeket a következőképpen definiáljuk. Minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén:

(a) $(f+g)(L_1,\dots,L_k) = f(L_1,\dots,L_k) \cup g(L_1,\dots,L_k)$ és

(b) $(fg)(L_1,\dots,L_k) = f(L_1,\dots,L_k)g(L_1,\dots,L_k)$.

3.50. Lemma. Ha az $f,g : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvények folytonosak, akkor $f+g$ és fg is folytonosak.

Bizonyítás. Először az (a) esetet bizonyítjuk. Legyenek $f,g : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ folytonos függvények és legyen $(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})$ egy $(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$-beli felszálló lánc. Akkor

$$
\begin{aligned}
& (f+g)(\bigvee(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})) \\
= \; & f(\bigvee(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})) \cup g(\bigvee(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})) \\
& (f+g \text{ definíciója}) \\
= \; & \Big(\bigvee f(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})\Big) \cup \Big(\bigvee g(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})\Big) \\
& (\text{mert } f \text{ és } g \text{ folytonosak}) \\
= \; & \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} f(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})\Big) \cup \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} g(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})\Big) \\
& (\text{legkisebb felső korlát } (\mathcal{P}(\Sigma^*))\text{-ban}) \\
= \; & \bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(f(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)}) \cup g(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)})\Big) \\
= \; & \bigcup_{n=1}^{\infty} (f+g)(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)}) \\
& (f+g \text{ definíciója}) \\
= \; & \bigvee (f+g)(L_1^{(n)},\dots,L_k^{(n)}) \\
& (\text{legkisebb felső korlát } (\mathcal{P}(\Sigma^*))\text{-ban}),
\end{aligned}
$$

tehát $f+g$ is folytonos függvény. A (b) eset bizonyítása hasonlóan végezhető el. □

3.51. Definíció. Legyen $k \geq 1$ és $f : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ egy leképezés. Tetszőleges $1 \leq i \leq k$-re f_i-vel jelöljük és f *i-edik komponensének nevezzük* azt a függvényt, melyre minden $(L_1,\dots,L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén $f_i(L_1\dots,L_k)$ az $f(L_1\dots,L_k)$ vektor i-edik komponense.

Érvényes lesz a következő.

3.52. Észrevétel. Tetszőleges $k \geq 1$ és $f : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ leképezés esetén f akkor és csak akkor folytonos, ha minden $1 \leq i \leq k$-re f_i folytonos.

Bizonyítás. Gyakorlat.

Most bevezetünk néhány olyan folytonos leképezést $(\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ felett, melyekre a továbbiakban szükségünk lesz.

1) Projekciók:

Legyen $1 \leq i \leq k$. Az i-edik k-változós projekció az a $\pi_i^{(k)} : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvény, melyre minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén

$$\pi_i^{(k)}(L_1, \ldots, L_k) = L_i.$$

Könnyen igazolható, hogy a projekciók folytonos leképezések.

2) Konstans függvények:

Legyen $w \in \Sigma^*$. Ekkor $f_w : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ az a függvény, melyre minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén

$$f_w(L_1, \ldots, L_k) = \{w\}.$$

Nyilvánvaló, hogy a konstans függvények folytonosak.

3) Szófüggvények:

Legyenek $X_1, \ldots, X_k$ olyan változók, melyek nem szerepelnek Σ-ban és legyen $w \in (\Sigma \cup \{X_1, \ldots, X_k\})^*$. Ekkor az $f_w : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ függvényt a következőképpen definiáljuk. Legyen $w = w_0 X_{i_1} w_1 \ldots X_{i_n} w_n$, valamely $n \geq 0$-ra és legyen minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén

$$f_w(L_1, \ldots, L_k) = \{w_0 u_{i_1} w_1 \ldots u_{i_n} w_n \mid u_{i_j} \in L_j, 1 \leq j \leq k\},$$

tehát $f_w = f_{w_0} \pi_{i_1}^{(k)} f_{w_1} \ldots \pi_{i_n}^{(k)} f_{w_n}$. Következésképpen f_w folytonos, mivel előáll a konstans függvényekből és a projekciókból a szorzás művelettel és a 3.50. lemma szerint a folytonos függvények zártak a szorzás műveletre.

4) Egyenletrendszerek:

Legyenek ismét $X_1, \ldots, X_k$ olyan változók, melyek nem szerepelnek Σ-ban. Σ^* *feletti k változós egyenletrendszernek* (ha k nem lényeges, akkor csak egyenletrendszernek) nevezzük az E-vel jelölt alábbi formális rendszert:

$$\begin{array}{rcl} X_1 & = & w_{11} + \ldots + w_{1n_1} \\ & \vdots & \\ X_k & = & w_{k1} + \ldots + w_{kn_k}, \end{array}$$

ahol $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ és minden $1 \leq i \leq k$ és $1 \leq j \leq n_i$ estén $w_{ij} \in (\Sigma \cup \{X_1, \ldots, X_k\})^*$. E meghatároz egy $f_E : (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k \to (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ leképezés, melyet a következőképpen definiálunk. Minden $1 \leq i \leq k$-re legyen $f_i = f_{w_{i1}} + \ldots + f_{w_{in_i}}$ és minden $(L_1, \ldots, L_k) \in (\mathcal{P}(\Sigma^*))^k$ esetén legyen

$$f_E(L_1, \ldots, L_k) = (f_1(L_1, \ldots, L_k), \ldots, f_k(L_1, \ldots, L_k)).$$

A fentiekből következik, hogy minden $1 \leq i \leq k$-re f_i folytonos, így f_E is folytonos, mivel minden komponense folytonos, lásd 3.52. észrevétel.

3.5.3. Kapcsolat a környezetfüggetlen nyelvtanok és a Σ^* feletti k változós egyenletrendszerek között

a) Környezetfüggetlen nyelvtanhoz egyenletrendszer rendelése

Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ környezetfüggetlen nyelvtan. Tegyük fel, hogy $N = \{X_1, \ldots, X_k\}$ és $X_1 = S$. Ekkor P felírható a következő alakban:

$$\begin{array}{lcl} X_1 & \rightarrow & w_{11} | \ldots | w_{1n_1} \\ & \vdots & \\ X_k & \rightarrow & w_{k1} | \ldots | w_{kn_k} \end{array}$$

G-hez hozzárendeljük az alábbi $E(G)$ egyenletrendszert:

$$\begin{array}{lcl} X_1 & = & w_{11} + \ldots + w_{1n_1} \\ & \vdots & \\ X_k & = & w_{k1} + \ldots + w_{kn_k} \end{array}$$

Ekkor $f_{E(G)} : \mathcal{P}(\Sigma^*)^k \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)^k$ folytonos függvény. Továbbá, a G által generált nyelv és $E(G)$ legkisebb fixpontja között a következő összefüggés van.

3.53. Tétel. *Legyen $G = (N, \Sigma, P, S)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Akkor $\bigvee f^{(n)}_{E(G)}((\emptyset, \ldots, \emptyset))$ i-edik komponense megegyezik $L(G, X_i) = \{w \in \Sigma^* \mid X_i \Rightarrow^*_G w\}$-vel. Speciálisan az első komponense egyenlő $L(G)$-vel.*

Bizonyítás. A formális bizonyítés helyett egyenlőre egy példát mutatunk a tételre.

3.54. Példa. Tekintsük a $G:$
$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & A \mid B \\ A & \rightarrow & aAb \mid ab \\ B & \rightarrow & bBa \mid ba \end{array}$$
nyelvtant. Akkor $E(G)$ a következő egyenletrendszer lesz:

$$\begin{array}{lcl} S & = & A + B \\ A & = & aAb + ab \\ B & = & bBa + ba, \end{array}$$

tehát $f_{E(G)} : \mathcal{P}(\Sigma^*)^3 \rightarrow \mathcal{P}(\Sigma^*)^3$. A 3.48. tétel szerint $f_{E(G)}$ legkisebb fixpontja $\bigvee f^{(n)}_{E(G)}((\emptyset, \emptyset, \emptyset))$, ahol

$$\begin{aligned}
f^{(0)}_{E(G)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) &= (\emptyset,\emptyset,\emptyset)\\
f^{(1)}_{E(G)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) &= (\emptyset,\{ab\},\{ba\})\\
f^{(2)}_{E(G)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) &= (\{ab,ba\},\{aabb,ab\},\{bbaa,ba\})\\
f^{(3)}_{E(G)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) &= (\{aabb,bbaa,ab,ba\},\{aaabbb,aabb,ab\},\{bbbaaa,bbaa,ba\})\\
&\vdots
\end{aligned}$$

és így

$$\bigvee f^{(n)}_{E(G)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) = (\{\ldots,aabb,bbaa,ab,ba\},\{\ldots,aaabbb,aabb,ab\},\{\ldots,bbbaaa,bbaa,ba\})$$

Másrészt, a 3.53. tétel szerint

$$\bigvee f^{(n)}_{E(G)}((\emptyset,\emptyset,\emptyset)) = (\underbrace{\{w\in\Sigma^* \mid S\Rightarrow^* w\}}_{=L(G)},\ \{w\in\Sigma^* \mid A\Rightarrow^* w\},\{w\in\Sigma^* \mid B\Rightarrow^* w\}).$$

b) Egyenletrendszerhez környezetfüggetlen nyelvtan rendelése

Legyen E :

$$\begin{aligned}
X_1 &= w_{11}+\ldots+w_{1n_1}\\
&\vdots\\
X_k &= w_{k1}+\ldots+w_{kn_k}
\end{aligned}$$

Σ^* feletti k-változós egyenletrendszer. E-hez hozzárendeljük a $G(E)=(N,\Sigma,P,S)$ nyelvtant, ahol

- $N=\{X_1,\ldots,X_k\}$
- $S=X_1$
- $P=\{X_i\to w_{ij} | 1\le i\le k,\ 1\le j\le n_i\}$

3.55. Tétel. Legyen E egy Σ^* fölötti egyenletrendszer. Akkor $\bigvee f^{(n)}_E((\emptyset,\ldots,\emptyset))$ i-edik komponense megegyezik $L(G(E),X_i)=\{w\in\Sigma^* \mid X_i\Rightarrow^*_{G(E)} w\}$-vel. Speciálisan az első komponense egyenlő $L(G(E))$-vel.

Bizonyítás. $G(E)$-hez rendeljük hozzá az egyenletrendszert úgy, ahogy az a) pontban le van írva. Ekkor a kiindulási E egyenletrendszert kapjuk. $E(G(E))=E$. Így az állítás következik a 3.53. tételből. □
Bebizonyítottuk a következő tételt.

3.56. Tétel. *Tetszőleges $L\subseteq\Sigma^*$ nyelvre a következő két állítás ekvivalens:*

1) L környezetfüggetlen nyelv.

2) L egy Σ^* feletti egyenletrendszer legkisebb fixpontjának valamelyik komponense.

Bizonyítás. Következik a 3.53. és 3.55. tételekből. □

4. Automaták kompozíciói

4.1. Félcsoportok, monoidok és csoportok

Az S félcsoportot *monoidnak* nevezzük, ha van egységeleme, azaz olyan $1 \in S$, melyre minden $s \in S$ esetén $1s = s1 = s$. Egy S monoidot pedig *csoportnak* hívunk, ha minden $s \in S$ elemhez van olyan $s^{-1} \in S$, melyre $ss^{-1} = s^{-1}s = 1$. Az s^{-1} elemet *s inverzének* nevezzük. Az $\{1\}$ csoportot *triviális* csoportnak nevezzük.

Tetszőleges S félcsoport esetén S' az S *részfélcsoportja*, ha $S' \subseteq S$ és S' zárt a szorzásra: minden $s_1, s_2 \in S'$ esetén $s_1 s_2 \in S'$.

Egy S monoid *részmonoidján* az S olyan S' részfélcsoportját értjük, mely egyúttal monoid is. Egy G csoport *részcsoportján* a G olyan részmonoidját értjük, amely egyúttal csoport is. Egy G csoport H részcsoportja a G normálosztója, ha minden $g \in G$-re teljesül, hogy $gH = Hg$, ahol $gH = \{gh \mid h \in H\}$ és $Hg = \{hg \mid h \in H\}$. Végül egy S félcsoport részcsoportján az S egy olyan G részfélcsoportját értjük, ami egyben csoport is. Egy S félcsoport *aperiodikus*, ha minden részcsoportja triviális. Egy S monoid aperiodikus, ha az S félcsoport aperiodikus. Legyenek S és T félcsoportok. Azt mondjuk, hogy S osztója T-nek, és $S|T$-t írunk, ha S a T egy részfélcsoportjának homomorf képe. Egy nemtriviális G csoport *egyszerű*, ha csak önmaga és a triviális csoport a normálosztói. Könnyen igazolható hogy minden véges nemtriviális G csoportnak van egyszerű csoport normálosztója. (Ha G egyszerű csoport, akkor készen vagyunk. Ha nem, akkor van egy H normálosztója G-nek, ahol H különbözik a triviális csoporttól is és G-től is és H-nak kevesebb eleme van mint G-nek. Folytassuk az eljárást H-val.) A definíciókból azonnal adódik, hogy egy véges S félcsoport akkor és csak akkor aperiodikus, ha minden csoport osztója triviális, ami ekvivalens azzal, hogy nem létezik véges egyszerű csoport osztója.

A következőkben bebizonyítunk néhány, félcsoportokra és csoportokra vonatkozó állítást, amelyeket később használni fogunk.

4.1. Lemma. Véges csoport minden elemének van olyan hatványa, mely az egységelemet adja.

Bizonyítás. Legyen S véges csoport s pedig S egy tetszőleges eleme. Legyen p az a minimális pozitív egész szám, melyre $s, s^2, \ldots, s^p$ különbözőek. Tehát $s^{p+1} = s^r$ valamely $r \leq p$-re. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát s inverzének r-edik hatványával. Kapjuk, hogy $1 = s^{p-r+1}$, tehát s^{p-r+1} egységelem. □

4.2. Lemma. Ha S véges, nem aperiodikus félcsoport, akkor van egy elem által generált valódi részcsoportja.

Bizonyítás. Mivel S nem aperiodikus, van nemtriviális részcsoportja. Legyen s ennek a részcsoportnak egy, az egységelemtől különböző eleme és legyen k az a szám, melyre s^k a részcsoport egységeleme, lásd 4.1. állítás. Ekkor $k > 1$, hisz feltettük, hogy s nem az egységelem. Következésképpen $s, s^2, \ldots, s^k$ elemek egy ciklikus csoportot alkotnak, melyet s generál. Ez a ciklikus csoport nemtriviális, hisz $k > 1$ miatt egynél több eleme van. □

4.3. Lemma. Legyen S félcsoport $s \in S$ és legyenek $1 \leq r \leq p$ olyan számok, amelyekre tejesül, hogy

- az $s, \ldots, s^p$ elemek különbözőek és
- $s^{p+1} = s^r$.

Akkor a $s^r, \ldots, s^p$ elemek véges csoportot alkotnak S-ben.

Bizonyítás. Nyilvánvaló az, hogy $s^r, \ldots, s^p$ félcsoport.

Először megmutatjuk, hogy ebben a félcsoportban $s^{x(p-r+1)}$ az egységelem, ahol x olyan nemnegatív egész szám (például a legkisebb ilyen), amelyre $x(p-r+1) \geq r$. Vegyünk egy tetszőleges elemet, ez nyilvánvalóan felírható s^{r+t} alakban, ahol t egy nemnegatív egész szám. Könnyen megmutatható, hogy a ciklikusság (vagyis $s^{p+1} = s^r$ miatt) $s^{r+t} = s^{r+t+(p-r+1)}$. Ez azonban még nem jelenti azt, hogy $s^{(p-r+1)}$ egységelem, mivel nem biztos, hogy $p-r+1 \geq r$, azaz nem biztos, hogy benne vagyunk a halmazban. Ugyanakkor teljes indukcióval igazolható, hogy tetszőleges z természetes számra, $s^{r+t} = s^{r+t+z(p-r+1)}$, vagyis $s^{r+t} = s^{r+t}s^{x(p-r+1)}$. Tehát $s^{x(p-r+1)}$ sz egységelem.

Másodszor megmutatjuk, hogy a tetszőleges s^{r+t} elem inverze $s^{p-2r-t+1+y(p-r+1)}$, ahol y tetszőleges nemnegatív egész (például a legkisebb nemnegatív egész), melyre $p-2r-t+1+y(p-r+1) \geq r$. Ehhez $s^{r+t} = s^{r+t+z(p-r+1)}$ segítségével megállapítható, hogy tetszőleges olyan k esetén, melyre $k(p-r+1) \geq r$, ugyancsak igaz $s^{k(p-r+1)} = s^{x(p-r+1)}$. Ekkor

$$s^{r+t}s^{p-2r-t+1+y(p-r+1)} = s^{r+t+p-2r-t+1+y(p-r+1)} = s^{p-r+1+y(p-r+1)} = s^{(y+1)(p-r+1)}.$$

Másrészt $p-2r-t+1+y(p-r+1) \geq r$, amiből következik, hogy $(y+1)(p-r+1) \geq r$, azaz $s^{(y+1)(p-r+1)} = s^{(x+1)(p-r+1)}$. Tehát $s^{r+t}s^{p-2r-t+1+y(p-r+1)} = s^{x(p-r+1)}$. □

4.4. Példa. Legyen $T = \{ a, a^2, a^3 \}$, ahol $a^4 = a^2$. Ekkor T félcsoport, a 4.3. lemma szerint pedig $S = \{a^2, a^3\}$ nemtriviális csoport ($r = 2, p = 3$). S egységeleme a^2, a^3 inverze pedig önmaga. Valóban, $a^2a^3 = a^5 = a^3$ és $a^3a^3 = a^6 = a^2$. S a T részcsoportja, tehát T nem aperiodikus.

4.5. Lemma. Tetszőleges S véges félcsoportra a következő három állítás ekvivalens:

(1) S aperiodikus,

(2) minden $s \in S$-hez van olyan $n \geq 1$, hogy $s^n = s^{n+1}$,

(3) van olyan $n \geq 1$, hogy minden $s \in S$-re $s^n = s^{n+1}$.

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2): Legyen $s \in S$. Mivel S véges van olyan $1 \leq r \leq p$, hogy az $s, \ldots, s^p$ elemek különbözőek és ugyanakkor $s^{p+1} = s^r$. A 4.3. lemma szerint az $s^r, \ldots, s^p$ elemek csoportot alkotnak. Mivel S aperiodikus, kapjuk, hogy $r = p$, tehát $s^{r+1} = s^r$.

(2) $\Rightarrow$ (1): Indirekt bizonyítunk, vagyis feltesszük, hogy (2) fennál, de S nem aperiodikus. Ekkor a 4.2. lemma miatt S-nek van egy elem által generált nemtriviális részcsoportja, legyen ez $s, s^2, \ldots, s^k$, ahol $k > 1$ és s^k a részcsoport egységeleme. Ugyanakkor

van olyan n, melyre $s^n = s^{n+1}$. Ez csak úgy lehet, ha $k = 1$, ami viszont ellentmondás, mert a részcsoport nemtriviális.

(3) $\Rightarrow$ (2): Nyilvánvaló.

(2) $\Rightarrow$ (3): Legyen $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$ és legyenek rendre $n_1, \ldots, n_k$ az $s_1, \ldots, s_k$ elemekhez tartozó számok. Ekkor $n = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$ minden s_i-hez jó lesz. □

Végül megmutatjuk a következőt.

4.6. Lemma. Az aperiodikus monoidok zártak a részmonoid, a homomorf kép és a direkt szorzat műveletekre.

Bizonyítás. A részmonoidra és a homomorf kép képzésre való zártság nyilvánvaló. Legyenek S_1 és S_2 aperiodikus monoidok és tekintsük direkt szorzatukat, vagyis az $S_1 \times S_2$ monoidot. Megmutatjuk, hogy teljesül a 4.5. lemma (3) feltétele. Valóban, mivel S_i aperiodikus, a 4.5. lemma miatt van olyan n_i, hogy bármely s_i-re $s_i^{n_i} = s_i^{n_i+1}$, $i = 1, 2$. Legyen $n = \max\{n_1, n_2\}$. Ekkor $S_1 \times S_2$-ben tetszőleges (s_1, s_2) elemre teljesül, hogy $(s_1, s_2)^n = (s_1^n, s_2^n) = (s_1^{n+1}, s_2^{n+1}) = (s_1, s_2)^{n+1}$, tehát $S_1 \times S_2$ is aperiodikus. □

Az is nyilvánvaló, hogy egy aperiodikus monoid tetszőleges részfélcsoportja aperiodikus félcsoport.

4.2. Félautomaták

Félautomatának egy olyan $M = (Q, \Sigma, \delta)$ rendszert nevezünk, ahol Q, Σ és δ ugyanaz, mint automaták esetében. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a félautomatákat is automatáknak hívjuk.

Először beveztünk néhány fogalmat. Legyenek $M = (Q, \Sigma, \delta)$ és $M' = (Q', \Sigma, \delta')$ automaták. Azt mondjuk, hogy M' az M *részautomatája*, ha teljesülnek a következő feltételek:

- $Q' \subseteq Q$,
- $\delta'(q, a) = \delta(q, a)$ minden $q \in Q'$ és $a \in \Sigma$ esetén (vagyis δ' a δ függvénynek a $Q' \times \Sigma$ halmazra való megszorítása).

Legyen továbbá $\varphi : Q \to Q'$ egy leképezés. A φ leképezés az M-nek M'-be való homomorfizmusa, ha minden $q \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén teljesül a

$$\varphi(\delta(q, a)) = \delta'(\varphi(q), a)$$

egyenlőség. Vegyük észre, hogy a homomorfizmus ezen definícióját úgy kapjuk a kezdőállapottal és végállapot-halmazzal rendelkező automatákra vonatkozó homomorfizmus definíciójából (lásd 2.13. definíció), hogy ez utóbbiból elhagyjuk a kezdőállapotokra és a végállapot-halmazokra vonatkozó feltételeket.

Ha φ még szürjektív is (vagyis ráképezés), akkor azt mondjuk, hogy M' az M homomorf képe. Ha M' az M homomorf képe és emellett φ még injektív is (tehát bijekció), akkor φ-t izomorfizmusnak nevezzük és azt mondjuk, hogy M és M' izomorfak. Jelben: $M \cong M'$.

Bevezetünk még egy jelölést. Tetszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta)$ félautomata, $q_0 \in Q$ és $F \subseteq Q$ esetén $M[q_0, F]$-fel jelöljük a $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automatát (vagyis azt az automatát amelyet úgy kapunk M-ből, hogy q_0-t kezdőállapotnak, F-et pedig végállapot-halmaznak tekintjük). Továbbá, *M-ben felismert nyelven* értünk minden olyan $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvet, amelyre $L = L(M[q_0, F])$ telejesül valamely $q_0 \in Q$ és $F \subseteq Q$ esetén.

Ebben az fejezetben azzal foglalkozunk, hogyan lehet félautomatákat előállítani egyszerűbb félautomatákból a szorzatnak (vagy más néven kompozíciónak) nevezett művelet segítségével.

4.3. Gluskov szorzat

4.7. Definíció. Legyen $n \geq 0$ és minden $i = 1, \ldots, n$-re legyen $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \delta_i)$ egy félautomata. Legyen Σ egy további ábécé és legyenek adottak a

$$\varphi_i : Q_1 \times \ldots Q_n \times \Sigma \to \Sigma_i$$

leképezések. Az M_i automatáknak a Σ ábécére és a φ_i leképezésekre vonatkozó *Gluskov-szorzatának* vagy *kompozíciójának* azt az $M = (Q, \Sigma, \delta)$ automatát nevezzük, ahol

- $Q = Q_1 \times \ldots \times Q_n$,
- minden $(q_1, \ldots, q_n) \in Q$ és $a \in \Sigma$ esetén $\delta((q_1, \ldots, q_n), a) = (\delta_1(q_1, a_1), \ldots, \delta_n(q_n, a_n))$, ahol minden $i = 1, \ldots, n$-re $a_i = \varphi_i((q_1, \ldots, q_n), a)$.

Azt, hogy M az M_i automatáknak a Σ ábécére és a φ_i leképezésekre vonatkozó Gluskov-szorzata, úgy jelöljük, hogy $M = M_1 \times \ldots \times M_n[\Sigma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ vagy röviden $M = \prod_{i=1}^{n} M_i[\Sigma, \varphi_i]$. A továbbiakban Gluskov-szorzat helyett gyakran röviden csak szorzatot mondunk.

Az automaták direkt szorzata a szorzat egyik speciális esete. Valóban, ha $\Sigma_1 = \ldots = \Sigma_n = \Sigma$ és minden $i = 1, \ldots, n$-re $\varphi_i((q_1, \ldots, q_n), a) = a$, akkor a jól ismert direkt szorzatot kapjuk vissza.

Egy másik speciális esetként $n = 0$-t is megengedünk. Ekkor definíció szerint M az egyállapotú, Σ feletti automata, más szóval a *triviális Σ-automata*, amelyet $Triv(\Sigma)$-val jelölünk.

A továbbiakban automaták olyan halmazai (általánosabban: osztályai) iránt érdeklődünk, amelyek teljesek abban az értelemben, hogy - kissé elnagyoltan fogalmazva - elemeikből minden automata előállítható valamilyen formában a szorzat segítségével. Ezt pontosabban a következőképpen fogalmazzuk meg.

4.8. Definíció. Legyen $\mathcal{K}$ automaták egy osztálya.

(1) $\mathcal{K}$ *nyelv teljes* (röviden: teljes), ha minden L reguláris nyelv felismerhető egy olyan M automatában, amelyet $\mathcal{K}$-beli automaták szorzataként kapunk. (Tehát M-et úgy kapjuk, hogy vesszük $\mathcal{K}$-beli automaták egy szorzatát, majd kijelölünk benne egy alkalmas kezdőállapotot és végállapot-halmazt.)

(2) $\mathcal{K}$ *izomorfan teljes*, ha minden M automatához megadható $\mathcal{K}$-beli automatáknak egy olyan N szorzata, hogy M izomorf N egy részautomatájával.

(3) $\mathcal{K}$ *homomorfan teljes*, ha minden M automatához megadható $\mathcal{K}$-beli automatáknak egy olyan N szorzata, hogy M az N egy részautomatájának homomorf képe.

Nyilvánvaló, hogy ha $\mathcal{K}$ izomorfan teljes, akkor mind teljes, mind homomorfan teljes. Ugyanakkor érvényes a következő állítás is.

4.9. Tétel. *Automaták egy $\mathcal{K}$ osztálya akkor és csak akkor teljes, ha homomorfan teljes.*

Bizonyítás. Tegyük fel először, hogy $\mathcal{K}$ homomorfan teljes. Legyen továbbá $L \subseteq \Sigma^*$ egy reguláris nyelv, amelyet az $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ automata ismert fel, vagyis amelyre $L = L(M)$. Mivel $\mathcal{K}$ homomorfan teljes, az $M' = (Q, \Sigma, \delta)$ (fél)automatához megadható $\mathcal{K}$-beli automatáknak egy olyan $N = \prod_{i=1}^{n} N_i[\Sigma, \varphi_i]$ szorzata, hogy M' az N valamely $N' = (Q', \Sigma, \delta')$ részautomatájának homomorf képe egy $\varphi : Q' \to Q$ homomrfizmus mellett. Először kiegészítjük N'-t egy alkalmas kezdőállapottal és végállapot-halmazzal úgy, hogy az ily módon kapott automata is L-et ismerje fel. Legyen evégett q_0' olyan állapot Q'-ben, melyre $\varphi(q_0') = q_0$ és legyen $F' = \varphi^{-1}(F) \subseteq Q'$. Ekkor M homomorf képe lesz az $N'[q_0', F']$ automatának is (a 2.13. definíció értelmében). Ezért, a 2.15. lemma következtében az $N'[q_0', F']$ automata által felismert nyelv megegyezik L-lel. Végül vegyük észre, hogy q_0' és F' megadásával egyúttal N-et is elláttuk kezdőállapottal és végállapot-halmazzal és a fenteik értelmében az $N[q_0', F']$ automata is az L nyelvet ismeri fel.

Megfordítva, tegyük fel, hogy $\mathcal{K}$ teljes és legyen $M = (Q, \Sigma, \delta)$ egy automata, melyben $Q = \{q_1, \ldots, q_n\}$. Vegyünk egy új $a_0 \notin \Sigma$ input szimbólumot és vezessük be az $M_0 = (Q, \Sigma \cup \{a_0\}, \delta_0, q_1, \{q_n\})$ automatát, ahol

- minden $i = 1, \ldots, n$ és $a \in \Sigma$ esetén $\delta_0(q_i, a) = \delta(q_i, a)$, és
- minden $i = 1, \ldots, n-1$ esetén $\delta_0(q_i, a_0) = q_{i+1}$ és $\delta_0(q_n, a_0) = q_n$.

Észrevesszük, hogy M_0 összefüggő és redukált, tehát az $L(M_0)$ nyelvet felismerő minimális automata.

Mivel $\mathcal{K}$ teljes, megadható $\mathcal{K}$-beli automatáknak egy $N = \prod_{i=1}^{n} N_i[\Sigma \cup \{a_0\}, \varphi_i]$ szorzata, amely egy alkamas q_N kezdőállapottal és F_N végállapot-halmazzal az $L(M_0)$ nyelvet ismeri fel. Tehát $L(N[q_N, F_N]) = L(M_0)$.

Mivel M_0 az ezen nyelvet felismerő minimális automata, M_0 az $N[q_N, F_N]$ egy $\overline{N}$ részautomatájának homomorf képe valamely φ homomrfizmus mellett (2.18. következmény). Amennyiben az $\overline{N}$ automatából elhagyjuk az a_0 input szimbólumot, „elfelejtjük" a kezdőállapotot és a végállapot-halmazt, továbbá az átmenetfüggvényét megszorítjuk az állapothalmazára és Σ-ra, akkor egy olyan (fél)automatát kapunk amely $\mathcal{K}$-beli automaták szorzatának részautomatája és amelynek homomorf képe M. Mivel M tetszőleges volt, azt kaptuk, hogy $\mathcal{K}$ homomorfan teljes. □

4.10. Definíció. Egy $M = (Q, \Sigma, \delta)$ automata *önmagában izomorfan teljes*, ha van két különböző $p, q \in Q$ állapot és vannak olyan (nem feltétlenül különböző) $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Sigma$ input szimbólumok, hogy

$$\delta(p, a_1) = p, \ \ \delta(p, a_2) = q, \ \ \delta(q, a_3) = q, \quad \text{és} \quad \delta(q, a_4) = p.$$

Bebizonyítjuk, hogy a fenti elnevezés jogos, vagyis érvényes a következő tétel.

4.11. Tétel. *Ha M egy önmagában izomorfan teljes automata, akkor az $\{M\}$ rendszer izomorfan teljes.*

Bizonyítás. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta)$ önmagában izomorfan teljes és legyenek $p, q \in Q$ azon állapotok, $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \Sigma$ pedig azon input szimbólumok, melyekkel M teljesíti a 4.10. definícióban szereplő feltételeket.

Vegyünk egy tetszőleges $N = (P, \Sigma', \delta')$ automatát. Legyen k egy olyan természetes szám, melyre $2^k \geq ||P||$ (vagyis melyre $k \geq \log_2 ||P||$). Legyen továbbá $h : P \to Q^k$ egy olyan injektív leképezés, melyre $h(r) \in \{p, q\}^k$ teljesül minden $r \in P$-re. Képezzük azt az

$$\overline{M} = (Q^k, \Sigma', \delta'') = \prod_{i=1}^{k} M[\Sigma', \varphi_i]$$

kompozíciót, melyben tetszőleges $r \in P$ és $a \in \Sigma'$ esetén, ha

$$h(r) = (s_1, \ldots, s_k) \ \text{ és } \ h(\delta'(r, a)) = (t_1, \ldots, t_k)$$

(ahol $s_i, t_j \in \{p, q\}$, akkor minden $1 \leq i \leq k$ esetén

$$\varphi_i((s_1, \ldots, s_k), a) = b_i \in \{a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

ahol

$$\delta(s_1, b_1) = t_1, \ldots, \delta(s_k, b_k) = t_k.$$

A φ_i leképezések megválaszthatók ilyen módon (más szóval választhatunk ilyen b_i input betűket), mivel M önmagában izomorfan teljes. Ekkor, a szorzat átmenetfüggvényének definíciója miatt, $\delta''((s_1, \ldots, s_k), a) = (t_1, \ldots, t_k)$, amiből kapjuk, hogy

$$h(\delta'(r, a)) = (t_1, \ldots, t_k) = \delta''((s_1, \ldots, s_k), a) = \delta''(h(r), a).$$

Tehát h injektív homomrfizmus lesz N-ből $\overline{M}$-be. Kaptuk, hogy N izomorf $\overline{M}$ egy részautomatájával.

4.12. Tétel. *Automaták egy $\mathcal{K}$ osztálya akkor és csak akkor izomorfan teljes, ha tartalmaz önmagában izomorfan teljes automatát.*

Bizonyítás. Legyen a $\mathcal{K}$ osztály izomorfan teljes és tekintsük azon $N = (\{p, q\}, \{a, b\}, \delta)$ automatát, amelyben

$$\delta(p, a) = p, \ \delta(p, b) = q, \ \delta(q, a) = q, \ \text{ és } \ \delta(q, b) = p.$$

Mivel $\mathcal{K}$ izomorfan teljes, van $\mathcal{K}$-beli automatáknak egy olyan

$$\overline{M} = (Q, \{a, b\}, \delta') = \prod_{i=1}^{k} M_i[\{a, b\}, \varphi_i]$$

kompozíciója, hogy N izomorf módon leképezhető $\overline{M}$ egy részfélautomatájára egy $h : \{p, q\} \to Q$ izomorfizmussal. Legyenek $M_i = (Q_i, \Sigma_i, \delta_i)$, $i = 1, \ldots, k$, legyen

$$h(p) = (s_1, \ldots, s_k) \quad \text{valamint} \quad h(q) = (t_1, \ldots, t_k),$$

és minden $i = 1, \ldots, k$ esetén legyen

$$\varphi_i((s_1, \ldots, s_k), a) = a_i, \qquad \varphi_i((s_1, \ldots, s_k), b) = b_i,$$

$$\varphi_i((t_1, \ldots, t_k), a) = c_i, \qquad \varphi_i((t_1, \ldots, t_k), b) = d_i.$$

Ekkor M definíciójából valamint h izomorfizmus voltából az következik, hogy minden $i = 1, \ldots, k$ esetén

$$\delta_i(s_i, a_i) = s_i, \delta_i(s_i, b_i) = t_i, \delta_i(t_i, c_i) = t_i \text{ és } \delta_i(t_i, d_i) = s_i.$$

Például az első egyenlőség azért teljesül, mert $\delta(p, a) = p$, tehát $\delta'(h(p), a) = h(p)$-nek, azaz $\delta'((s_1, \ldots, s_k), a) = (s_1, \ldots, s_k)$-nak is teljesülni kell.

Mivel h injektív leképezés, van olyan j index, hogy $s_j \neq t_j$. Ekkor pedig az M_j automata önmagában izomorfan teljes, mert az s_j, t_j állapotaival és az a_j, b_j, c_j, d_j input szimbólumaival teljesíti a 4.10. definícióban szereplő feltételeket.

A bizonyítás másik iránya következik a 4.11. tételből. □

A teljes rendszerekere a következők érvényesek.

4.13. Definíció. Egy $M = (Q, \Sigma, \delta)$ automata *önmagában teljes*, ha van olyan $q \in Q$ állapot, vannak olyan $a, b \in \Sigma$ input jelek és $u, v \in \Sigma^*$ szavak, melyekre $\delta(q, a) \neq \delta(q, b)$, továbbá $\delta(q, a)u = \delta(q, b)v = q$.

4.14. Tétel. *(Leticsevszkij tétele) Automaták egy $\mathcal{K}$ osztálya akkor és csak akkor teljes, ha tartalmaz önmagában teljes automatát.*

4.4. Kaszkád szorzat

4.15. Definíció. Automaták egy $M = M_1 \times \ldots \times M_n[\Sigma, \varphi_1, \ldots, \varphi_n]$ szorzatát *kaszkád szorzatnak* nevezzük, ha minden $1 \leq i \leq n$-re a $\varphi_i : Q_1 \times \ldots \times Q_n \times \Sigma \to \Sigma_i$ leképezés csak az első $i - 1$ és az utolsó argumentumától függ. Más szóval, minden $1 \leq i \leq n$ esetén van olyan $\psi_i : Q_1 \times \ldots \times Q_{i-1} \times \Sigma \to \Sigma_i$ leképezés, hogy minden $q_j \in Q_j$, $j = 1, \ldots, n$ és $a \in \Sigma$ esetén $\varphi_i((q_1, \ldots, q_n), a) = \psi_i((q_1, \ldots, q_{i-1}), a)$.

A kaszkád szorzatnak van egy speciális esete, amire később szükségünk lesz. Abban az esetben, amikor csak két tényéző van, $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1)$ és $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2)$, továbbá $\Sigma_1 = \Sigma$ és végül $\psi_1 : \Sigma \to \Sigma$ az identikus leképezés, a kaszkád szorzatot $M_1 \times_{\psi_2} M_2[\Sigma]$-val jelöljük. (A kaszkád szorzat definíciója szerint ekkor $\psi_2 : Q_1 \times \Sigma \to \Sigma_2$ alakú leképezés lesz.)

A Gluskov szorzathoz hasonlóan, a kaszkád szorzatra is definiálható a teljes, izomorfan teljes és homomorfan teljes rendszer fogalma és érvényes lesz a következő állítás.

Ha automaták egy $\mathcal{K}$ osztálya izomorfan teljes a kaszkád szorzatra nézve, akkor mind teljes, mind homomorfan teljes. Ugyanakkor, érvényes a következő tétel is.

4.16. Tétel. *Automaták egy $\mathcal{K}$ osztálya akkor és csak akkor teljes a kaszkád szorzatra nézve, ha homomorfan teljes a kaszkád szorzatra nézve.*

A bizonyítás minkét esetben analóg a Gluskov szorzatra vonatkozó megfelelő állítások bizonyításával, a különbség csak annyi, hogy Gluskov szorzat helyett kaszkád szorzatot mondunk. (Vegyük észre, hogy pl. a 4.9. tétel bizonyításában nem használtuk ki a Gluskov szorzat definícióját, csak a teljesség és a homomorfan teljesség definícióját).

Ki fogjuk mondani a kaszkád szorzatra vonatkozó ún. Krohn-Rhodes tételeket. Ehhez szükségünk van némi előkészítésre.

Először bevezetünk egy jelölést. Teteszőleges $M = (Q, \Sigma, \delta)$ automata esetén jelöljük θ_M-mel a Σ^*-on értelmezett alábbi relációt: minden $u, v \in \Sigma^*$-ra, legyen $u\theta_M v$ akkor és csak akkor, ha minden $q \in Q$-ra teljesül, hogy $qu = qv$. Az így definiált θ_M nem más, mint a 2.9. lemma bizonyításában bevezetett reláció, tehát θ_M véges indexű kongruencia a Σ^* monoidon. Az $T_M = \Sigma^*/\theta_M$ faktor monoid pedig nem más, mint a 2.27. definícióban bevezetett fogalom, vagyis M *automata átmenet monoidja*. (A 2.27. definícióban az T_M monoidot úgy reprezentáljuk, hogy az alaphalmaz az $f_x : Q \to Q$ leképezések halmaza (ahol $f_x(q) = qx$), a monoid művelet pedig a függvény kompozíció, azaz $f_x \cdot f_y = f_{xy}$.)

4.17. Észrevétel. Ugyancsak a 2.9. lemma bizonyításánál láttuk, hogy $\theta_M \subseteq \theta_L$ minden olyan L nyelvre, amelyet M ismer fel alkalmas kezdőállapot és végállapot-halmaz hozzáadásával. Ha tehát M egy kezdőállapottal és végállapot-halmazzal rendelkező automata, amely az L nyelvet ismeri fel, akkor $S_L | T_M$. Ha M minimális, akkor $S_L \cong T_M$.

Értelmezzük továbbá az $U = \{1, a, b\}$ három elemű monoidot, melynek 1 az egységeleme és amelyen tetszőleges $x, y \in \{a, b\}$ estén $xy = y$. Észrevesszük, hogy U aperiodikus. (Bizonyítás: $1^2 = 1$, $a^2 = a$ és $b^2 = b$, alkalmazzunk az 4.5. lemmát.)

Legyen $\mathcal{K}$ automaták egy osztálya és jelöljük $\mathbf{V}_c(\mathcal{K})$-val azon automaták osztályát, amelyek előállnak $\mathcal{K}$-beli automaták valamely kaszkád szorzata részautomatájának homomorf képeként. A jelölés miatt egy $\mathcal{K}$ osztály akkor és csak akkor homomorfan teljes, ha $\mathbf{V}_c(\mathcal{K})$ megegyezik az összes automaták osztályával.

Megjegyezzük, hogy minden Σ ábécé esetén a $Triv(\Sigma)$ triviális automata is $\mathbf{V}_c(\mathcal{K})$-ben van, mivel ő bármely Σ input ábécével rendelkező automatának homomorf képe.

Most bizonyítás nélkül kimondjuk az automaták kaszkád szorzatára vonatkozó ún. I. Krohn-Rhodes tételt.

4.18. Tétel. *(I. Krohn-Rhodes tétel) Legyen $\mathcal{K}$ automaták egy nemüres osztálya és legyen $M \in \mathbf{V}_c(\mathcal{K})$. Ha G véges egyszerű csoport vagy $G = U$ és $G | T_M$, akkor van olyan $M' \in \mathcal{K}$, hogy $G | T_{M'}$.*

A tétel szemléletes magyarázata, hogy ha egy G véges egyszerű csoport (vagy U) osztója egy olyan automata átmenet monoidjának, amely $\mathcal{K}$ elemeiből áll elő a $\mathbf{V}_c(\mathcal{K})$ osztályt definiáló műveletekkel, akkor G (vagy U) ugyancsak osztója valamely $\mathcal{K}$-beli automata monoidjának is.

Tetszőleges G véges csoport esetén vezessük be az $Aut(G) = (G, G, \delta_G)$ automatát, ahol minden $g_1, g_2 \in G$ esetén $\delta_G(g_1, g_2) = g_1 g_2$. Könnyen igazolható, hogy $T_{Aut(G)} \cong G$, és így speciálisan $G | T_{Aut(G)}$.

4.19. Tétel. *Ha egy $\mathcal{K}$ osztály homomorfan teljes a kaszkád szorzatra nézve, akkor $\mathcal{K}$ végtelen.*

Bizonyítás. Legyen G tetszőleges véges egyszerű csoport. Mivel $\mathcal{K}$ homomorfan teljes, $\mathbf{V}_c(\mathcal{K})$ megegyezik az összes automaták osztályával és így speciálisan $Aut(G) \in \mathbf{V}_c(\mathcal{K})$. Továbbá, mint láttuk, $G|T_{Aut(G)}$. Így a 4.18. tételből kapjuk, hogy van olyan $M' \in \mathcal{K}$, hogy $G|T_{M'}$.

Azt kaptuk, hogy ha $\mathcal{K}$ homomorfan teljes, akkor minden G véges egyszerű csoport esetén van olyan $M' \in \mathcal{K}$, hogy $G|T_{M'}$. Mivel végtelen sok véges egyszerű csoport van, ezért $\mathcal{K}$ is végtelen kell legyen. □

Mint láttuk, az izomorfan teljességből következik a homomorfan teljesség, tehát az is igaz, hogy minden izomorfan teljes $\mathcal{K}$ osztály végtelen.

Tekinstük most fentebb értelmezett U monoidot és legyen $Aut(U)$ azon $(\{a,b\},\{1,a,b\},\delta_U)$ automata, melyre tetszőleges $p \in \{a,b\}$ és $x \in \{1,a,b\}$ esetén $\delta_U(p,x) = px$, ahol az egyenlet jobb oldalán az U-beli szorzást értjük. Ily módon 1 mindkét állapotot helyben hagyja, a mindkét állapotot a-ba viszi, b pedig mindkét állapotot b-be viszi az $Aut(U)$ automatában. Könnyen látható, hogy $T_{Aut(U)} \cong U$, tehát $T_{Aut(U)}$ is aperiodikus.

Egy $M = (Q,\Sigma,\delta)$ automatát *permutáció automatának* nevezünk, ha minden $a \in \Sigma$-ra az $f_a : Q \to Q$ leképezés bijekció. (Megjegyezzük, hogy ha M permutáció automata, akkor minden $u \in \Sigma^*$-ra is teljesül, hogy f_u bijekció.)

Továbbá, legyen

$$\mathcal{K}(M) = \{Aut(G) \mid G \text{ egyszerű csoport és } G|T_M\}$$

és legyen

$$\mathcal{K}'(M) = \mathcal{K}(M) \cup \{Aut(U)\}.$$

Most már kimondhatjuk a II. Krohn-Rhodes tételt, amely maga is két részből áll.

4.20. Tétel. *(II. Krohn-Rhodes tétel) Legyen M tetszőleges automata.*
(1) $M \in \mathbf{V}_c(\mathcal{K}'(M))$.
(2) Ha M permutáció automata, akkor $M \in \mathbf{V}_c(\mathcal{K}(M))$.

A tételből azonnal következik, hogy a

$$\mathcal{K} = \{Aut(G) \mid G \text{ egyszerű csoport } \} \cup \{Aut(U)\}$$

osztály homomorfan teljes a kaszkád szorzatra nézve. Valóban, minden M automata estén $\mathcal{K}'(M) \subseteq \mathcal{K}$, tehát $M \in \mathbf{V}_c(\mathcal{K})$.

Egy M automatát *aperiodikusnak* nevezünk, ha T_M aperiodikus. A definíciók miatt, ha M aperiodikus, akkor minden olyan L nyelvre, amely az M automatában ismerhető fel, $S_L|T_M$ miatt S_L is aperiodikus.

Az I. és a II. Krohn-Rhodes tételből azonnal adódik a következő állítás.

4.21. Következmény. Egy M automata akkor és csak akkor aperiodikus, ha $M \in \mathbf{V}_c(\{Aut(U)\})$.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy M aperiodikus. Ha M triviális (vagyis egy-állapotú), akkor definíció szerint $\mathbf{V}_c(\{Aut(U)\})$-ban van, tehát készen vagyunk. Ha M nemtriviális, akkor a II. Krohn-Rhodes tétel (1) állítása szerint $M \in \mathbf{V}_c(\mathcal{K}'(M))$. Mivel azonban M aperiodikus, a T_M monoidnak nincsen egyszerű osztója, tehát $\mathcal{K}(M) = \emptyset$

és így $\mathcal{K}'(M) = \{Aut(U)\}$. Következésképpen, $M \in \mathbf{V}_c(\{Aut(U)\})$. Fordítva, tegyük fel, hogy $M \in \mathbf{V}_c(\{Aut(U)\})$. Ha lenne olyan egyszerű véges csoport, amely T_M-nek osztója, akkor az I. Krohn-Rhodes tétel miatt az osztója lenne $T_{Aut(U)}$-nak is. Mivel azonban $T_{Aut(U)}$ aperiodikus, ezért nincs nemtriviális osztója. Tehát T_M-nek sem lehet nemtriviális osztója, ami éppen azt jelenti, hogy M aperidodikus. □

4.5. Csillagmentes nyelvek

Ebben a fejezetben a Krohn-Rhodes tételek egy érdekes alkalmazását mutatjuk meg.

4.22. Definíció. *Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv $*$-mentes, ha előáll az $\{a\}$, $a \in \Sigma$ nyelvekből a Boole műveletek ($\cup$, $\cap$, komplementer) és a konkatenáció véges sokszori alkalmazásával.*

Nyilvánvaló, hogy minden $*$-mentes nyelv reguláris. A $*$-mentes nyelvek szép jellemzését adja Schützenberger híres tétele.

4.23. Tétel. *(Schützenberger tétele.) Egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv akkor és csak akkor $*$-mentes, ha S_L véges és aperiodikus.*

A tételből azonnal következik, hogy tetszőleges L felismerhető nyelvről eldönthető, hogy $*$-mentes-e. Meg tudjuk ugyanis konstruálni S_L-et és mivel ez véges, a 4.5. lemma alapján el tudjuk dönteni, hogy aperiodikus-e.

A következőkben bebizonyítjuk Schützenberger tételét a kaszkád szorzattal kapcsolatos eredmények felhasználásával. (Az eredeti bizonyításban nem alkalmazták a kaszkád szorzatot.) Az egyik irány bizonyítása viszonylag egyszerű (és nem szükséges hozzá a kaszkád szorzat). Először bebizonyítjuk a következő lemmát.

4.24. Lemma. *Tetszőleges $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ nyelvekre $S_{L_1 \cap L_2} | S_{L_1} \times S_{L_2}$.*

Bizonyítás. Tekintsük $S_{L_1} \times S_{L_2}$-nek az $S' = \{(x/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2}) \mid x \in \Sigma^*\}$ részhalmazát. Könnyen belátható, hogy az így definiált S' részmonoid lesz. Valóban,

$$(x/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2})(y/\theta_{L_1}, y/\theta_{L_2}) = (x/\theta_{L_1} y/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2} y/\theta_{L_2}) = (xy/\theta_{L_1}, xy/\theta_{L_2}),$$

továbbá $(\varepsilon/\theta_{L_1}, \varepsilon/\theta_{L_2})$ egységelem S'-ben.

A következőkben megmutatjuk, hogy $S_{L_1 \cap L_2}$ az S' homomorf képe. Definiáljuk evégett a $h : S' \to S_{L_1 \cap L_2}$ leképezést, ahol $h\big((x/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2})\big) = x/\theta_{L_1 \cap L_2}$.

Először is megmutatjuk, hogy a h leképezés jóldefiniált, vagyis, hogy az $(x/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2}) = (y/\theta_{L_1}, y/\theta_{L_2})$ egyenlőségből következik, hogy $x/\theta_{L_1 \cap L_2} = y/\theta_{L_1 \cap L_2}$. Legyenek tehát $x, y \in \Sigma^*$ olyanok, hogy $x/\theta_{L_1} = y/\theta_{L_1}$ és $x/\theta_{L_2} = y/\theta_{L_2}$. Ekkor definíció szerint tetszőleges $u, v \in \Sigma^*$ esetén $uxv \in L_1 \iff uyv \in L_1$ és tetszőleges $u, v \in \Sigma^*$ esetén $uxv \in L_2 \iff uyv \in L_2$.

Legyen $u', v' \in \Sigma^*$ és tegyük fel, hogy $u'xv' \in L_1 \cap L_2$. Ekkor $u'xv' \in L_1$ és $u'xv' \in L_2$. Az előbbi feltevésünk miatt ez utóbbi akkor és csak akkor áll fenn, ha $u'yv' \in L_1$ és $u'yv' \in L_2$, vagyis ha $u'yv' \in L_1 \cap L_2$. Kaptuk, hogy tetszőleges $u', v' \in \Sigma^*$ esetén $u'xv' \in L_1 \cap L_2 \iff u'yv' \in L_1 \cap L_2$, vagyis $x/\theta_{L_1 \cap L_2} = y/\theta_{L_1 \cap L_2}$.

Nyilvánvaló az, hogy h ráképezés. Végül megmutatjuk, hogy h homomorfizmus. Valóban,

$$h\big((x/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2})(y/\theta_{L_1}, y/\theta_{L_2})\big) = h\big((xy/\theta_{L_1}, xy/\theta_{L_2})\big) = xy/\theta_{L_1\cap L_2} =$$
$$(x/\theta_{L_1\cap L_2})\,(y/\theta_{L_1\cap L_2}) = h\big((x/\theta_{L_1}, x/\theta_{L_2})\big)h\big((y/\theta_{L_1}, y/\theta_{L_2})\big).$$

□

4.25. Lemma. Ha egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv $*$-mentes, akkor S_L véges és aperiodikus.

Bizonyítás. Mivel L $*$-mentes, ezért reguláris is. Ebből viszont a 2.11. tétel szerint következik, hogy $S_L = \Sigma^*/\theta_L$ véges.

Végül bebizonyítjuk, hogy S_L aperiodikus is. A $*$-mentes nyelv definíciója szerinti indukcióval haladunk tovább.

(i) Tegyük fel, hogy $L = \{a\}$. Könnyen látható, hogy ekkor $S_L = \{\{\varepsilon\}, \{a\}, \Sigma^* - \{\varepsilon, a\}\}$. Az S_L három-elemű monoidnak két részcsoportja van, a $\{\{\varepsilon\}\}$ és a $\{\{\Sigma^* - \{\varepsilon, a\}\}$. Mindkettő triviális, tehát ebben az esetben S_L aperiodikus.

(ii) Legyenek $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ $*$-mentes nyelvek, melyekre S_{L_1} és S_{L_2} aperiodikusak.

(iia) Az $S_{\overline{L_1}}$ monoid aperiodikus, mivel $S_{\overline{L_1}} = S_{L_1}$, ahol $\overline{L_1}$ az L_1 komplementere Σ^*-ra nézve.

(iib) Az $S_{L_1\cap L_2}$ monoid aperiodikus, mivel a 4.24. lemma miatt $S_{L_1\cap L_2} | S_{L_1} \times S_{L_2}$, továbbá a 4.6. lemma szerint az aperiodikus monoidok zártak a direkt szorzás, a részmonoid és a homomorf kép képzésre.

(iic) Beizonyítjuk, hogy $S_{L_1\cup L_2}$ is aperiodikus. A De Morgan azonosság szerint $L_1 \cup L_2 = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{L_2}}$, továbbá tetszőleges L nyelvre $S_L = S_{\overline{L}}$. Következésképpen $S_{L_1\cup L_2} = S_{\overline{L_1}\cap\overline{L_2}}$. A feltevésünk szerint S_{L_1} és S_{L_2} aperiodikus, tehát $S_{\overline{L_1}}$ és $S_{\overline{L_2}}$ is aperiodikus. Ekkor az előző állítás szerint $S_{\overline{L_1}\cap\overline{L_2}}$ aperiodikus, tehát $S_{L_1\cup L_2}$ is az.

(iid) Végül megmutatjuk, hogy $S_{L_1L_2}$ is aperiodikus. Mivel S_{L_1} aperiodikus, a 4.3. állítás miatt van olyan n_1 természetes szám, hogy minden $x/\theta_{L_1} \in S_{L_1}$ esetén $(x/\theta_{L_1})^{n_1} = (x/\theta_{L_1})^{n_1+1}$. Következésképpen, a szintaktikus monoid definícióját figyelembe véve, minden $u, x, v \in \Sigma^*$ esetén

$$ux^{n_1}v \in L_1 \iff ux^{n_1+1}v \in L_1.$$

Hasonlóan, van olyan n_2 természetes szám, hogy minden $u, x, v \in \Sigma^*$ esetén

$$ux^{n_2}v \in L_2 \iff ux^{n_2+1}v \in L_2.$$

Megmutatjuk, hogy $n = n_1 + n_2$-re teljesül, hogy minden $u, x, v \in \Sigma^*$ esetén

$$ux^{n}v \in L_1L_2 \iff ux^{n+1}v \in L_1L_2,$$

amiből, ismét a 4.3. állítás miatt, azonnal adódik, hogy $S_{L_1L_2}$ is aperiodikus. Legyen tehát $ux^nv \in L_1L_2$, ami azt jelenti, hogy $ux^nv = wz$, ahol $w \in L_1$ és $z \in L_2$. Két eset lehetséges: (1) amikor w az ux^{n_1} szó prefixe és (2), amikor z az $x^{n_2}v$ szuffixe. Az első esetben $z = yx^{n_2}v$ alakú, valamely alkalmas $y \in \Sigma^*$ szó esetén. Mivel $z \in L_2$, kapjuk, hogy $z' = yx^{n_2+1}v \in L_2$, vagyis $wz' = ux^{n+1}v \in L_1L_2$. A (2) eset bizonyítása hasonlóan megy. □

Most elkezdjük a másik irány bizonyításának előkészítését.

4.26. Lemma. Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén S_L akkor és csak akkor véges és aperiodikus, ha L felismerhető olyan félautomatában, amelyet $\{Aut(U)\}$-ból kapunk kaszkád szorzással.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy S_L véges és aperiodikus. Akkor L felismerhető, legyen M az L-et felismerő minimális automata és jelölje M' az M-ből kapott félautomatát. Mivel $T_{M'} \cong S_L$, az M' félautomata is aperiodikus és így az 4.21. következmény miatt $M' \in \mathbf{V}_c(\{Aut(U)\})$. Tehát van egy olyan $N = \prod_{i=1}^{n} Aut(U)[\Sigma, \varphi_i]$ kaszkád szorzat, hogy M' az N valamely részfélautomatájának homomorf képe. De akkor az N automatában is ki tudunk jelölni egy alkalmas kezdőállapotot és végállapot-halmazt úgy, hogy az így kapott automata az L nyelvet ismerje fel. (Lásd a 4.9. tétel bizonyításának első részét.)

Megfordítva, legyen $N = \prod_{i=1}^{n} Aut(U)[\Sigma, \varphi_i]$, kaszkád szorzattal kapott félautomata, amely alkalmas kezdőállapot és végállapot-halmaz megadásával az L-et ismeri fel. Ekkor a 4.17. észrevétel miatt $S_L | T_N$. Továbbá, a 4.21. következmény miatt T_N aperiodikus, tehát S_L is aperiodikus □

Szükségünk lesz a következő lemmára is.

4.27. Lemma. Legyen $M = (Q, \Sigma, \delta)$ nem feltétlenül teljes félautomata. Ha az M-ben felismerhető bármelyik nyelv $*$-mentes, akkor ugyanez érvényes minden olyan M' félautomatára is, amelyet M-ből bizonyos átmenetek elhagyásával kapunk.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy M'-t a $\delta(q_1, a) = q_2$ átmenet elhagyásával kapjuk M-ből. Ekkor minden $q_0 \in Q$ és $F \subseteq Q$ esetén

$$L(M'[q_0, F]) = L(M[q_0, F]) - L(M[q_0, \{q_1\}])a\Sigma^*.$$

Mivel az egyenlet jobb oldalán álló nyelvek $*$-mentesek és mivel a $*$-mentes nyelvek zártak a halmaz kivonásra, az $L(M'[q_0, F])$ is $*$-mentes. (Megjegyezzük, hogy az összes szót tartalmazó Σ^* nyelv $*$-mentes, mert $\Sigma^* = \{a\} \cup \overline{\{a\}}$ minden $a \in \Sigma$-ra). □

4.28. Lemma. Ha egy $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv felismerhető olyan félautomatában, amelyet $\{Aut(U)\}$-ból kapunk kaszkád szorzással, akkor az L nyelv $*$-mentes.

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy L felismerhető az $M = \prod_{i=1}^{n} Aut(U)[\Sigma, \varphi_i]$ automatában, ahol a jobb oldalon kaszkád szorzás áll valamely $n \geq 0$-ra. Az n szerinti indukcióval megmutatjuk, hogy L $*$-mentes.

(i) Az $n = 0$ esetben $M = Triv(\Sigma)$. Így az M-ben felismerhető nyelvek $\emptyset$ és Σ^*, mindkettő $*$-mentes.

(ii) Tegyük fel, hogy $M = M_1 \times_\psi Aut(U)$, ahol $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1)$ olyan félautomata, amelyben felismert valamennyi nyelv $*$-mentes.

Felidézzük, hogy $Aut(U)$ állapothalmaza $\{a, b\}$, tehát M állapothalmaza $Q_1 \times \{a, b\}$. Továbbá ψ egy $Q_1 \times \Sigma \to \{1, a, b\}$ alakú leképezés. Végül, ha δ-val jelöljük M átmenetfüggvényét, akkor minden $(p, i) \in Q_1 \times \{a, b\}$ állapotra és $c \in \Sigma$ input jelre

$$\delta((p, i), c) = (\delta_1(p, c), \delta_U(i, \psi(p, c))).$$

Elegendő megmutatni, hogy M bármely két (p_0, i) és (p_1, j) állapotára $L(M[(p_0, i), \{(p_1, j)\}])$ $*$-mentes.

Csak az $i = a, j = a$ esettel foglalkozunk, a többi eset hasonlóan kezelhető. Először is megjegyezzük, hogy

$$L(M[(p_0, a), \{(p_1, a)\}]) \subseteq L(M_1[p_0, \{p_1\}]).$$

Legyen M_1' az a félautomata, amelyet úgy kapunk M_1-ből, hogy elhagyjuk belőle az összes olyan $\delta_1(p, c) = p'$ alakú átmenetet, ahol $\psi(p, c) \neq 1$, tehát csak azokat az átmeneteket hagyjuk meg, amelyek a második komponenst biztosan nem változtatják meg. A 4.27. lemma szerint az M_1'-ben felismert valamennyi nyelv $*$-mentes. Továbbá

$$L(M[(p_0, a), \{(p_1, a)\}]) =$$
$$L(M_1'[p_0, \{p_1\}]) \bigcup \Big(\bigcup_{\substack{(p,c) \in Q_1 \times \Sigma \\ \psi(p,c) = a}} L(M_1[p_0, \{p\}]) c L(M_1'[pc, \{p_1\}]) \Big).$$

Mivel az egyenlet jobb oldalán álló valamennyi nyelv $*$-mentes, ezért az $L(M[(p_0, a), \{(p_1, a)\}])$ is $*$-mentes. Az egyenlőség értelmezése a következő. $L(M_1'[p_0, \{p_1\}])$ azon szavakból áll, amelyeket a bal oldalon álló automata úgy ismer fel, hogy közben az állapotainak a második komponense nem változik. Azon szavak, amelyeket a bal oldalon álló automata úgy ismer fel, hogy közben az állapotainak a második komponense is változik ucv alakú szavak, ahol $c \in \Sigma$ az utolsó előfordulása egy olyan betűnek, amelyre $\psi(p, c) = a$, vagyis amely hatására a második komponens a-ra változik és utána az is marad. □

Ezzel bebizonyítottuk a Schützenberger tétel másik irányát is.

4.29. Lemma. Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelv esetén, ha S_L véges és aperiodikus, akkor L $*$-mentes.

Bizonyítás. Következik a 4.26. és a 4.28. lemmákból □

Befejezésül (részben bizonyítás nélkül) megadjuk a $*$-mentes nyelvek egy további jellemzését. Itt FO($<$)-el jelöljük az MSO($+1$) logikának azt a szegmensét, amelyben csak elsőrendű kifejezések szerepelhetnek, ugyanakkor megengedjük az $x < y$ relációt.

4.30. Tétel. *Tetszőleges $L \subseteq \Sigma^*$ nyelvre a következő három állítás ekvivalens:*

(1) L $*$-mentes,

(2) S_L véges és aperiodikus,

(3) L definálható az FO($<$) logikában.

Hivatkozások

[AU72] A. V. Aho, J. D. Ullman, *The Theory of Parsing, Translation and Compiling I.,II.*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972.

[Br89] J. G. Brookshear, *Theory of Computation – Formal Langauges, Automata, and Complexity*, The Benjamin-Cummings Publishing Company, 1989.

[CL89] J. Carroll, D. Long, *Theory of Finite Automata*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1989.

[ÉZ] Ésik Zoltán, Automaták és formális nyelvek, egyetemi előadás.

[Ge06] Gécseg Ferenc, Automaták és formális nyelvek, Polygon Kiadó, SZTE, 2006.

[Fü99,04] Fülöp Zoltán, Formális nyelvek és szintaktikus elemzésük, Polygon Kiadó, SZTE, 1999, bővített kiadás 2004.

[Ha78] M. A. Harrison, *Introduction to Formal Language Theory*, Addison Wesley, 1978.

[HA79] J. E. Hopcroft, A. V. Aho, *Introduction to Automata Theory, Languages, and Computation*, Addison Wesley, 1979.

[Ke95] D. Kelley, *Automata and Formal Languages*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[Ko97] D. Kozen, *Automata and Computability*, Springer-Verlag, Ney York, 1997.

[MAK88] R. N. Moll, M. A. Arbib, A. J. Kfoury, *An Introduction to Formal Language Theory*, Springer Publishing Company, 1988.

[Sa73] A. Salomaa, *Formal Languages*, Academic Press, 1973.

[SR97] A. Salomaa, G. Rozenberg (Editors), *The Handbook of Formal Langauges, I.,II.*, Springer Publishing Company, 1997.

[St94] H. Straubing, *Finite Automata, Formal Logic, and Circuit Complexity*, Birkhäuser, 1994.