Faautomaták

Fülöp Zoltán

Szegedi Tudományegyetem

Számítástudomány Alapjai Tanszék

fulop@inf.u-szeged.hu

2018. tavaszi félév

IRODALOM

- Gécseg Ferenc, Automaták és formális nyelvek, Polygon, Szeged, 2005.
- H. Comon, M. Dauchet, R. Gilleron, F. Jacquemard, D. Lugiez, S. Tison, and M. Tommasi, Tree automata techniques and applications, http://www.grappa.univ-lille3.ft/tata, 1997.
- Fülöp Zoltán, Heiko Vogler, Weighted Tree Automata and Tree Transducers, in: Handbook of Weighted Automata (Szerk.: M. Droste, W. Kuich és H. Vogler), Springer-Verlag, 2009, Chapter 9, 313-403.

ALGEBRAI ALAPFOGALMAK

$A \neq \emptyset$ egy halmaz, $m \geq 0$ egy egész szám esetén

$f: A^m \to A$ leképezést A-n értelmezett *m-változós műveletnek* nevezzük

Mivel $A^0 = \{()\}$, egy 0-változós művelet egy

$$f: \{()\} \to A$$

típusú leképezés, vagyis kijelöli A valamely elemét (ti. $()$-nak a f melletti képét). Ezt az elemet általában azonosítjuk magával a 0-változós f művelettel.

Univerzális algebra (vagy röviden *algebra*) egy $\mathcal{A} = (A, F)$ rendszer, ahol

- $A \neq \emptyset$ halmaz, az algebra *tartóhalmaza*,
- F az A-n értelmezett műveletek egy (nem üres) halmaza.

ALGEBRAI ALAPFOGALMAK

Általában nem egyetlen algebrával dolgozunk, hanem algebrák egy olyan osztályával, amelyben az egyes algebrák műveleteit ugyanúgy jelöljük.

Műveleti szimbólumok halmaza: $\Sigma \neq \emptyset$ halmaz, $r: \ \Sigma \to \{0, 1, \ldots\}$

Ha Σ véges, akkor *rangolt ábécé*

Ha $r(\sigma) = m$ ($\sigma \in \Sigma$), akkor σ *m-változós műveleti szimbólum*, σ *rangja* vagy *aritása* m.

Jelölés: $\Sigma_m = \{\sigma \in \Sigma \mid r(\sigma) = m\}$

Ekkor $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_1 \bigcup \ldots$, ahol $\Sigma_k \bigcap \Sigma_l = \emptyset$, ha $k \neq l$

Legyen Σ műveleti szimbólumok egy halmaza.

Σ-*algebra*: egy $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$ algebra, ahol $\Sigma^{\mathcal{A}} = \{\sigma^{\mathcal{A}} \mid \sigma \in \Sigma\}$ és ha $\sigma \in \Sigma_m$, akkor $\sigma^{\mathcal{A}}$ egy m-változós művelet A-n.

$\sigma^{\mathcal{A}}$-t a σ szimbólum $\mathcal{A}$-beli *realizáltjának* nevezzük.

Példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_2$, ahol $\Sigma_2 = \{\oplus, \odot\}$ és $\Sigma_0 = \{o, e\}$. Tekintsük az $\mathcal{A} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Sigma^{\mathcal{A}})$ és $\mathcal{B} = (\mathbb{N} \cup \{\infty\}, \Sigma^{\mathcal{B}})$ Σ-algebrákat, ahol $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

$\oplus^{\mathcal{A}}$ az összeadás, $\odot^{\mathcal{A}}$ a szorzás, $o^{\mathcal{A}} = 0$ és $e^{\mathcal{A}} = 1$, továbbá

$\oplus^{\mathcal{B}}$ a minimum képzés, $\odot^{\mathcal{B}}$ az összeadás, $o^{\mathcal{B}} = \infty$ és $e^{\mathcal{B}} = 0$.

Ezen esetben mindkét algebrában ugyanazok az azonosságok teljesülnek, pl
$\forall(a, b, c \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}) : a \oplus b = b \oplus a, a \oplus o = o \oplus a = a, a \odot e = e \odot a = a,$
$a \odot o = o \odot a = o,$
$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$ és $(b \oplus c) \odot a = (b \odot a) \oplus (c \odot a)$.
(Általában nem biztos.)

Ha nem okoz félreértést, akkor $\Sigma^{\mathcal{A}}$-ból és $\sigma^{\mathcal{A}}$-ból elhagyjuk $\mathcal{A}$-t:
az algebrát $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$-val jelöljük és $\sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)$ helyett $\sigma(a_1, \ldots, a_m)$-et írunk.

A Σ-algebrákat kaligrafikus nagybetűkkel, tartóhalmazukat pedig a megfelelő latin nagybetűkkel jelöljük: $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$, $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$, stb.

$\mathcal{A}$ *véges*, ha A és Σ véges (A véges és Σ rangolt ábécé)

$\mathcal{B} = (B, \Sigma)$ az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ algebra *részalgebrája*, ha

- $B \subseteq A$ és
- $\sigma^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_m) = \sigma^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_m)$ $(b_1, \ldots, b_m \in B,\ \sigma \in \Sigma_m)$

B az A *zárt részhalmaza*, ha $\sigma^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_m) \in B$ minden $b_1, \ldots, b_m \in B$-re

Az A zárt részhalmazai az $\mathcal{A}$ részalgebráinak tartóhalmazai.

Jelölje $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ az $\mathcal{A}$ zárt részhalmazainak a halmazát.

Nyilvánvaló, hogy $\mathbf{S}(\mathcal{A})$ zárt a metszetképzésre nézve.

Legyen $H \subseteq A$ és

$$[H] = \bigcap(B \mid B \in \mathbf{S}(\mathcal{A}),\ H \subseteq B).$$

Ha $[H] \neq \emptyset$, akkor $[H]$ az $\mathcal{A}$ részalgebrája, amit az $\mathcal{A}$ algebra H *által generált részalgebrájának* nevezünk.

Amennyiben $\Sigma_0 \neq \emptyset$, akkor $[H]$ sohasem üres, még akkor sem, ha H az üres halmaz.

Legyenek $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ Σ-algebrák.

Homomorfizmus $\mathcal{A}$-ból $\mathcal{B}$-be: olyan $\varphi : A \to B$ leképezés, melyre tetszőleges $\sigma \in \Sigma_m$ és $a_1, \ldots, a_m \in A$ esetén

$$\varphi(\sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = \sigma^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)).$$

Ha van $\mathcal{A}$-ból $\mathcal{B}$-be olyan φ homomorfizmus, amely *ráképezés* is, akkor $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ algebra *homomorf képe*.

Amennyiben φ kölcsönösen egyértelmű is, akkor φ *izomorfizmus*, és azt mondjuk, hogy az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ algebrák *izomorfak*. Jelölése: $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Jelölések: A halmaz, $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalencia reláció esetén:

- $(a, b) \in \rho$: $a \equiv b(\rho)$ (lehetne még $a\rho b$, de most nem ezt használjuk)
- $a \in A$: $a/\rho = \{b \mid a \equiv b(\rho);\ b \in A\}$,
- $B \subseteq A$: $B/\rho = \{b/\rho \mid b \in B\}$ (ahol b/ρ-nak lehetnek elemei B-n kívül is).

$\mathcal{A}$ algebra egy *kongruenciája*: olyan $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalencia reláció, melyre minden $\sigma \in \Sigma_m$ és $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in A$ esetén

$$a_i \equiv b_i(\rho)(i = 1, \ldots, m) \Rightarrow \sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) \equiv \sigma^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_m)(\rho).$$

Legyen $\mathcal{A}$ egy Σ-algebra, ρ az $\mathcal{A}$ egy kongruenciája. Értelmezzük az $\mathcal{A}/\rho = (A/\rho, \Sigma)$ algebrát a

$$\sigma^{\mathcal{A}/\rho}(a_1/\rho, \ldots, a_m/\rho) = \sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)/\rho$$

$(a_1, \ldots, a_m \in A,\ \sigma \in \Sigma_m)$ egyenlőséggel.

Ekkor $\sigma^{\mathcal{A}/\rho}$ jólértelmezett, mivel ρ kongruencia reláció.

$\mathcal{A}/\rho$-t az $\mathcal{A}$ algebra ρ-szerinti *faktor algebrájának* nevezzük.

Homomorfia tétel: a homomorfizmus és a kongruencia fogalmának összekapcsolása.

Tétel *Ha ρ az $\mathcal{A}$ algebra kongruenciája, akkor $\mathcal{A}/\rho$ az $\mathcal{A}$ homomorf képe. Fordítva, ha $\mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ homorf képe, akkor $\mathcal{A}$-nak van olyan ρ kongruenciája, hogy $\mathcal{A}/\rho \cong \mathcal{B}$.*

Bizonyítás $\mathcal{A}/\rho$ az $\mathcal{A}$ homomorf képe a $\varphi(a) = a/\rho$ $(a \in A)$ természetes homomorfizmus mellett.

Fordítva, legyen $\varphi : A \to B$ az $\mathcal{A}$-nak $\mathcal{B}$-re való homomorf leképezése.
Értelmezzük A-n a ρ relációt az

$$a \equiv b(\rho) \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)\ (a, b \in A)$$

ekvivalenciával. Ekkor ρ kongruencia relácó lesz.

$\psi:\ A/\rho \to B$ a $\psi(a/\rho) = \varphi(a)$ $(a \in A)$ $\mathcal{A}/\rho$-nak $\mathcal{B}$-re való izomorf leképezése.
$\square$

$\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ *és* $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$ Σ-*algebrák direktszorzata*: $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (A \times B, \Sigma^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}})$ algebra, ahol

$$\sigma^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m)) = (\sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m), \sigma^{\mathcal{B}}(b_1, \ldots, b_m))$$

($\sigma \in \Sigma_m$, $(a_1, b_1), \ldots, (a_m, b_m) \in A \times B$. A direktszorzat fogalma természetes módon terjeszthető ki kettőnél több tényezőre is.

Később szükségünk lesz ”összetett” műveletekre, ahol műveletek másik műveletekbe beágyazva szerepelnek. Pl. egy $\mathcal{S} = (S, \{\cdot\})$ félcsoportot az

$$(s_1 \cdot s_2) \cdot s_3 = s_1 \cdot (s_2 \cdot s_3) \; (s_1, s_2, s_3 \in S)$$

azonossággal értelmezünk, amit $\cdot(\cdot(x_1, x_2), x_3) = \cdot(x_1, \cdot(x_2, x_3))$ alakban is írhatunk.

Definíció Legyen Σ műveleti szimbólumok halmaza, Z pedig tetszőleges halmaz, melyre $Z \bigcap \Sigma = \emptyset$. A ΣZ*-termek* (polinom szimbólumok) $F_\Sigma(Z)$ halmaza a $(Z \bigcup \Sigma_0 \bigcup \{,\} \bigcup \{(,)\})^*$ halmaz legszűkebb olyan F részhalmaza, melyre:

- $Z \bigcup \Sigma_0 \subseteq F$,
- minden $m \geq 1$, $\sigma \in \Sigma_m$ és $p_1, \ldots, p_m \in F$ esetén $\sigma(p_1, \ldots, p_m) \in F$.

Példa. Legyen $\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_0$, ahol $\Sigma_2 = \{\sigma\}$, $\Sigma_1 = \{\gamma\}$ és $\Sigma_0 = \{\alpha\}$ és legyen $Z = \{a, b\}$.

Akkor a következő termek $F_\Sigma(Z)$ elemei: a, b, α, $\gamma(b)$, $\gamma(\alpha)$, $\sigma(b, \alpha)$, $\sigma(\gamma(a), \alpha)$, $\sigma(\gamma(a), \sigma(\alpha, b))$, ...

Összetett műveletek

Legyen Σ műveleti szimbólumok egy halmaza. Minden $n \geq 0$ esetén értelmezzük az $X_n = \{x_1, \ldots, x_n\}$ halmazt, melynek elemeit változóknak nevezzük. Feltesszük, hogy $X_n \bigcap \Sigma = \emptyset$.

Tekintsük az $F_\Sigma(X_n)$ halmazt.

Ha $n = 0$ és $\Sigma_0 = \emptyset$, akkor $F_\Sigma(X_n)$ üres. Ezért a következőkben mindig feltesszük, hogy $n \neq 0$ vagy $\Sigma_0 \neq \emptyset$, tehát $F_\Sigma(X_n)$ nem üres.

Ha ráadásul van olyan $m > 0$, hogy $\Sigma_m \neq \emptyset$, akkor $F_\Sigma(X_n)$ végtelen.

Nyilvánvaló, hogy $F_\Sigma(X_k) \subseteq F_{\Sigma'}(X_l)$ ha $\Sigma \subseteq \Sigma'$ és $k \leq l$.

Az $n = 0$ (és $\Sigma_0 \neq \emptyset$) eset: ekkor $X_n = \emptyset$, ezért a termekben nem szerepelnek változók. $F_\Sigma(X_0)$-t röviden csak F_Σ-val jelöljük. F_Σ a Σ feletti alap termek halmaza.

Legyen $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy algebra és $p \in F_\Sigma(X_n)$ egy term. A p által $\mathcal{A}$-ban indukált *polinom függvény* alatt azt a $p^\mathcal{A} : A^n \to A$ leképezést értjük, melyre tetszőleges $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in A^n$ esetén:

- ha $p = x_i$ $(1 \le i \le n)$, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = a_i$,
- ha $p = \sigma \in \Sigma_0$, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \sigma^\mathcal{A}$,
- ha $p = \sigma(p_1, \dots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0, p_1, \dots, p_m \in F_\Sigma(X_n))$, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \sigma^\mathcal{A}(p_1^\mathcal{A}(\mathbf{a}), \dots, p_m^\mathcal{A}(\mathbf{a}))$.

Megjegyzések: 1) Ha $n = 0$, akkor $p^\mathcal{A}(\,)$ helyett $p^\mathcal{A}$-t írunk.

2) Ha $H = \{h_1, \dots, h_n\} \subseteq A$, akkor $[H] = \{p(h_1, \dots, h_n) \mid p \in F_\Sigma(X_n)\}$.

Jelölés: ha $p \in F_\Sigma(X_n)$ és $p_1, \dots, p_n \in F_\Sigma(X_m)$, akkor $p(p_1, \dots, p_n) = p(x_1 \leftarrow p_1, \dots, x_n \leftarrow p_n) \in F_\Sigma(X_m)$, ahol ez utóbbi azt a fát jelenti, amelyet úgy kapunk p-ből, hogy abban egyidejűleg x_1 helyére p_1-et, ... , x_n helyére p_n-et helyettesítünk.

Megjegyzés: homomorfizmus és a kongruencia feltételei polinomokra is teljesülnek.

1) Ha $\varphi : A \to B$ leképezés homomorfizmus $\mathcal{A}$-ból $\mathcal{B}$-be, akkor tetszőleges $p \in F_\Sigma(X_n)$ és $a_1, \ldots, a_m \in A$ esetén

$$\varphi(p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m)) = p^{\mathcal{B}}(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_m)).$$

2) Ha ρ kongruencia az $\mathcal{A}$ algebrán, akkor minden $p \in F_\Sigma(X_n)$ term és $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m \in A$ esetén az $a_i \equiv b_i(\rho)(i = 1, \ldots, m)$ összefüggésekből következik, hogy

$$p^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) \equiv p^{\mathcal{A}}(b_1, \ldots, b_m)(\rho).$$

Bizonyítás mindkét esetben a p felépítése szerinti indukcióval.

Legyen $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ tetszőleges algebra. Minden $p \in F_\Sigma(A \bigcup X_n)$ term meghatároz egy $p^\mathcal{A} : A^n \to A$ leképezést, amelyet a következőképpen definiálunk. Tetszőleges $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in A^n$-re:

- ha $p = a$ valamely $a \in A$-ra, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = a$,

- ha $p = x_i$, $p = \sigma \in \Sigma_0$ vagy $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a})$-t ugyanúgy definiáljuk, mint a polinom függvény esetében tettük.

Ha $p \in F_\Sigma(A \bigcup X_1)$, akkor a $p^\mathcal{A} : A \to A$ leképezést *egyváltozós algebrai függvénynek* nevezzük. Megjegyezzük, hogy ez esetben x_1 egynél többször is előfordulhat p-ben.

$\mathcal{A}$ egyváltozós algebrai függvényeinek halmazát $\mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$-val jelöljük.

Ha $p = \sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_1, c_{i+1}, \ldots, c_m)$ alakú valamely $m > 0, \sigma \in \Sigma_m$, $1 \leq i \leq m$ és $c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_m \in A$-ra, akkor p-t az $\mathcal{A}$ algebra *elemi transzlációjának* nevezzük. Ez esetben x_1 pontosan egyszer fordul elő p-ben.

$\mathcal{A}$ elemi transzlációinak halmazát $\mathrm{ET}(\mathcal{A})$-val jelöljük.

Nyilvánvaló, hogy $\mathrm{ET}(\mathcal{A}) \subseteq \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$.

Tétel Legyen $\mathcal{A}$ egy Σ-algebra, $\rho \subseteq A \times A$ pedig ekvivalencia reláció. Úgy ρ akkor és csakis akkor kongruencia $\mathcal{A}$-n, ha tetszőleges $m > 0$ egész szám, $\sigma \in \Sigma_m$ műveleti szimbólum, $1 \leq i \leq m$ egész szám, $a, b \in A$ és $\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_1, c_{i+1}, \ldots, c_m) \in \mathrm{ET}(\mathcal{A})$ esetén az

$$a \equiv b(\rho)$$

feltételből következik, hogy

$$\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \ldots, c_m) \equiv \sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \ldots, c_m)(\rho).$$

Bizonyítás Ha ρ kongruencia, akkor nyilvánvalóan következnek a feltételek, mert $\equiv$ ekvivalencia reláció és így a reflexívitás miatt $c_1 \equiv c_1(\rho), \ldots, c_{i-1} \equiv c_{i-1}(\rho), c_{i+1} \equiv c_{i+1}(\rho), \ldots, c_n \equiv c_n(\rho)$ is teljesül.

A fordított irány bizonyításához legyen $\sigma \in \Sigma_m$ $(m > 0)$ tetszőleges és tegyük fel, hogy $a_i \equiv b_i(\rho), (a_i, b_i \in A,\ i = 1, \ldots, m)$. Ekkor a feltételt alkalmazva a $\sigma(x_1, a_2, \ldots, a_m)$ elemi transzlációra és az $a_1 \equiv b_1(\rho)$ párra, kapjuk, hogy

$$\sigma(a_1, a_2, \ldots, a_m) \equiv \sigma(b_1, a_2, \ldots, a_m)(\rho).$$

Tfh, hogy i-re $(1 \leq i < m)$ igazoltuk, hogy

$$\sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \ldots, a_m) \equiv \underline{\sigma(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, a_{i+1}, \ldots, a_m)}(\rho)$$

A feltételt alkalmazva a $\sigma(b_1, \ldots, b_i, x_1, a_{i+2}, \ldots, a_m)$ transzlációra és az $a_{i+1} \equiv b_{i+1}(\rho)$ párra, kapjuk, hogy

$$\underline{\sigma(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_m)} \equiv \sigma(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_m)(\rho).$$

Végül, a tranzitivitás miatt

$$\sigma(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_m) \equiv \sigma(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, a_{i+2}, \ldots, a_m)(\rho).$$

Az $i = m$ esetben kapjuk, hogy $\sigma(a_1, \ldots, a_m) \equiv \sigma(b_1, \ldots, b_m)(\rho)$, vagyis ρ az $\mathcal{A}$ algebra kongruenciája. $\square$

Legyn Σ műveleti szimbólumok halmaza, n nemnegatív egész szám.

ΣX_n-*term algebra*: az $\mathcal{F}_\Sigma(X_n) = (F_\Sigma(X_n), \Sigma^{\mathcal{F}_\Sigma(X_n)})$ algebra, ahol minden $m \geq 0$, $(\sigma \in \Sigma_m,\ p_1, \ldots, p_m \in F_\Sigma(X_n))$ esetén

$$\sigma^{\mathcal{F}_\Sigma(X_n)}(p_1, \ldots, p_m) = \sigma(p_1, \ldots, p_m).$$

$\mathcal{F}_\Sigma(X_n)$: az X_n által *szabadon generált szabad* Σ-algebra

Tétel Legyen $\mathcal{A}$ tetszőleges Σ-algebra, $\varphi:\ X_n \to A$ pedig tetszőleges leképezés. Akkor φ egyértelműen kiterjeszthető $\mathcal{F}_\Sigma(X_n)$-nek $\mathcal{A}$-ba való homomorfizmusává.

Bizonyítás Mivel a homorf leképezés és a polinomok alkalmazása felcserélhető, $\mathcal{F}_\Sigma(X_n)$ elemei pedig előállnak $p^{\mathcal{F}_\Sigma(X_n)}(x_1, \ldots, x_n)$ $(p \in F_\Sigma(X_n))$ alakban, ezért a kiterjesztés csak

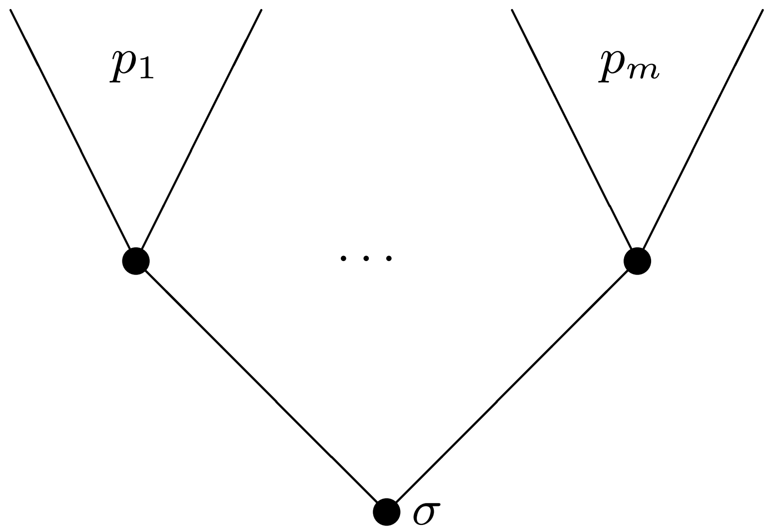
$$\varphi(p^{\mathcal{F}_\Sigma(X_n)}(x_1, \ldots, x_n)) = p^{\mathcal{A}}(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$$

lehet. Könnyű megmutatni, hogy ilyen módon valóban homomorfizmushoz jutunk.

TERMEK, FÁK

A $p \in F_\Sigma(Z)$ termet reprezentáló véges, irányított, címkézett és rendezett fa:

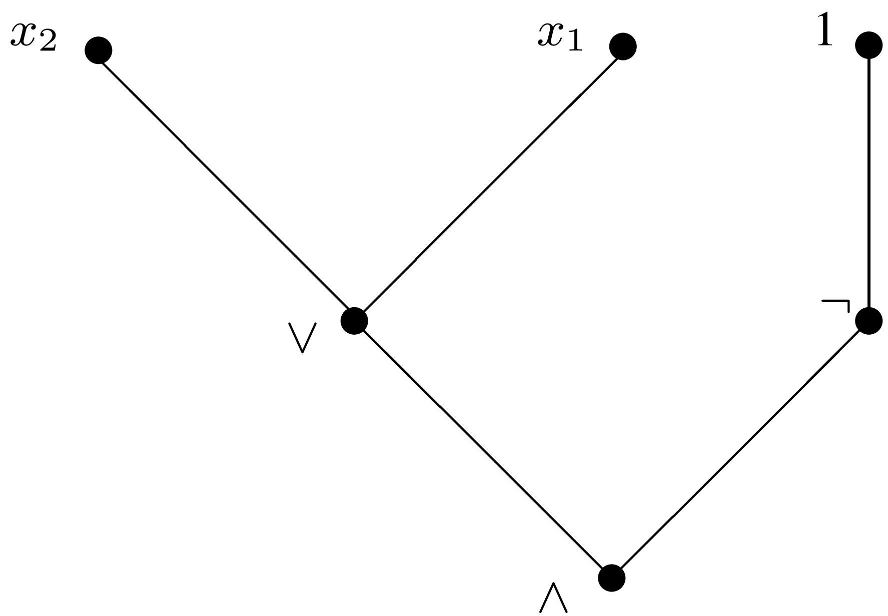
- $p = z \in Z$: egy csúcspontú fa, melynek címkéje z,
- $p = \sigma \in \Sigma_0$: egy csúcspontú fa, melynek címkéje σ,
- $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$:



TERMEK, FÁK

Példa $\Sigma_0 = \{0, 1\}$, $\Sigma_1 = \{\neg\}$, $\Sigma_2 = \{\vee, \wedge\}$, és $\Sigma_m = \emptyset$, ha $m \geq 3$, $Z = X_2$:

$p = \wedge(\vee(x_2, x_1), \neg(1))$



TERMEK, FÁK

Legyen $p(\in F_\Sigma(Z))$ egy ΣZ-fa.

A p fa *részfáinak* $\mathrm{sub}(p)$ halmaza:
(i) ha $p \in Z \bigcup \Sigma_0$, akkor $\mathrm{sub}(p) = \{p\}$,
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\mathrm{sub}(p) = \bigcup(\mathrm{sub}(p_i) \mid i = 1, \ldots, m) \bigcup \{p\}.$$

Tehát $\mathrm{sub}(p) \subseteq F_\Sigma(Z)$.

A p fa $\mathrm{root}(p)$ *gyökere*:
(i) ha $p \in Z \bigcup \Sigma_0$, akkor $\mathrm{root}(p) = p$,
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\mathrm{root}(p) = \sigma.$$

Tehát $\mathrm{root}(p) \in Z \bigcup \Sigma$.

TERMEK, FÁK

A p fa $\mathrm{h}(p)$ *magassága*:
(i) ha $p \in Z \bigcup \Sigma_0$, akkor $\mathrm{h}(p) = 0$,
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\mathrm{h}(p) = 1 + \max(\mathrm{h}(p_i) \mid i = 1, \ldots, m).$$

Tehát $\mathrm{h}(p)$ egy nemnegatív egész szám.

A p fa $\mathrm{size}(p)$ *mérete*:
(i) ha $p \in Z \bigcup \Sigma_0$, akkor $\mathrm{size}(p) = 1$,
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\mathrm{size}(p) = 1 + \sum_{i=1}^{m} \mathrm{size}(p_i).$$

Tehát $\mathrm{size}(p)$ egy pozitív egész szám.

A p fa $\bar{\mathrm{fr}}(p)$ *határa*:

(ia) ha $p = z \in Z$, akkor $\bar{\mathrm{fr}}(p) = z$,

(ib) ha $p = \sigma \in \Sigma_0$, akkor $\bar{\mathrm{fr}}(p) = \varepsilon$, ahol ε az üres szó,

(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\bar{\mathrm{fr}}(p) = \bar{\mathrm{fr}}(p_1) \ldots \bar{\mathrm{fr}}(p_m).$$

Tehát $\bar{\mathrm{fr}}(p) \in Z^*$.

Észrevételek.

A p fa 0 magasságú részfáit gyakran p *leveleinek* nevezzük. Világos, hogy $\mathrm{h}(p)$ nem más, mint a p-t reprezentáló gráfban a gyökértől a levelekig vezető utak hosszainak a maximuma, míg $\mathrm{size}(p)$ egyszerűen ezen gráf csúcsainak a száma.

Egy részfának több előfordulása is lehet p-ben. Egy $s \in \mathrm{sub}(p)$ fa a p *valódi részfája,* ha $s \notin Z \bigcup \Sigma_0$ és $s \neq p$, vagyis s a p-nek nem levele és nem maga p.

Példa A már ismert $p = \wedge(\vee(x_2, x_1), \neg(1))$ fa esetében
$\mathrm{sub}(p) = \{p, \vee(x_2, x_1), x_2, x_1, \neg(1), 1\}$,
$\mathrm{root}(p) = \wedge$, $\mathrm{h}(p) = 2$, $\mathrm{size}(p) = 6$ és $\bar{\mathrm{fr}}(p) = x_2 x_1$.

Fanyelvek (erdők)

Az $F_\Sigma(X_n)$ tetszőleges T részhalmazát ΣX_n*-fanyelvnek (vagy erdőnek)* nevezzük

Példa.

Legyen $n = 2$, $\Sigma = \Sigma_2 \bigcup \Sigma_1 \bigcup \Sigma_0$, ahol $\Sigma_2 = \{\sigma\}$ és $\Sigma_1 = \{\gamma\}$, and $\Sigma_0 = \{\alpha\}$. Ekkor

$$T = \{\sigma(\gamma^k(x_1), \gamma^k(x_1)) \mid k \geq 0\} \text{ és } U = \{\sigma(\gamma^k(x_1), \gamma^l(x_1)) \mid k, l \geq 0\}$$

valamint

$$T' = \{\sigma(\gamma^k(\alpha), \gamma^k(\alpha)) \mid k \geq 0\} \text{ és } U' = \{\sigma(\gamma^k(\alpha), \gamma^l(\alpha)) \mid k, l \geq 0\}$$

fanyelvek ($T, U \subseteq F_\Sigma(X_1)$ és $T', U' \subseteq F_\Sigma$), ahol $\gamma^k(x_1)$ jelöli azt a $\gamma(\gamma(\ldots \gamma(x_1) \ldots))$ fát, melyben γ k-szor fordul elő.

Faautomata

ΣX_n*-faautomata:* egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ rendszer, ahol

- $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ – véges Σ-algebra, amely elemei *állapotok*,
- $\mathbf{a} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \in A^n$ – *kezdő-vektor*,
- $A' \subseteq A$ – *végállapotok* halmaza.

Az $\mathbf{A}$ faautomta *által felismert* $T(\mathbf{A})$ *fanyelv:*

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid p(\mathbf{a}) \in A'\}$$

Egy $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ fanyelv *felismerhető*, ha van olyan $\mathbf{A}$ ΣX_n-faautomata, melyre $T = T(\mathbf{A})$

A ΣX_n-faautomatákkal felismerhető fanyelvek osztályát $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$-nel jelöljük.

FAAUTOMATA

Tehát egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ faautomata estén az $\mathbf{a}$ kezdő-vektor dimenziója (komponenseinek száma) adja azt az n-et, melyre $T(\mathbf{A}) \subseteq F_\Sigma(X_n)$.

A jelölésről:

- alaphalmaz: $A \neq \emptyset$
- Σ-algebra: $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$
- faautomata: $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$, ahol $A' \subseteq A$ és $\mathbf{a} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}) \in A^n$
- hasonlóan B, $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$, $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{b}, B')$, stb

Faautomata

ΣX_n faautomata az $n = 0$ esetben.

Ekkor $\mathbf{a} = (\,)$, tehát a faautomata „csak” $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A')$ alakú, ahol $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy véges Σ-algebra és $A' \subseteq A$.

Ebben az esetben a faautomata alap termeket ismer fel:

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma \mid p^{\mathcal{A}} \in A'\}.$$

Az $n = 0$ eset is elég általános ahhoz, hogy tanulmányozhassuk a faautomaták legfontosabb tulajdonságait. Kivéve, a faautomata által felismert fák határai által meghatározott nyelveket. Erre az $n > 0$ eset lesz alkalmas.

VÉGES AUTOMATA

Automata felismerő: egy $\mathbf{M} = (Q, Z, \delta, q_0, Q')$ rendszer, ahol

- $Q \neq \emptyset$ véges halmaz – *állapotok halmaza*,
- $Z \neq \emptyset$ véges halmaz – *bemenő jelek halmaza*,
- $\delta : Q \times Z \to Q$ – *átmenet-függvény*,
- $q_0 \in Q$ – *kezdőállapot*,
- $Q' \subseteq Q$ – *végállapotok halmaza*.

VÉGES AUTOMATA

Z-feletti véges szavak halmaza: Z^*

$u = z_1 z_2 \ldots z_{k-1} z_k \in Z^*$ egy (input) szó, ahol $z_1, \ldots, z_k \in Z$

$$q_0 \xrightarrow{z_1} q_1 \xrightarrow{z_2} \quad \cdots \quad \xrightarrow{z_{k-1}} q_{k-1} \xrightarrow{z_k} q_k$$

$q_1 = \delta(q_0, z_1), \ldots, q_k = \delta(q_{k-1}, z_k)$, jelölés: $q_k = q_0 u^{\mathbf{M}}$ vagy csak $q_k = q_0 u$

Az $\mathbf{M}$ *által felismert* $L(\mathbf{M}) \subseteq Z^*$ *nyelv:*

$$L(\mathbf{M}) = \{u \in Z^* \mid q_0 u \in Q'\}.$$

VÉGES AUTOMATA, MINT FAAUTOMATA

$\mathbf{M} = (Q, Z, \delta, q_0, Q')$ automata esetén

$z \in Z$ felfogható, mint egy σ_z egyváltozós műveleti szimbólum, továbbá legyen $\Sigma_Z = (\Sigma_Z)_1 = \{\sigma_z \mid z \in Z\}$

Konstruáljuk meg az $\mathcal{A} = (A, \Sigma_Z)$ univerzális algebrát, ahol $A = Q$

$$\sigma_z^{\mathcal{A}}(q) = \delta(q, z), \qquad (q \in A,\ z \in Z).$$

Az $u = z_1 \dots z_k \in Z^*$ szónak megfeleltetjük a $p_u = \sigma_{z_k}(\dots(\sigma_{z_1}(x_1))\dots)$ fát

(Ugyanannak az adatnak egy másik reprezentációja.)

VÉGES AUTOMATA, MINT FAAUTOMATA

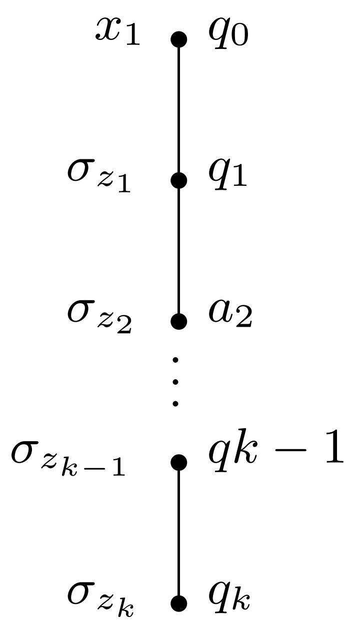
Tetszőleges $q_0 \in Q$ és $u = z_1 \dots z_k \in Z^*$ esetén az $\mathbf{M}$ automatában:

$q_1 = \delta(q_0, z_1), \dots, q_k = \delta(q_{k-1}, z_k)$, vagyis

$$q_0 \xrightarrow{z_1} q_1 \xrightarrow{z_2} \cdots \xrightarrow{z_{k-1}} q_{k-1} \xrightarrow{z_k} q_k$$

VÉGES AUTOMATA, MINT FAAUTOMATA

Az u szónak megfelelő $p_u = \sigma_{z_k}(\ldots \sigma_{z_1}(x_1)\ldots)$ fa kiértékelése az $\mathcal{A}$ algebrában a „q_0 helyen”:



azaz $q_0 u^{\mathbf{M}} = p_u^{\mathcal{A}}(q_0)$

VÉGES AUTOMATA, MINT FAAUTOMATA

Az $\mathbf{M} = (Q, Z, \delta, q_0, Q')$ véges automatához hozzárendeljük az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ $\Sigma_Z X_1$-faautomatát, ahol $\mathbf{a} = (q_0)$, $A' = Q'$ és $\mathcal{A} = (A, \Sigma_Z)$ az előbb megkonstruált algebra. Ekkor tetszőleges $u \in Z^*$ input szóra

$$q_0 u^{\mathbf{M}} \in Q' \Leftrightarrow p_u^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \in A'.$$

Tehát természetes bijekció van az $\mathbf{M}$ által felismert

$$L(\mathbf{M}) = \{u \in Z^* \mid q_0 u \in Q'\}$$

nyelv és az $\mathbf{A}$ által felismert

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_{\Sigma_Z}(X_1) \mid p(\mathbf{a}) \in A'\}$$

fanyelv között.

Ily módon minden véges automata tekinthető faautomatának.

VÉGES AUTOMATA, MINT FAAUTOMATA

Az $\mathbf{M} = (Q, Z, \delta, q_0, Q')$ véges automata szimulálható 0-változós faautomatával is. Ekkor $\Sigma_Z = (\Sigma_Z)_1 \cup (\Sigma_Z)_0 = \{\sigma_z \mid z \in Z\} \cup \{\#\}$, az $u = z_1 \dots z_k \in Z^*$ szónak a $p_u = \sigma_{z_k}(\dots \sigma_{z_1}(\#) \dots) \in F_{\Sigma_Z}$ fát feleltetjük meg.

Az $\mathcal{A} = (A, \Sigma_Z)$ univerzális algebrában (lásd előző diák) továbbra is $\sigma_z^{\mathcal{A}}(q) = \delta(q, z)$, $(q \in A,\ z \in Z)$, továbbá $\#^{\mathcal{A}} = q_0$

Végül az $\mathbf{M}$ véges automatához hozzárendeljük az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A')$ $\Sigma_Z X_0$-faautomatát, ahol ismét $A' = Q'$.

Felismerhető fanyelvek Boole műveletekre való zártsága

$S,\ T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ fanyelvek esetén az $S \bigcup T$, $S \bigcap T$ és
$S \setminus T = \{p \mid p \in S$ és $p \notin T\}$ műveleteket *Boole-féle műveleteknek* nevezzük.

Tétel Tetszőleges Σ-rangolt ábécére és n természetes számra, $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$ zárt a Boole-féle műveletekre nézve.

Bizonyítás Legyenek S és T felismerhető ΣX_n-fanyelvek, azaz $S = T(\mathbf{A})$, $T = T(\mathbf{B})$, ahol

$\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$, $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$, $\mathbf{a} = (a^{(1)}, \ldots, a^{(n)})$ és

$\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{b}, B')$, $\mathcal{B} = (B, \Sigma)$, $\mathbf{b} = (b^{(1)}, \ldots, b^{(n)})$ ΣX_n-faautomaták.

FELISMERTHETŐ FANYELVEK BOOLE MŰVELETEKRE VALÓ ZÁRTSÁGA

Konstruáljuk meg a $\mathbf{C} = (\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathbf{c}, C')$ ΣX_n-faautomatát, ahol $\mathbf{c} = ((a^{(1)}, b^{(1)}), \ldots, (a^{(n)}, b^{(n)}))$, továbbá $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ az $\mathcal{A}$ és $\mathcal{B}$ algebrák direktszozata, C'-t pedig később adjuk meg.

Azonnal látható, hogy

$$p^{\mathcal{A}\times\mathcal{B}}(\mathbf{c}) = (p^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}), p^{\mathcal{B}}(\mathbf{b})).$$

Könnyű számolással igazolható, hogy

$C' = (A' \times B) \bigcup (A \times B')$ esetén: $T(\mathbf{C}) = S \bigcup T$

$C' = A' \times B'$ esetén: $T(\mathbf{C}) = S \bigcap T$ és

$C' = A' \times (B - B')$ esetén: $T(\mathbf{C}) = S \setminus T$. $\square$

PUMPÁLÓ LEMMA FELISMERHETŐ FANYELVEKRE

<u>Jelölések:</u>

Legyen ξ egy új segédszimbólum. Ekkor $\widehat{F}_\Sigma(X_n \bigcup \{\xi\})$-vel jelöljük az összes olyan $F_\Sigma(X_n \bigcup \{\xi\})$ fák halmazát, amelyekben ξ pontosan egyszer fordul elő.

Tetszőleges $p \in F_\Sigma(X_n) \bigcup \widehat{F}_\Sigma(X_n \bigcup \{\xi\})$ és $q \in \widehat{F}_\Sigma(X_n \bigcup \{\xi\})$ esetén

$$p \cdot q = q(\xi \leftarrow p),$$

továbbá a q^k *k-adik hatványát* az alábbi módon értelmezzük:

(i) $q^0 = \xi$, és

(ii) $q^k = q \cdot q^{k-1}$, ha $k > 0$.

PUMPÁLÓ LEMMA FELISMERHETŐ FANYELVEKRE

Tétel (Pumpáló lemma) Legyen $\mathbf{A}$ egy k-állapotú ΣX_n-automata. Ha $p \in T(\mathbf{A})$ legalább k magasságú fa, akkor vannak olyan $q \in F_\Sigma(X_n)$ és $r, s \in \widehat{F}_\Sigma(X_n \bigcup \{\xi\})$ fák, hogy

1) $p = q \cdot r \cdot s$,

2) $\mathrm{h}(r) \geq 1$,

3) $q \cdot r^\ell \cdot s \in T(\mathbf{A})$ $(\ell = 0, 1, \ldots)$.

Bizonyítás Legyen $p \in T(\mathbf{A})$, $\mathrm{h}(p) \geq k$ és tegyük fel, hogy $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$.

Legyen $1 \leq i \leq m$ egy olyan index, melyre $\mathrm{h}(p_i) = \mathrm{h}(p) - 1$ és írjuk fel p-t

$$p = p_i \cdot \sigma(p_1, \ldots, p_{i-1}, \xi, p_{i+1}, \ldots, p_m)$$

alakban. Legyen

$$s_1 := \sigma(p_1, \ldots, p_{i-1}, \xi, p_{i+1}, \ldots, p_m).$$

Ezen eljárást folytatva, p felírható $p = s_{k+1} \cdot s_k \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1$, alakban, ahol

- $s_{k+1} \in F_\Sigma(X_n)$,
- $s_1, \ldots, s_k \in \widehat{F}_\Sigma(X_n \bigcup \{\xi\})$,
- $\mathrm{h}(s_i) \geq 1$ minden $i = 1, \ldots, k$-ra.

Mivel $\mathbf{A}$ állapotainak a száma k, vannak olyan $1 \leq i < j \leq k+1$: indexek, hogy

$$(s_{k+1} \cdot \ldots \cdot s_i)(\mathbf{a}) = (s_{k+1} \cdot \ldots \cdot s_j)(\mathbf{a}).$$

Legyen

$$q = s_{k+1} \cdot \ldots \cdot s_j, \quad r = s_{j-1} \cdot \ldots \cdot s_i, \quad s = s_{i-1} \cdot \ldots \cdot s_1.$$

Azonnal látható, hogy

$$(q \cdot r^\ell \cdot s)(\mathbf{a}) = p(\mathbf{a})$$

minden $\ell = 0, 1, \ldots$-re. □

A PUMPÁLÓ LEMMA ALKALMAZÁSAI

A pumpáló lemma segítségével megmutathatjuk, hogy egy fanyelv nem felismerhető. Nem felismerhető fanyelvek:

1) A nem felismerhető (közönséges) nyelvek kódolásaként kapott fenyelvek. Pl. az $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ nem felismerhető nyelvnek megfelelő

$$\{\underbrace{\sigma_a(\ldots\sigma_a}_{n\text{-szer}}(\underbrace{\sigma_b(\ldots(\sigma_b}_{n\text{-szer}}(x_1))\ldots)) \mid n \geq 0\}$$

fanyelv, ahol σ_a és σ_b egyváltozós szimbólumok.)

2) A fanyelvekre adott példák közül T és T' nem felismerhető.

A PUMPÁLÓ LEMMA ALKALMAZÁSAI

A pumpáló lemma segítségével megmutathatjuk, hogy egy fanyelv nem felismerhető. Nem felismerhető fanyelvek:

3) A teljesen kiegyensúlyozott bináris fákból álló fanyelv nem felismerhető. Legyen $\Sigma = \Sigma_2$, ahol $\Sigma_2 = \{\sigma\}$. Ekkor a

$$\{a, \sigma(a, a), \sigma(\sigma(a, a), \sigma(a, a)), \ldots\}$$

fanyelv nem felismerhető.

A PUMPÁLÓ LEMMA ALKALMAZÁSAI

Eldönthetőségi kérdések felismerhető fanyelvekre.

Tétel Legyen $\mathbf{A}$ egy k-állapotú ΣX_n-automata. Úgy $T(\mathbf{A})$ akkor és csakis akkor nem üres, ha van egy k-nál kisebb magasságú fa $T(\mathbf{A})$-ban.

Bizonyítás Az állítás egyik fele nyilvánvaló

A másik irányra indirekt bizonyítást adunk. Evégett tfh $T(\mathbf{A}) \neq \emptyset$ és minden $T(\mathbf{A})$-beli fa magassága legalább k. Legyen $p \in T(\mathbf{A})$ egy minimális méretű $T(\mathbf{A})$-beli fa.

A pumpáló lemma szerint létezik p-nek olyan $p = q \cdot r \cdot s$ felbontása, amely kielégíti ezen lemma feltételeit. Így $q \cdot s \in T(\mathbf{A})$ is teljesül. Ugyanakkor a $q \cdot s$ fa mérete kisebb p méreténél, ami ellentmondás. $\square$

Tétel Tetszőleges $\mathbf{A}$ ΣX_n-faautomata esetén eldönthető, hogy $T(\mathbf{A})$ üres-e.

A PUMPÁLÓ LEMMA ALKALMAZÁSAI

Eldönthetőségi kérdések felismerhető fanyelvekre.

Tétel Tetszőleges $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ΣX_n-faautomaták esetén eldönthető, hogy $T(\mathbf{A}) \subseteq T(\mathbf{B})$ teljesül-e.

Bizonyítás Tudjuk, hogy $T(\mathbf{A}) \subseteq T(\mathbf{B}) \Leftrightarrow T(\mathbf{A}) \setminus T(\mathbf{B}) = \emptyset$.

Konstruáljuk meg azt a $\mathbf{C}$ faautomatát, melyre $T(\mathbf{C}) = T(\mathbf{A}) \setminus T(\mathbf{B})$ (Boole műveletekre való zártság), majd döntsük el, hogy $T(\mathbf{C})$ üres-e.

$\square$

Tétel Tetszőleges $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ΣX_n-faautomaták esetén eldönthető, hogy $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$ teljesül-e.

A PUMPÁLÓ LEMMA ALKALMAZÁSAI

Eldönthetőségi kérdések felismerhető fanyelvekre.

Tétel Legyen $\mathbf{A}$ egy k-állapotú ΣX_n-automata. Úgy $T(\mathbf{A})$ akkor és csakis akkor végtelen, ha tetszőleges $l \geq 0$ egész számra létezik az

$$l + k \leq \mathrm{h}(p) < l + 2k$$

összefüggéseket kielégítő $p \in T(\mathbf{A})$ fa.

Bizonyítás $\exists p : l + k \leq \mathrm{h}(p) < l + 2k \Longrightarrow$ (a pumpáló lemma szerint) $T(\mathbf{A})$ végtelen.

Megfordítva, tfh $T(\mathbf{A})$ végtelen. Akkor van olyan $t \in T(\mathbf{A})$, hogy $\mathrm{h}(t) \geq l + 2k$ és föltehető, hogy $\mathrm{size}(t)$ minimális. Továbbá, t felbontható

$$t = s_{k+1} \cdot s_k \cdot \ldots \cdot s_2 \cdot s_1,$$

alakban, ahol $s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}$ a pumpáló lemma bizonyításában szereplő fák.

Legyen $1 \leq i < j \leq k+1$ úgy, hogy

$$(s_{k+1} \cdot \ldots \cdot s_j)^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = (s_{k+1} \cdot \ldots \cdot s_i)^{\mathcal{A}}(\mathbf{a})$$

és $j - i$ minimális.

Tekintsük a $p = s_{k+1} \cdot \ldots \cdot s_j \cdot s_{i-1} \cdot \ldots \cdot s_1$ fát. Teljesül, hogy

- $p \in T(\mathbf{A})$ és

- size$(p) <$ size(t).

Mivel t a minimális méretű olyan fa volt, melyre $\mathrm{h}(t) \geq l + 2k$, kapjuk, hogy $\underline{\mathrm{h}(p) < l + 2k}$.

Továbbá, az $s_1, s_2, \ldots, s_{k+1}$ fák definíciójából, valamint abból, hogy $j - i$ minimális, következik, hogy $\mathrm{h}(t) - \mathrm{h}(p) \leq k$. Ez utóbbiból viszont következik, hogy $\underline{l + k \leq \mathrm{h}(p)}$. Tehát ez a p fa megfelelő. $\square$

Eldönthetőségi kérdések felismerhető fanyelvekre.

Következmény Legyen $\mathbf{A}$ egy k-állapotú ΣX_n-automata. Úgy $T(\mathbf{A})$ akkor és csakis akkor végtelen, ha létezik a

$$k \leq \mathrm{h}(p) < 2k$$

összefüggéseket kielégítő $p \in T(\mathbf{A})$ fa.

Bizonyítás

Az előző tételből kapjuk az $l = 0$ esetben. $\square$

Tétel Tetszőleges $\mathbf{A}$ ΣX_n-faautomata esetén eldönthető, hogy hogy $T(\mathbf{A})$ végtelen-e.

Bizonyítás A $k \leq \mathrm{h}(p) < 2k$ összefüggéseket kielégítő p fák száma véges.

Faautomaták változatai

Jelölés: Az A halmaz részhalmazainak a halmazát $P(A)$-val jelöljük.

A halmaz feletti *m-változós* $(m \geq 0)$ *nemdeterminisztikus művelet:*
$f : A^m \to P(A)$ leképezés. (Ha $m = 0$, akkor $f \subseteq A$.)

Nemdeterminisztikus (nd) Σ-algebra: $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$, ahol $\Sigma^{\mathcal{A}} = \{\sigma^{\mathcal{A}} \mid \sigma \in \Sigma\}$ és minden $m \geq 0$-ra és $\sigma \in \Sigma_m$ esetén $\sigma^{\mathcal{A}}$ egy A feletti m-változós nemdeterminisztikus művelet.

$\mathcal{A}$ nd Σ-algebra, $\sigma \in \Sigma_m$ és $A_1, \ldots, A_m \in P(A)$ esetén definiáljuk:

$$\sigma^{\mathcal{A}}(A_1, \ldots, A_m) = \bigcup(\sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) \mid a_1 \in A_1, \ldots, a_m \in A_m).$$

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI

Legyen $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd algebra. Minden $p \in F_\Sigma(X_n)$ indukál $\mathcal{A}$-ban egy $p^\mathcal{A} : P(A)^n \to P(A)$ *polinom függvényt*, amelyet a következőképpen definiálunk.

Tetszőleges $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \dots, A^{(n)}) \in P(A)^n$ esetén:

1) ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = A^{(i)}$,

2) ha $p = \sigma \in \Sigma_0$, akkor $p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \sigma^\mathcal{A}$ $(\subseteq A)$,

3) ha $p = \sigma(p_1, \dots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$p^\mathcal{A}(\mathbf{a}) = \sigma^\mathcal{A}(p_1^\mathcal{A}(\mathbf{a}), \dots, p_m^\mathcal{A}(\mathbf{a})).$$

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI

Nemdeterminisztikus (nd) ΣX_n-faautomata: egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ rendszer, ahol

- $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ – véges nd Σ-algebra, amely elemei az *állapotok*,
- $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \in P(A)^n$, a *kezdő-vektor*
- $A' \subseteq A$, a *végállapotok* halmaza.

Az $\mathbf{A}$ *által felismert* $T(\mathbf{A})$ *fanyelv*:

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid p^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \bigcap A' \neq \emptyset\}.$$

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI

A determinisztikus faautomata az nd faautomata speciális esete.

A nd faautomata determinisztikus faautomatával való szimulálásához:

Legyen $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy nd Σ-algebra

Az $\mathcal{A}$ *részhalmaz algebrája* a $P(\mathcal{A}) = (P(A), \Sigma^{P(\mathcal{A})})$ algebra, ahol tetszőleges $\sigma \in \Sigma_m$ és $A_1, \ldots, A_m \in P(A)^m$ esetén

$$\sigma^{P(\mathcal{A})}(A_1, \ldots, A_m) = \sigma^{\mathcal{A}}(A_1, \ldots, A_m).$$

$P(\mathcal{A})$ „determinisztikus”, továbbá minden $p \in F_\Sigma(X_n)$ és $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) \in P(A)^n$ esetén

$$p^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = p^{P(\mathcal{A})}(\mathbf{a}).$$

Tétel Az nd ΣX_n-faautomatákkal felismerhető erdők osztálya megegyezik $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$-nel.

Bizonyítás Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ egy nd ΣX_n-faautomata. Konstruáljuk meg a $\mathbf{B} = (P(\mathcal{A}), \mathbf{a}, B')$ (determinisztikus) ΣX_n-faautomatát, ahol $B' = \{b \in P(A) \mid b \bigcap A' \neq \emptyset\}$. Mivel $p^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) = p^{P(\mathcal{A})}(\mathbf{a})$, kapjuk, hogy

$$\underline{p \in T(\mathbf{A})} \Leftrightarrow p^{\mathcal{A}}(\mathbf{a}) \bigcap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow p^{P(\mathcal{A})}(\mathbf{a}) \bigcap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow$$

$$p^{P(\mathcal{A})}(\mathbf{a}) \in B' \Leftrightarrow \underline{p \in T(\mathbf{B})}$$

Tehát $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$ $\square$

Faautomaták változatai

Nemdeterminisztikus (nd) felszálló Σ-algebra: egy $\mathcal{A} = (A, \Sigma^{\mathcal{A}})$ pár, ahol $A \neq \emptyset$ halmaz, az $\mathcal{A}$ *elemeinek* a halmaza, továbbá $\Sigma^{\mathcal{A}} = \{\sigma^{\mathcal{A}} \mid \sigma \in \Sigma\}$, ahol

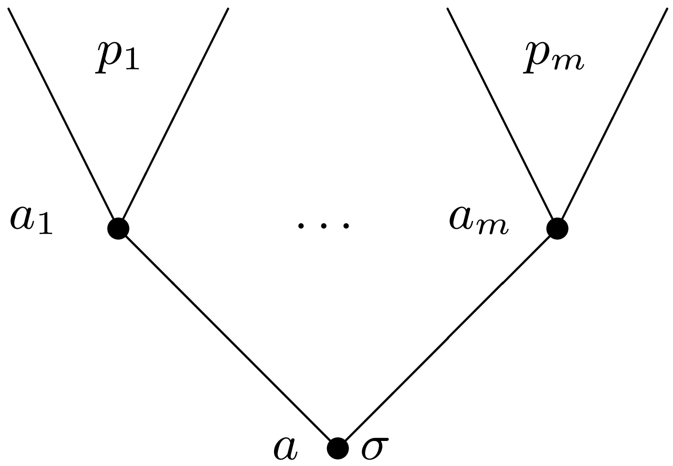
- ha $\sigma \in \Sigma_0$, akkor $\sigma^{\mathcal{A}} \subseteq A$,

- ha $\sigma \in \Sigma_m$ és $m > 0$, akkor $\sigma^{\mathcal{A}} : \ A \to P(A^m)$.

Nemdeterminisztikus (nd) felszálló ΣX_n-automata: egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ rendszer, ahol

- $\mathcal{A}$ véges nd felszálló Σ-algebra, amely elemei az *állapotok*,
- $A' (\subseteq A)$ a *kezdő-állapotok* halmaza,
- $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)}) (\in \mathcal{P}(A)^n)$ a *végállapot-vektor*.

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI



$$(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a)$$

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI

Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ egy nd felszálló ΣX_n-automata. Definiáljuk az

$$\alpha^{\mathbf{A}} : F_\Sigma(X_n) \to \mathcal{P}(A)$$

leképezést: minden $p \in F_\Sigma(X_n)$ esetén

- ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = A^{(i)}$,
- ha $p = \sigma$ $(\sigma \in \Sigma_0)$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = \sigma^{\mathcal{A}}$,
- ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor
  $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = \{a \in A \mid \sigma^{\mathcal{A}}(a) \bigcap (\alpha^{\mathbf{A}}(p_1) \times \ldots \times \alpha^{\mathbf{A}}(p_m)) \neq \emptyset\}$

Néha $\alpha^{\mathbf{A}}(p)$ helyett csak $\alpha(p)$-t írunk.

Az $\mathbf{A}$ által *felismert* fanyelv: $T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid \alpha^{\mathbf{A}}(p) \bigcap A' \neq \emptyset\}$.

Példa Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$. Tekintsük a $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebrát, ahol $A = \{a_0, a_1\}$, továbbá

- $\sigma(a_0) = \{(a_0, a_0)\}$
- $\sigma(a_1) = \{(a_0, a_1), (a_1, a_0)\}$

Végül legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló ΣX_2-automata,

ahol $A' = \{a_1\}$ és $\mathbf{a} = (\{a_1\}, \{a_0\})$.

Ekkor

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma(X_2) \mid p\text{-ben pontosan egy } x_1 \text{ van}\}.$$

Jelöljük ezt az erdőt T_{x_1}-gyel.

Példa Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$. Tekintsük a $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebrát, ahol $A = \{a_0, a_1\}$, továbbá

- $\sigma(a_0) = \{(a_0, a_0), (a_1, a_1)\}$
- $\sigma(a_1) = \{(a_0, a_1), (a_1, a_0)\}$

Végül legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló ΣX_2-automata,

ahol $A' = \{a_1\}$ és $\mathbf{a} = (\{a_1\}, \{a_0\})$.

Ekkor

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma(X_2) \mid p\text{-ben páratlan számú } x_1 \text{ van}\}.$$

Ha $A' = \{a_0\}$, akkor

$$T(\mathbf{A}) = \{p \in F_\Sigma(X_2) \mid p\text{-ben páros számú } x_1 \text{ van}\}.$$

Tétel A nd felszálló ΣX_n-faautomaták által felismert erdők osztálya megegyezik az nd ΣX_n-faautomaták által felismert erdők osztályával (vagyis $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$-nel).

Bizonyítás Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló ΣX_n-faautomata, ahol $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$, $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$

Definiáljuk a $\mathcal{B} = (A, \Sigma)$ nd Σ-algebrát a következőképpen:

- $a \in \sigma^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow a \in \sigma^{\mathcal{A}}$ $(a \in A,\ \sigma \in \Sigma_0)$

- $a \in \sigma^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow (a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a)$ minden $(a, a_1, \ldots, a_m \in A,\ \sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$ esetén.

Definiáljuk a $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{a}, A')$ nd ΣX_n-faautomatát.

Megmutatjuk, hogy $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$

Előtt egy példa: Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$. Tekintsük a $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebrát, ahol $A = \{a_0, a_1\}$, továbbá

- $\sigma^{\mathcal{A}}(a_0) = \{(a_0, a_0)\}$, $\sigma^{\mathcal{A}}(a_1) = \{(a_0, a_1), (a_1, a_0)\}$

és az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló ΣX_2-automatát, ahol $A' = \{a_1\}$ és $\mathbf{a} = (\{a_1\}, \{a_0\})$.

Ekkor $\mathcal{B} = (A, \Sigma)$ az az nd Σ-algebra, melyben

- $\sigma^{\mathcal{B}}(a_0, a_0) = \{a_0\}$, $\sigma^{\mathcal{B}}(a_1, a_1) = \emptyset$,
- $\sigma^{\mathcal{B}}(a_0, a_1) = \sigma^{\mathcal{B}}(a_1, a_0) = \{a_1\}$,

és $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{a}, A')$ pedig a ráépített nd ΣX_2-faautomata.

Megmutatjuk, hogy $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$

Először azt igazoljuk, hogy tetszőleges $p \in F_\Sigma(X_n)$ fára $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$.

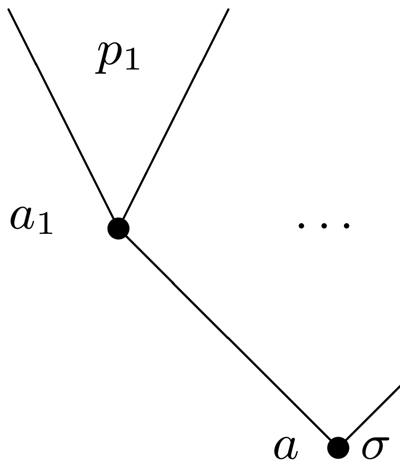
<u>h(p) szerinti indukció</u>

(i) h$(p) = 0$:

(ia) ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = A^{(i)} = p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$.

(ib) ha $p = \sigma \in \Sigma_0$, akkor $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = \sigma^{\mathcal{A}} = \sigma^{\mathcal{B}} = p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$,

(ii) $\mathrm{h}(p) > 0$, vagyis $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$



$\underline{a \in \alpha^{\mathbf{A}}(p)} \Rightarrow (\exists a_1, \ldots, a_m \in A)$:
$((a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a)) \wedge (a_i \in \alpha^{\mathbf{A}}(p_i) \mid i = 1, \ldots, m)$

$\Rightarrow$ (definíció + ind. feltevés) $(a \in \sigma^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m) \wedge (a_i \in p_i^{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) \mid i = 1, \ldots m)$
$\Rightarrow \underline{a \in p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a})}$

Fordítva – a $\Rightarrow$ megfordításával. Kapjuk, hogy $\alpha^{\mathbf{A}}(p) = p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a})$.

Igy

$\underline{p \in T(\mathbf{A})} \Leftrightarrow$

$\alpha^{\mathbf{A}}(p) \bigcap A' \neq \emptyset \overset{\alpha^{\mathbf{A}}(p)=p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a})}{\Leftrightarrow} p^{\mathcal{B}}(\mathbf{a}) \bigcap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow$

$\underline{p \in T(\mathbf{B})}$

Vagyis a nd felszálló faautomatákkal felismerhető erdők felismerhetők nd faautomatával (és így faautomatával) is.

Fordítva, legyen $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{a}, A')$ nd ΣX_n-faautomata, ahol $\mathcal{B} = (A, \Sigma)$ és $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$

Vegyük az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebrát, ahol -

$a \in \sigma^{\mathcal{B}} \Leftrightarrow \underline{a \in \sigma^{\mathcal{A}}}$ $(a \in A,\ \sigma \in \Sigma_0)$

- $a \in \sigma^{\mathcal{B}}(a_1, \ldots, a_m) \Leftrightarrow \underline{(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a)}$

$(a, a_1, \ldots, a_m \in A,\ \sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$

és tekintsük az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló faautomatát. Végezzük el $\mathbf{A}$-ra a bizonyítás első felében látott konstrukciót. Akkor visszakapjuk $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{a}, A')$-t.

Másrészt a konstrukció megőrzi a felismert erdőt.

Így a nd faautomatákkal felismerhető erdők felismerhetők nd felszálló faautomatákkal is.

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI

Az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebra *determinisztikus*, ha

- $|\sigma^{\mathcal{A}}| \leq 1$, ha $\sigma \in \Sigma_0$ és

- $|\sigma^{\mathcal{A}}(a)| \leq 1$, minden $\sigma(\in \Sigma_m,\ m > 0)$ műveleti szimbólumra és $a(\in A)$ állapotra.

Egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló faautomata *determinisztikus*, ha

- $\mathcal{A}$ determinisztikus,
- A' egy egyelemű $\{a_0\}$ halmaz.

Ekkor A' helyett egyszerűen a_0-t írunk, vagyis $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$. (Figyelem: az **a** vektor elemei a determinisztikus esetben is halmazok!)

A determinisztikus felszálló ΣX_n-faautomatával felismerhető fanyelvek osztályát $\mathrm{Det}(\Sigma, X_n)$-nel jelöljük. A determinisztikus felszálló faautomatával felismerhető fanyelveket *determinisztikus fanyelveknek* hívjuk.

Példa Legyen $\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_1$, ahol $\Sigma_2 = \{\sigma\}$ és $\Sigma_1 = \{\gamma\}$. Tekintsük az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ determinisztikus felszálló algebrát, ahol $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, továbbá

- $\sigma(a_0) = (a_1, a_2), \sigma(a_1) = \sigma(a_2) = \emptyset$,
- $\gamma(a_1) = a_1, \gamma(a_2) = a_2$.

Végül legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ az a determinisztikus felszálló faautomata, ahol $A' = \{a_0\}$ és $\mathbf{a} = (\{a_1\}, \{a_2\})$. Ekkor

$$T(\mathbf{A}) = \{\sigma(\gamma^m(x_1), \gamma^n(x_2)) \mid m, n \geq 0\}.$$

Jelöljük ezt az erdőt $T_{m,n}$-nel. Tehát $T_{m,n} \in \mathrm{Det}(\Sigma, X_2)$.

Tétel A determinisztikus erdők osztálya a felismerhető erdők osztályának valódi részosztálya.

Bizonyítás Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}, n = 2$ és $T_2 = \{\sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, x_1)\}$.

Megmutatjuk, hogy $T_2 \in \text{Rec}(\Sigma, X_2) \setminus \text{Det}(\Sigma, X_2)$.

Egyrészt T_2 felismerhető a következő $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, (a_1, a_2), \{a_0\})$ ΣX_2-automatával, ahol $\mathcal{A} = (\{a_0, a_1, a_2, c\}, \Sigma)$, továbbá $\sigma(a_1, a_2) = \sigma(a_2, a_1) = a_0$ és minden más a, b kombináció esetén $\sigma(a, b) = c$ (= csapda állapot).

Másrészt T_2 nem ismerhető fel determinisztikus felszálló faautomatával, amit indirekt bizonyítással mutathatunk meg.

Tfh. T felismerhető a $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, b_0, (B^{(1)}, B^{(2)}))$ determinisztikus felszálló ΣX_2-automatával. Legyen $\sigma(b_0) = (b_1, b_2)$.

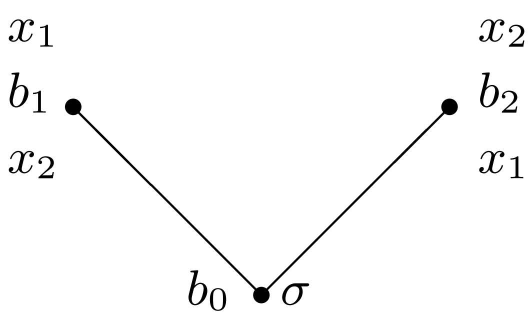
Mivel $\sigma(x_1, x_2) \in T(\mathbf{B})$, kapjuk, hogy $b_1 \in B^{(1)}$ és $b_2 \in B^{(2)}$

Mivel $\sigma(x_2, x_1) \in T(\mathbf{B})$, kapjuk, hogy $b_1 \in B^{(2)}$ és $b_2 \in B^{(1)}$

Tehát $\{b_1, b_2\} \subseteq B^{(1)}$ és $\{b_1, b_2\} \subseteq B^{(2)}$.

Ekkor viszont $\mathbf{B}$ felismeri a $\sigma(x_1, x_1)$ és $\sigma(x_2, x_2)$ fákat is, tehát $T_2 \neq T(\mathbf{B})$.

Ugyanez rajzban:



$$\overset{\sigma(x_1,x_2)\in T(\mathbf{B})}{\Longrightarrow} b_1 \in B^{(1)} \wedge b_2 \in B^{(2)}$$

$$\overset{\sigma(x_2,x_1)\in T(\mathbf{B})}{\Longrightarrow} \underbrace{b_1 \in B^{(2)} \wedge b_2 \in B^{(1)}}$$

$$\Downarrow$$

$$\sigma(x_1,x_1), \sigma(x_2,x_2) \in T(\mathbf{B})$$

FAAUTOMATÁK VÁLTOZATAI

A következő részben Σ olyan rangolt ábécé, melyben $\Sigma_0 = \emptyset$.

Egy $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ felszálló faautomatának egy $a \in A$ állapota 0-*állapot*, ha $T((\mathcal{A}, \{a\}, \mathbf{a})) = \emptyset$.

Tétel Létezik algoritmus annak eldöntésére, hogy a 0-állapot-e. $\square$

A *normalizált*, ha minden $\sigma \in \Sigma_m$, $a \in A$, $(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma(a)$ esetén a_i-k egyike sem 0-állapot.

Tétel Bármely $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló faautomatához van vele ekvivalens $\mathbf{A} = (\mathcal{A}', A', \mathbf{a})$ normalizált nd felszálló faautomata.

Bizonyítás Ha $(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma(a)$ tartalmaz egy olyan komponenst, amely 0-állapot, akkor töröljük $\sigma(a)$-ból. $\square$

DETERMINISZTIKUS FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Minden $\sigma \in \Sigma_m$ $(m \geq 0)$ esetén bevezetjük a

$$\Delta_\sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_m\}$$

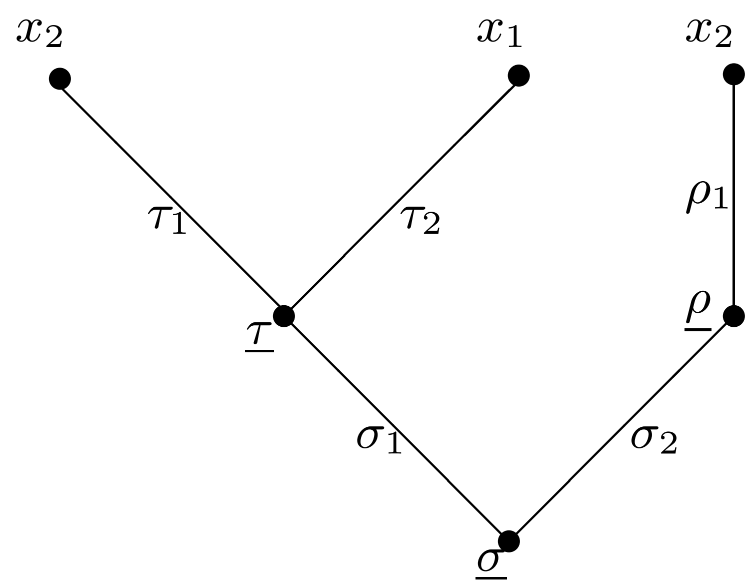
(rangolatlan) ábécét. Ha $\sigma \neq \tau$. $\Delta_\sigma \bigcap \Delta_\tau = \emptyset$. Legyen $\Delta = \bigcup(\Delta_\sigma \mid \sigma \in \Sigma)$.

Tetszőleges $p \in F_\Sigma(X_n)$ és $x \in X_n$ a *p-beli x-utak* $\mathrm{g}_x(p) \subseteq \Delta^*$ halmaza:
(i) $\mathrm{g}_x(x) = \{\varepsilon\}$ és $\mathrm{g}_x(y) = \emptyset$, ha $y \neq x$ $(y \in X_n)$
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$, akkor

$$\mathrm{g}_x(p) = \sigma_1 \mathrm{g}_x(p_1) \bigcup \ldots \bigcup \sigma_m \mathrm{g}_x(p_m)$$

Szemléletesen: A p fa σ-val címkézett csúcsából kiinduló i-ik élhez írjuk a σ_i címkét. Akkor a p-beli x-utakat úgy kapjuk, hogy p-ben a gyökértől az x-szel címkézett levelekhez vezető utak mentén az élek címkéit a gyökértől a levelek felé haladva összeolvassuk.

Példa $p = \sigma(\tau(x_2, x_1), \rho(x_2))$



$\Delta_\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\Delta_\tau = \{\tau_1, \tau_2\}$, $\Delta_\rho = \{\rho_1\}$, $\Delta = \{\sigma_1, \sigma_2, \tau_1, \tau_2, \rho_1\}$

$\mathrm{g}_{x_1}(p) = \{\sigma_1\tau_2\}$, $\mathrm{g}_{x_2}(p) = \{\sigma_1\tau_1, \sigma_2\rho_1\}$

DETERMINISZTIKUS FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Kiterjesztés: tetszőleges $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$-re és $x \in X_n$-re

$$\mathrm{g}_x(T) = \bigcup(\mathrm{g}_x(p) \mid p \in T).$$

Egy $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ fanyelv $\mathrm{c}(T)$ *lezártja*:

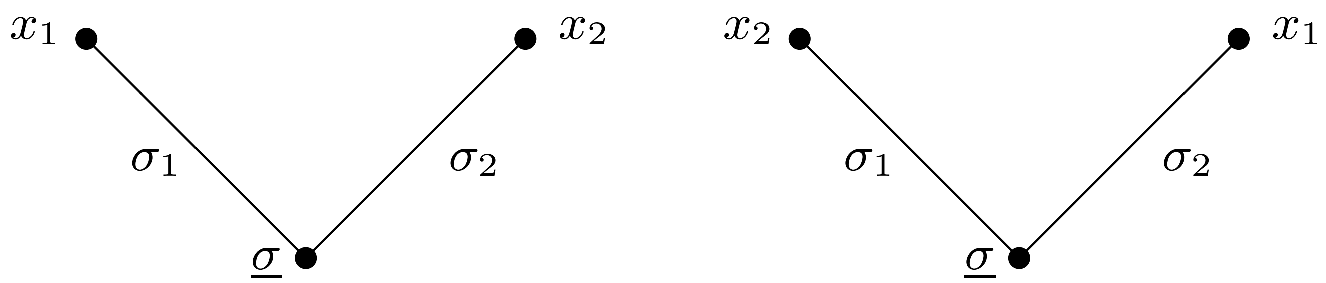
$$\mathrm{c}(T) = \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid (\forall x \in X_n) : \mathrm{g}_x(p) \subseteq \mathrm{g}_x(T)\}.$$

Nyilvánvaló, hogy $T \subseteq \mathrm{c}(T)$, mert ha $p \in T$, akkor $(\forall x \in X_n) : \mathrm{g}_x(p) \subseteq \mathrm{g}_x(T)$.

Azt mondjuk, hogy T *zárt*, ha $T = \mathrm{c}(T)$.

Ha $T = \{p\}$, akkor T zárt.

Példa. A $T_2 = \{\sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, x_1)\}$ erdő nem zárt.



Látható, hogy $\mathrm{g}_{x_1}(T_2) = \{\sigma_1, \sigma_2\} = \mathrm{g}_{x_2}(T_2)$. Továbbá,

$\mathrm{g}_{x_1}(\sigma(x_1, x_1)) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$, $\mathrm{g}_{x_2}(\sigma(x_1, x_1)) = \emptyset$,
$\mathrm{g}_{x_1}(\sigma(x_2, x_2)) = \emptyset$, $\mathrm{g}_{x_2}(\sigma(x_2, x_2)) = \{\sigma_1, \sigma_2\}$.

Ezért $\mathrm{c}(T_2) = \{\sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, x_1), \sigma(x_1, x_1), \sigma(x_2, x_2)\}$.

Példa. A T_{x_1} erdő sem zárt.

DETERMINISZTIKUS FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Tetszőleges $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló faautomata esetén (ahol $\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$) bevezetjük a $P(\mathbf{A}) = (P(\mathcal{A}), A', \mathbf{b})$ felszálló faautomatát, ahol

1) $P(\mathcal{A}) = (P(A), \Sigma)$ det. felszálló algebra, melynek műveletei:

$$\sigma^{P(\mathcal{A})}(H) = (\bigcup(\pi_1(\sigma^{\mathcal{A}}(a)) \mid a \in H), \ldots, \bigcup(\pi_m(\sigma^{\mathcal{A}}(a)) \mid a \in H)).$$

($\sigma \in \Sigma_m$, $H \in P(A)$ és π_i az i-edik projekció: $\pi_i(c_1, \ldots, c_n) = c_i$)),

2) $\mathbf{b} = (B^{(1)}, \ldots, B^{(n)})$ és $B^{(i)} = \{H \in P(A) \mid H \bigcap A^{(i)} \neq \emptyset\}$.

Nyilvánvaló, hogy $P(\mathbf{A})$ determinisztikus, mert
– $\sigma^{P(\mathcal{A})} : P(A) \to P(A)^m$, tehát az érték egy vektor, melynek elemei halmazok
– $P(\mathbf{A})$-nak egy kezdőállapota van: $A' \in P(A)$.

DETERMINISZTIKUS FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Ugyanakkor, általában $T(P(\mathbf{A})) \neq T(\mathbf{A})$, mert mint láttuk az nd felszálló faautomaták ”nem determinizálhatók”: van olyan nd felszálló faautomata, amelyhez nincsen vele ekvivalens determinisztikus felszálló faautomata

Ha viszont $\mathbf{A}$ determinisztikus, akkor $T(P(\mathbf{A})) = T(\mathbf{A})$, mert a $P(\mathbf{A})$ kezdőállapota egyelemű halmaz ($A' = \{a_0\}$) és $\sigma^{P(\mathcal{A})}(a) = \sigma^{\mathcal{A}}(a)$ minden $a \in A$-ra.

Példa. Legyen $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$ és tekintsük az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebrát, ahol $\sigma(a_0) = \{(a_1, a_2), (a_2, a_1)\}$ és $\sigma(a_1) = \sigma(a_2) = \emptyset$.

Tekintsük továbbá az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló faautomatát, ahol $A' = \{a_0\}$ és $\mathbf{a} = (\{a_1\}, \{a_2\})$. Nyilvánvalóan $T(\mathbf{A}) = \{\sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, x_1)\}$.

A $P(\mathcal{A}) = (P(A), \Sigma)$ determinisztikus felszálló algebrában
$\sigma(\{a_0\}) = (\{a_1, a_2\}, \{a_1, a_2\})$, stb

Ekkor a $P(\mathbf{A}) = (P(\mathcal{A}), A', \mathbf{b})$ determinisztikus felszálló faautomatában
$\mathbf{b} = (\{\{a_1\}, \{a_1, a_2\}, \ldots\}, \{\{a_2\}, \{a_1, a_2\}, \ldots\})$ és
$T(P(\mathbf{A})) = \{\sigma(x_1, x_1), \sigma(x_1, x_2), \sigma(x_2, x_1), \sigma(x_2, x_2)\}$.

DETERMINISZTIKUS FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Tétel Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ nd felszálló faautomata. Ha $\mathbf{A}$ normalizált, akkor $T(P(\mathbf{A})) = \mathrm{c}(T(\mathbf{A}))$.

Bizonyítás

$\underline{T(P(\mathbf{A})) \subseteq \mathrm{c}(T(\mathbf{A}))\text{:}}$ Tfh $p \in T(P(\mathbf{A}))$ és $u \in \mathrm{g}_{x_j}(p)$ $(x_j \in X_n)$

Legyen $u = (\delta_1)_{i_1} \ldots (\delta_k)_{i_k}$ $(k \geq 0)$ és $\delta_1, \ldots, \delta_k \in \Sigma$.

A $P(\mathbf{A})$ def. alapján nyilvánvaló, hogy $\exists a_0, \ldots, a_k \in A$:

1) $a_0 \in A'$ és $a_k \in A^{(j)}$,

2) $\delta_1^{\mathcal{A}}(a_0)$ i_1-edik komponense a_1,..., $\delta_k^{\mathcal{A}}(a_{k-1})$ i_k-adik komponense a_k

Az $a_0, \ldots, a_k$ egyike sem 0-állapot, mivel $\mathbf{A}$ normalizált

Így az u utat ki tudjuk egészíteni olyan $q \in T(\mathbf{A})$ fává, melyre $u \in \mathrm{g}_{x_j}(q)$.

Következésképpen $p \in \mathrm{c}(T(\mathbf{A}))$

$\underline{\mathrm{c}(T(\mathbf{A})) \subseteq T(P(\mathbf{A}))\text{:}}$ nyilvánvalóan teljesül, mert $P(\mathbf{A})$ a különböző fákban lévő utakat ”egyszerre látja”. $\square$

DETERMINISZTIKUS FELSZÁLLÓ FAAUTOMATÁK

Tétel Egy felismerhető erdő akkor és csakis akkor determinisztikus, ha zárt.

Bizonyitás Tekintsünk egy $\mathbf{A}$ nd felszálló faautomata által felismert fanyelvet és tegyük fel, hogy $\mathbf{A}$ normalizált.

Ha $\mathbf{A}$ determinisztikus, akkor $T(P(\mathbf{A})) = T(\mathbf{A})$. Az előző tétel szerint viszont $T(P(\mathbf{A})) = \mathrm{c}(T(\mathbf{A}))$. Tehát $T(\mathbf{A}) = \mathrm{c}(T(\mathbf{A}))$, vagyis $T(\mathbf{A})$ zárt fanyelv.

Ha $T(\mathbf{A})$ zárt vagyis $T(\mathbf{A}) = \mathrm{c}(T(\mathbf{A}))$, akkor ugyancsak az előző tétel szerint $T(P(\mathbf{A})) = T(\mathbf{A})$, tehát $T(\mathbf{A})$ determinisztikus. □

Következmény $T_2, T_{x_1} \notin \mathrm{Det}(\Sigma, X_2)$ (mivel egyik sem zárt). Ugyanakkor $T_{m,n} \in \mathrm{Det}(\Sigma, X_2)$, tehát zárt.

REGULÁRIS FANYELVTANOK

Egy reguláris ΣX_n-fanyelvtan egy $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ rendszer, ahol

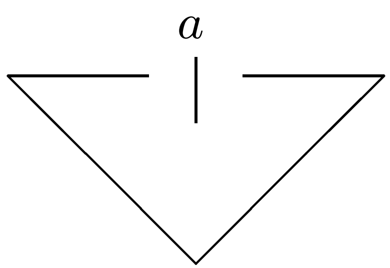
- $A \neq \emptyset$ véges halmaz, a *nemterminális szimbólumok* halmaza,
- Σ rangolt ábécé,
- $A \bigcap (\Sigma \bigcup X_n) = \emptyset$,
- P *átírási szabályok* véges halmaza, melyek alakja $a \to r$, ahol $a \in A$ és $r \in F_\Sigma(A \bigcup X_n)$,
- $a_0 \in A$, a kezdőszimbólum.

Ha G értelmezésében Σ vagy X_n nem nyer specifikálást, akkor *reguláris fanyelvtanról* beszélünk.

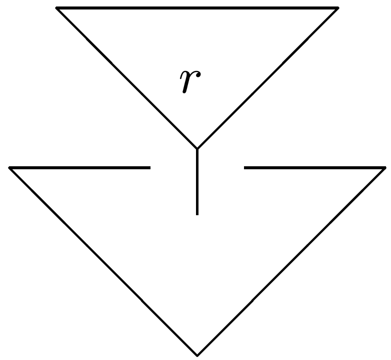
REGULÁRIS FANYELVTANOK

$p \Rightarrow_G q$ $(p, q \in F_\Sigma(A \bigcup X_n))$ – *közvetlen deriváció*:

$p =$



$a \to r \in P$



$= q$

$p \Rightarrow_G^* q$ – *deriváció*

REGULÁRIS FANYELVTANOK

A $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ reguláris fanyelvtan által *generált fanyelv*:

$$T(G) = \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid a_0 \Rightarrow^* p\}.$$

Példa Legyen $G = (A, \Sigma, X_2, P, a_1)$ egy reguláris ΣX_2-fanyelvtan, ahol $A = \{a_0, a_1\}$, $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$, és P a következő szabályokból áll:

- $a_1 \to \sigma(a_0, a_1) \mid \sigma(a_1, a_0) \mid x_1$,
- $a_0 \to \sigma(a_0, a_0) \mid x_2$.

Könnyű látni, hogy $T(G) = T_{x_1}$.

REGULÁRIS FANYELVTANOK

Példa Legyen $G = (A, \Sigma, X_2, P, a_0)$ egy reguláris ΣX_2-fanyelvtan, ahol $A = \{a_0, a_1, a_2\}$, $\Sigma = \Sigma_2 \cup \Sigma_1$, ahol $\Sigma_2 = \{\sigma\}$, $\Sigma_1 = \{\gamma\}$ és P a következő szabályokból áll:

- $a_0 \to \sigma(a_1, a_2)$,
- $a_1 \to \gamma(a_1) \mid x_1$,
- $a_2 \to \gamma(a_2) \mid x_2$.

Könnyű látni, hogy $T(G) = T_{m,n}$.

REGULÁRIS FANYELVTANOK

Egy $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ rendszer *kiterjesztett reguláris* ΣX_n*-nyelvtan*, ahol $A,\ \Sigma,\ X_n,\ P$ ugyanaz, mint a reguláris ΣX_n-nyelvtan definíciójában, $A' \subseteq A$ pedig a *kezdőszimbólumok* halmaza.

A $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ kiterjesztett reguláris fanyelvtan által *generált fenyelv:*

$$T(G) = \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid a \Rightarrow^* p,\ a \in A'\}.$$

Tétel Bármely kiterjesztett reguláris fanyelvtanhoz van vele ekvivalens reguláris fanyelvtan.

Bizonyítás $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ tetszőleges kiterjesztett reguláris fanyelvtanhoz megkonstruáljuk a $\bar{G} = (\bar{A}, \Sigma, X_n, \bar{P}, a_0)$ reguláris fenyelvtant, ahol $\bar{A} = A \bigcup \{a_0\}$ ($a_0 \notin A$ új nemterminális) és $\bar{P} = \{a_0 \to a \mid a \in A'\} \bigcup P$.

REGULÁRIS FANYELVTANOK

A $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ kiterjesztett reguláris fanyelvtan *normálalakban* adott, ha átírási szabályai a következő alakúak:

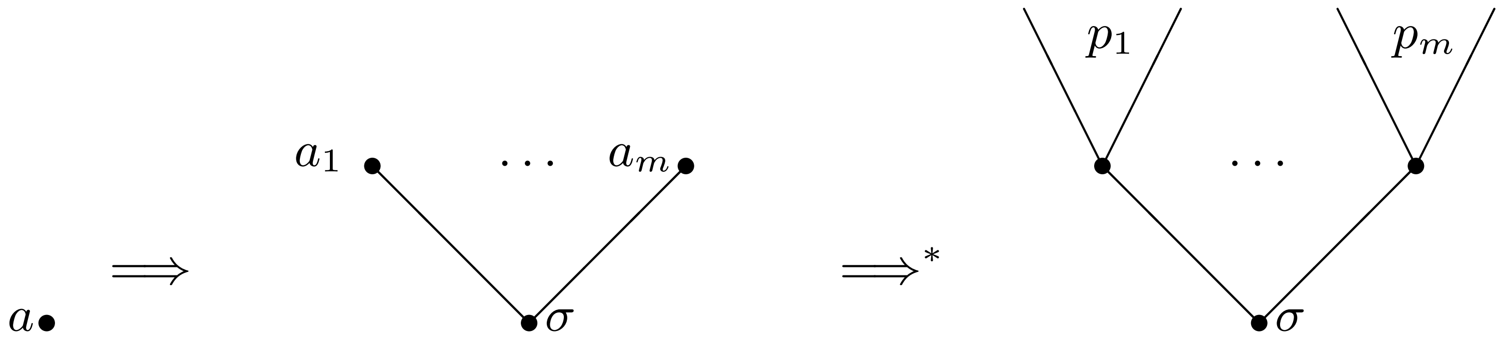
- $a \to x_i$ $(a \in A,\ x_i \in X_n)$, vagy
- $a \to \sigma$ $(a \in A,\ \sigma \in \Sigma_0)$, vagy
- $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)$ $(a, a_1, \ldots, a_m \in A, \sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$.

REGULÁRIS FANYELVTANOK

Ábra $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$,

$a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$, $a_i \Longrightarrow^* p_i$ $(i = 1, \ldots, m)$,

$a \Longrightarrow \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Longrightarrow^* \sigma(p_1, \ldots, p_m)$



REGULÁRIS FANYELVTANOK

Tétel Bármely G (kiterjesztett) reguláris fanyelvtanhoz van vele ekvivalens normálalakban adott (kiterjesztett) reguláris fanyelvtan.

Bizonyítás Legyen $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ kiterjesztett reguláris fanyelvtan és egyen $a \to p \in P$ olyan szabály amelyik nem felel meg a normálalak követelményinek.

1) $\mathrm{h}(p) = 0$, vagyis a szabály $a \to b$ $(b \in A)$ alakú. Ha van olyan $c \to r \in P$ szabály, melyre $r \notin A$ és $b \Rightarrow^* c$, akkor helyettesítsük P-ben az $a \to b$ szabályt az összes $a \to r$ szabállyal. Különben az $a \to b$ szabályt elhagyjuk P-ből. (Láncszabály mentesítés.)

2) $\mathrm{h}(p) > 0$, $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m, m > 0)$.

Ha $p_i \notin A$, akkor vegyünk fel egy új a_i nemterminális szimbólumot és $a_i \to p_i$ szabályt. Az $a \to p$ szabályt helyettesítsük az $a_i \to p_i$ $(1 \leq i \leq m)$ szabályokkal és az $a \to \sigma(b_1, \ldots, b_m)$ szabállyal, ahol tetszőleges i $(1 \leq i \leq m)$ indexre

$$b_i = \begin{cases} a_i, & \text{ha } p_i \notin A, \\ p_i, & \text{különben.} \end{cases}$$

A fenti módosítás ekvivalens fanyelvtant eredményez. Másrészt mivel $\mathrm{h}(p_i) < \mathrm{h}(p)$, ezért véges számú lépésben egy normál alakban adott kiterjesztett reguláris fanyelvtanhoz jutunk.

Az is nyilvánvaló, hogy ha G nem kiterjesztett, akkor az eredményül kapott reguláris fanyelvtan sem kiterjesztett. $\square$

Tétel A reguláris ΣX_n fanyelvtanok által generált erdők osztálya megegyezik a felismerhető erdők osztályával (vagyis $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$-nel).

Bizonyítás Legyen $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ normál alakban adott, kiterjesztett reguláris fanyelvtan.

Értelmezzük az $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebrát a következőképpen:
1) $\sigma \in \Sigma_0 : a \in \sigma^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow a \to \sigma \in P$,
2) $\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0 :$
$(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a) \Leftrightarrow a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$.

Majd definiáljuk az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ ($\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$) nd felszálló faautomatát, ahol $a \in A^{(i)} \Leftrightarrow a \to x_i \in P$ $(1 \leq i \leq n)$.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $a \in A$ és $p \in F_\Sigma(X_n)$ esetén

$$a \Rightarrow_G^* p \Leftrightarrow a \in \alpha^{\mathbf{A}}(p).$$

<u>h(p) szerinti indukció</u>

(i) h$(p) = 0$:

(ia) $p = x_i$ $(1 \le i \le n)$:
$a \Rightarrow_G^* x_i \Leftrightarrow a \to x_i \in P \Leftrightarrow a \in A^{(i)} \Leftrightarrow a \in \alpha^{\mathbf{A}}(x_i)$,

ahol a második ekvivalenciáknál $A^{(i)}$ definícióját, a harmadiknál pedig az $A^{(i)} = \alpha^{\mathbf{A}}(x_i)$ egyenlőséget használtuk ki.

(ib) $p = \sigma \in \Sigma_0$:
$a \Rightarrow_G^* \sigma \Leftrightarrow a \to \sigma \in P \Leftrightarrow a \in \sigma^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow a \in \alpha^{\mathbf{A}}(\sigma)$,

ahol a második ekvivalenciáknál $\sigma^{\mathcal{A}}$ definícióját, a harmadiknál pedig az $\sigma^{\mathcal{A}} = \alpha^{\mathbf{A}}(\sigma)$ egyenlőséget használtuk ki.

(ii) $\mathrm{h}(p) > 0$, $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\, m > 0)$:
Ekkor a levezetés $a \Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_G^* \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ alakban írható.

Az első lépés szerint $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$, ami ekvivalens azzal, hogy $(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a)$.

Továbbá, minden $1 \leq i \leq n$-re, $a_i \Rightarrow_G^* p_i$, tehát az indukció feltevés szerint $a_i \in \alpha^{\mathbf{A}}(p_i)$.

Kapjuk, hogy $a \in \alpha^{\mathbf{A}}(\sigma(p_1, \ldots, p_m))$. Fordítva : fordítva.

Igy: $\underline{p \in T(G)} \Leftrightarrow (\exists a \in A')a \Rightarrow^* p \Leftrightarrow \alpha^{\mathbf{A}}(p) \bigcap A' \neq \emptyset \Leftrightarrow \underline{p \in T(\mathbf{A})}$,

ahol a második ekvivalencia az előbb bizonyított $a \Rightarrow^* p \Leftrightarrow a \in \alpha^{\mathbf{A}}(p)$ ekvivalenciából következik.

Következésképpen, a reguláris fanyelvtanokkal generálható erdők felismerhetők.

Fordítva, legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, A', \mathbf{a})$ ($\mathbf{a} = (A^{(1)}, \ldots, A^{(n)})$ nd felszálló faautomata, $\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ nd felszálló algebra.

Konstruáljuk meg a $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ kiterjesztett reguláris fanyelvtant, ahol a P szabályhalmazt a következőképpen definiáljuk:

- Minden $\sigma \in \Sigma_0$ és $a \in A$ esetén : $a \in \sigma^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow \underline{a \to \sigma \in P}$,

- Minden $\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0$ és $a, a_1, \ldots, a_m \in A$ esetén:
$(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a) \Leftrightarrow \underline{a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P}$,

- Minden $1 \leq i \leq n$ és $a \in A$ esetén: $a \in A^{(i)} \Leftrightarrow \underline{a \to x_i \in P}$ $(1 \leq i \leq n)$

A kapott G normál alakban adott.

Konstruáljuk meg G-hez a bizonyítás első felében látott nd felszálló faautomatát. Visszakapjuk $\mathbf{A}$-t. Másrészt a konstrukció megőrzi a generált erdőt: $T(\mathbf{A}) = T(G)$.

Megjegyzés. Az előzőek értelmében $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$ bármely eleme reprezentálható az alábbi eszközök bármelyikével:

- ΣX_n-faautomata,
- nd ΣX_n-faautomata,
- nd felszálló ΣX_n-faautomata,
- bármilyen típusú reguláris ΣX_n-fanyelvtan.

Továbbá, $\mathrm{Det}(\Sigma, X_n)$ valódi részosztálya $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$-nek és $\mathrm{Det}(\Sigma, X_n)$ a $\mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$ zárt elemeiből áll.

Következmény. Minden véges erdő felismerhető.

Bizonyítás Legyen $T = \{p_1, \ldots, p_k\} \subseteq F_\Sigma(X_n)$ egy véges erdő.

Tekintsük a $G = (A, \Sigma, X_n, P, A')$ fanyelvtant, ahol
$A = A' = \{a_0\}$
$P = \{a_0 \to p_1, \ldots, a_0 \to p_k\}$.

Nyilvánvaló, hogy $L(G) = T$.

MŰVELETEK FANYELVEKEN

Először bevezetünk egy jelölést: tetszőleges $\sigma \in \Sigma_m$ és $T_1, \ldots, T_m \subseteq F_\Sigma(X_n)$ esetén:

$$\sigma(T_1, \ldots, T_m) = \{\sigma(p_1, \ldots, p_m) \mid p_i \in T_i,\ i = 1, \ldots, m\}.$$

OI-helyettesítés (outside in): tetszőleges $T, T_1, \ldots, T_n \subseteq F_\Sigma(X_n)$ estén definiáljuk a $T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ fanyelvet. (T-beli fákban x_i helyébe T_i-beli fákat helyettesítünk oly módon, hogy x_i különböző előfordulásai helyébe különböző T_i-beli fák helyettesíthetők.)

OI-helyettesítés (outside in):

1) Először tetszőleges $p \in F_\Sigma(X_n)$-re definiáljuk a $p(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ fanyelvet:

- Ha $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $p(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) = T_i$.

- Ha $p = \sigma$ $(\sigma \in \Sigma_0)$, akkor $p(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) = \{\sigma\}$.

- Ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$p(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) =$$

$$\sigma(p_1(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n), \ldots, p_m(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)).$$

2) Ezek után tetszőleges T-re:

$$T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n) = \bigcup_{p \in T} p(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n).$$

MŰVELETEK FANYELVEKEN

Tétel Ha $T, T_1, \ldots, T_n \subseteq F_\Sigma(X_n)$ tetszőleges felismerhető erdő, akkor $T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n)$ is az.

Bizonyítás Legyen $T = T(G)$ és $T_i = T(G_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$, ahol $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ és $G_i = (A_i, \Sigma, X_n, P_i, a_i)$ na-ban adott reguláris fanyelvtanok. Tfh A, $A_1, \ldots, A_n$ páronként diszjunktak

Konstruáljuk meg a $\bar{G} = (\bar{A}, \Sigma, X_n, \bar{P}, a_0)$ reguláris fanyelvtant, ahol $\bar{A} = A \bigcup A_1 \bigcup \ldots \bigcup A_n$ és

$$\begin{aligned}\bar{P} =& P - \{a \to x_i \mid a \in A,\ 1 \le i \le n\} \\ & \bigcup \{a \to a_i \mid a \to x_i \in P,\ 1 \le i \le n\} \\ & \bigcup P_1 \bigcup \ldots \bigcup P_n\end{aligned}$$

Azonnal látható, hogy

$$T(\bar{G}) = T(x_1 \leftarrow T_1, \ldots, x_n \leftarrow T_n).$$

$\underline{x_i\text{-szorzat}}$:

Legyen $S, T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ és $1 \leq i \leq n$. Az S és T x_i-szorzatát a következőképpen definiáljuk:

$$S \cdot_{x_i} T =$$
$$T(x_1 \leftarrow \{x_1\}, \ldots, x_{i-1} \leftarrow \{x_{i-1}\}, x_i \leftarrow S, x_{i+1} \leftarrow \{x_{i+1}\}, \ldots, x_n \leftarrow \{x_n\}).$$

Tétel A felismerhető fanyelvek osztálya zárt az x_i-szorzásra nézve.

Bizonyítás Következik az OI-helyettesítésre való zártságból és abból, hogy az $\{x_j\}$ egyelemű fanyelvek felismerhetők. $\square$

x_i-iteráció:

Tetszőleges $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ és $(1 \leq i \leq n)$ esetén:

$T^{0,x_i} = \{x_i\}$,
$T^{j+1,x_i} = (T^{j,x_i} \cdot_{x_i} T) \bigcup T^{j,x_i}$ $(j = 0, 1 \ldots)$

Továbbá, a T erdő x_i-*iteráltját* a következőképpen értelmezzük:

$$T^{*x_i} = \bigcup (T^{j,x_i} \mid j = 0, 1, \ldots).$$

Állítás $T^{*x_i} \cdot_{x_i} T \subseteq T^{*x_i}$.

Bizonyítás Legyen $q \in T^{*x_i} \cdot_{x_i} T$. Akkor:

$\exists p \in T,\ p_1, \ldots, p_k \in T^{*x_i} : q \in \{p_1, \ldots, p_k\} \cdot_{x_i} \{p\}$,

továbbá, $\exists j : p_1, \ldots, p_k \in T^{j,x_i}$.

Ezért $q \in T^{j,x_i} \cdot_{x_i} T \subseteq T^{j+1,x_i} \subseteq T^{*x_i}$.

$\square$

Tétel A felismerhető erdők osztálya zárt az x_i-iterációra nézve.

Bizonyítás Legyen $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ felismerhető erdő, $1 \leq i \leq n$ természetes szám és tegyük fel, hogy $T = T(G)$, ahol $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ egy na-ban adott reguláris fanyelvtan.

Tekintsük a $\bar{G} = (\bar{A}, \Sigma, X_n, \bar{P}, \bar{A}')$ kiterjesztett reguláris fanyelvtant, ahol
- $\bar{A} = A \bigcup \{d\}$ $(d \notin A)$,
- $\bar{P} = \{d \to x_i\} \bigcup P \bigcup \{a \to a_0 \mid a \to x_i \in P\}$
- $\bar{A}' = \{d, a_0\}$

Nyilvánvalóan $T(\bar{G}) = T^{*x_i}$. □

Az egyesítés, az x_i-szorzat és az x_i-iteráció műveleteket *reguláris műveleteknek* hívjuk.

Tétel A felismerhető erdők osztálya zárt a reguláris műveletekre nézve.

Kleene tétele reguláris fanyelvekre

Reguláris ΣX_n*-kifejezések* halmaza a legszűkebb olyan R halmaz, amelyre teljesülnek az alábbi feltételek:

1) $\emptyset \in R$.
2) $\Sigma_0 \bigcup X_n \subseteq R$.
3) Ha $\xi, \zeta \in R$, akkor
   - $(\xi + \zeta) \in R$,
   - $(\xi \cdot_{x_i} \zeta) \in R$ $(1 \leq i \leq n)$,
   - $(\xi^{*x_i}) \in R$ $(1 \leq i \leq n)$.
4) Ha $\sigma \in \Sigma_m$ $(m > 0)$ és $\xi_1, \ldots, \xi_m \in R$, akkor $\sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m) \in R$.

A reguláris ΣX_n-kifejezések halmazát RE(Σ, X_n)-nel jelöljük.

KLEENE TÉTELE REGULÁRIS FANYELVEKRE

Minden $\eta \in \mathrm{RE}(\Sigma, X_n)$ reguláris kifejezés *meghatároz* $|\eta| \subseteq F_\Sigma(X_n)$ fanyelvet, amelyet a következőképpen értelmezünk:

1) Ha $\eta = \emptyset$, akkor $|\eta|$ az üres erdő.
2) Ha $\eta \in \Sigma_0 \bigcup X_n$, akkor $|\eta| = \{\eta\}$.
   - Ha $\eta = (\xi + \zeta)$, akkor $|\eta| = |\xi| \bigcup |\zeta|$,
   - ha $\eta = (\xi \cdot_{x_i} \zeta)$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $|\eta| = |\xi| \cdot_{x_i} |\zeta|$,
   - ha $\eta = (\xi^{*x_i})$ $(1 \leq i \leq n)$, akkor $|\eta| = |\xi|^{*x_i}$.
4) Ha $\eta = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$, akkor $|\eta| = \sigma(|\xi_1|, \ldots, |\xi_m|)$.

Egy fanyelv *reguláris,* ha meghatározható reguláris kifejezéssel.

Példák

1) Ha $\eta = \beta \cdot_{x_2} \big(\alpha \cdot_{x_1} (\sigma(x_1, x_2)^{*x_1})\big)$, akkor

$$| \eta | = \{\alpha, \sigma(\alpha, \beta), \sigma(\sigma(\alpha, \beta), \beta), \ldots\}.$$

2) Ha $\eta = (\gamma(x_2))^{*x_2} \cdot_{x_2} \big(\gamma(x_1))^{*x_1} \cdot_{x_1} (\sigma(x_1, x_2)\big)$, akkor

$$| \eta | = \{\sigma(\gamma^m(x_1), \gamma^n(x_2)) \mid n, m \geq 0\}.$$

3) Minden $p \in F_\Sigma(X_n)$ esetén $p \in \mathrm{RE}(\Sigma, X_n)$ és $|p| = \{p\}$. (Bizonyítás: p felépítése szerinti indukció.) Minden véges erdő reguláris: ha $L = \{p_1, \ldots, p_m\}$, akkor $\eta = p_1 + \ldots + p_m$.

Tétel (Kleene) Egy erdő akkor és csak akkor reguláris, ha felismerhető.

Bizonyítás Következik két részben.

KLEENE TÉTELE REGULÁRIS FANYELVEKRE

Tétel A reguláris erdők felismerhetők.

Bizonyítás: Az η reguláris ΣX_n-kifejezés felépítése szerinti indukcióval.

1) Ha $\eta = \emptyset$, akkor $|\eta|$ felismerhető bármely olyan ΣX_n-automatával, amely végállapotainak a halmaza üres.

2) Ha $\eta \in \Sigma_0 \bigcup X_n$, akkor a $G = (\{a_0\}, \Sigma, X_n, P, a_0)$ reguláris fanyelvtan, ahol $P = \{a_0 \to \eta\}$, az $|\eta|$ erdőt generálja.

3) $\eta = (\xi + \zeta)$, $\eta = (\xi \cdot_{x_i} \zeta)$ és $\eta = (\xi^{*x_i})$: az indukció feltevés és a felismerhető erdők egyesítésre, x_i-szorzásra és x_i-iterációra való zártsága miatt.

4) $\eta = \sigma(\xi_1, \ldots, \xi_m)$: tfh az $|\xi_1|, \ldots, |\xi_m|$ erdők felismerhetők.

Ekkor

$$\sigma(|\xi_1|, \ldots, |\xi_m|) = \{\sigma(x_1, \ldots, x_m)\}(x_1 \leftarrow |\xi_1|, \ldots, x_m \leftarrow |\xi_m|),$$

tehát $\sigma(|\xi_1|, \ldots, |\xi_m|)$ is felismerhető az IO-helyettesítésre való zártság miatt.

Kleene tétele reguláris fanyelvekre

Tétel A felismerhető erdők regulárisak.

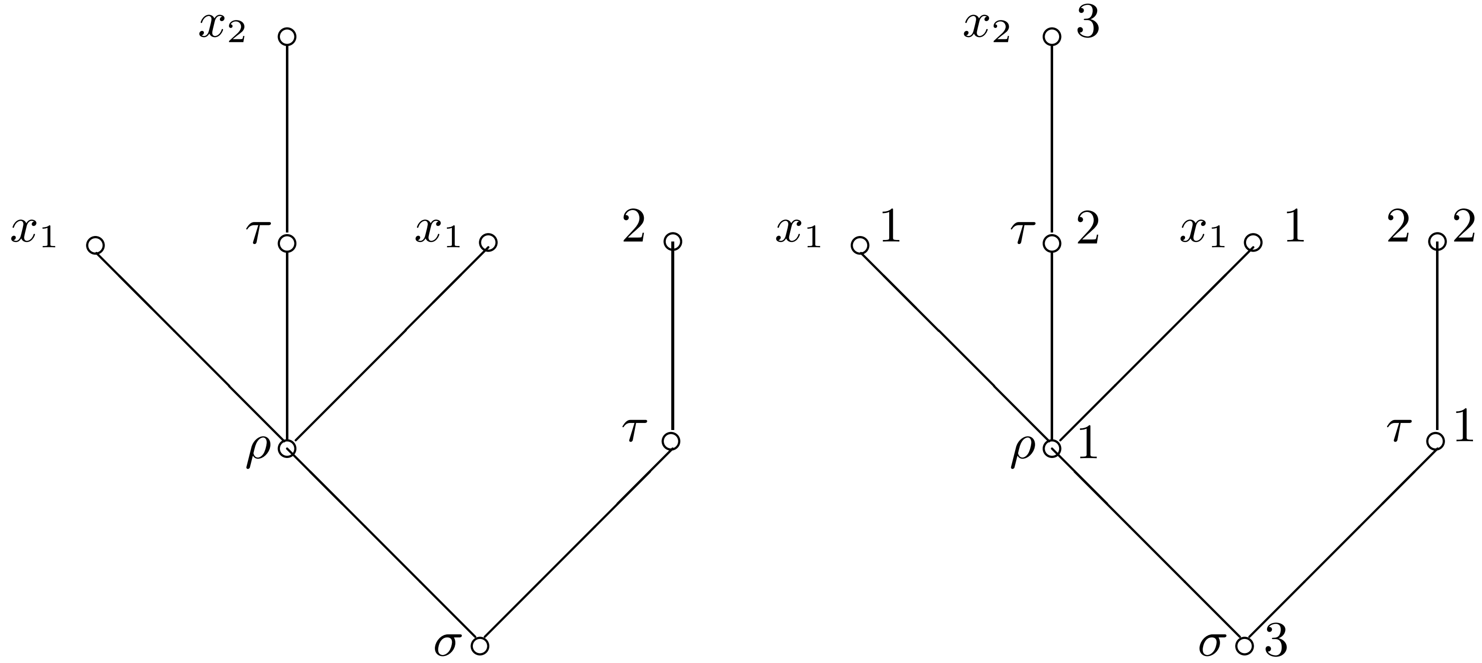
Bizonyítás Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ egy ΣX_n-automata, ahol $A = \{1, \ldots, k\}$.

Tetszőleges $K \subseteq A$, $0 \leq h \leq k$ és $1 \leq i \leq k$ esetén $T_{K,i}^{(h)}$ az összes olyan $p \in F_\Sigma(K \bigcup X_n)$ fák halmaza, melyekre:

$$p(\mathbf{a}) = i \text{ és } p \text{ minden } s \text{ valódi részfája esetén } 1 \leq s(\mathbf{a}) \leq h.$$

(A $p(\mathbf{a})$ egy állapot, melyet az algebrai alapfogalmak részben definiáltuk.)

Példa $A = \{1,2,3,4\}$, **a** $= (1,3)$, $A' = \{4\}$ és $K = \{2,4\}$
$p = \sigma(\rho(x_1, \tau(x_2), x_1), \tau(2))$



$p \in T_{K,3}^{(4)}, p \notin T_{K,3}^{(0)}$

$p \notin T_{K,3}^{(1)}, p \in T_{K,3}^{(2)}$

Nyilvánvaló, hogy $T(\mathbf{A}) = \bigcup (T_{\emptyset,i}^{(k)} \mid i \in A')$. Ezért elegendő igazolni, hogy minden $K \subseteq A$, $0 \leq h \leq k$ és $1 \leq i \leq k$ esetén $T_{K,i}^{(h)}$ reguláris.

<u>h szerinti indukció:</u>

(i) $h = 0$: Ekkor nincs ”közbülső állapot”, ezért

$$T_{K,i}^{(0)} \subseteq \Sigma_0 \bigcup X_n \bigcup \{i\} \bigcup$$
$$\{\sigma(y_1, \ldots, y_m) \mid \sigma \in \Sigma_m,\ y_1, \ldots, y_m \in \Sigma_0 \bigcup X_n \bigcup K\},$$

véges fanyelv, tehát reguláris.

(ii) $h \Rightarrow h+1$: Tfh. egy rögzített $0 \leq h < k$ mellett $T_{K,i}^{(h)}$ reguláris. Megmutatjuk:

$$T_{K,i}^{(h+1)} = T_{K,i}^{(h)} \bigcup T_{K,h+1}^{(h)} \cdot_{h+1} (T_{K\cup\{h+1\},h+1}^{(h)})^{*h+1} \cdot_{h+1} T_{K\cup\{h+1\},i}^{(h)}. \tag{1}$$

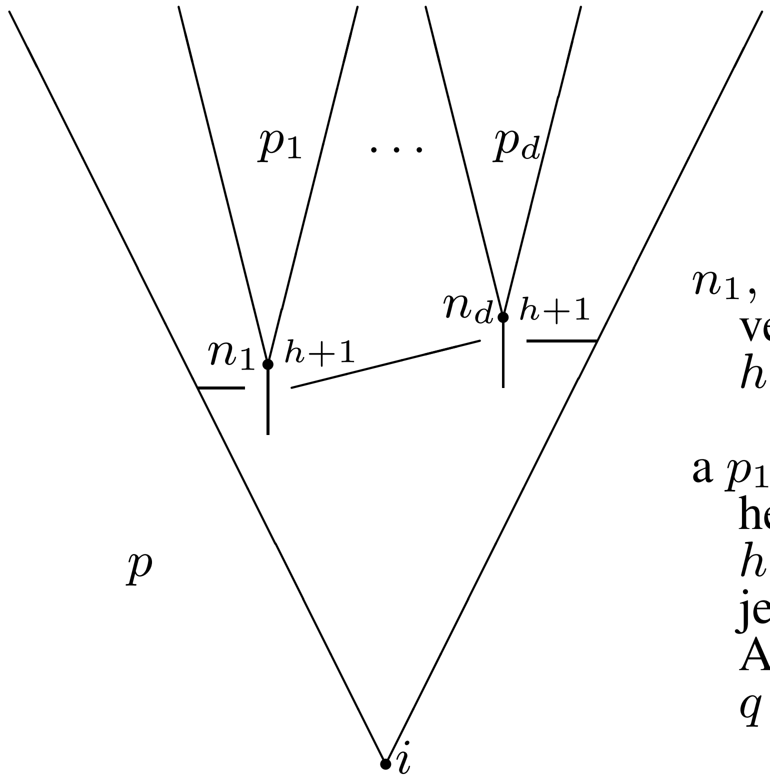
Jelölje (1) jobb oldalát S.

Az $S \subseteq T_{K,i}^{(h+1)}$ tartalmazás nyilvánvaló.

Fordítva, tfh. $p \in T_{K,i}^{(h+1)}$ tetszőleges. Irjuk a p fa s részfájának a gyökeréhez második cimkeként az $s(\mathbf{a})$ állapotot. A p gyökerétől a leveleihez vezető utakon $h+1$ belső előfordulásainak maximális l száma szerinti indukcióval igazoljuk, hogy $p \in S$.

1) $l = 0$: $p \in T_{K,i}^{(h)}$, így állításunk igaz.

2) Tfh. $l > 0$:



$n_1, \dots, n_d$ csúcsokhoz vezető úton nincs $h+1$ belső címke

a $p_1, \dots, p_d$ részfákat helyettesítsük a $h+1$ állapottal, jelölje q a kapott fát. Akkor $q \in T^{(h)}_{K \cup \{h+1\}, i}$

$p_1, \ldots, p_d \in T^{(h+1)}_{K,h+1}$ és a $p_1, \ldots, p_d$ fák mindegyikében a $h+1$ állapot l-nél kevesebbszer fordul elő. Tehát az indukciós feltevés szerint

$$p_1, \ldots, p_d \in T^{(h)}_{K,h+1} \bigcup T^{(h)}_{K,h+1} \cdot_{h+1} \underline{(T^{(h)}_{K\cup\{h+1\},h+1})^{*h+1} \cdot_{h+1} T^{(h)}_{K\cup\{h+1\},h+1}} \subseteq$$

$$T^{(h)}_{K,h+1} \bigcup T^{(h)}_{K,h+1} \cdot_{h+1} \underline{(T^{(h)}_{K\cup\{h+1\},h+1})^{*h+1}} =$$

$$T^{(h)}_{K,h+1} \cdot_{h+1} (T^{(h)}_{K\cup\{h+1\},h+1})^{*h+1}$$

Tehát
$p \in \{p_1, \ldots, p_d\} \cdot_{h+1} q \subseteq T^{(h)}_{K,h+1} \cdot_{h+1} (T^{(h)}_{K\cup\{h+1\},i})^{*h+1} \cdot_{h+1} T^{(h)}_{K\cup\{h+1\},i} \subseteq S$
$\square$

Kleene tételének egy másik alakja.

Tétel Egy fanyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha megkapható véges fanyelvekből a reguláris műveletek véges sokszori alkalmazásával.

Bizonyítás A egyik irány abból következik, hogy a véges fanyelvek felismerhetők és a felismerhető fanyelvek zártak a reguláris műveletekre.

Fordítva, legyen T felismerhető fanyelv. A Kleene tétel miatt van olyan η reguláris kifejezés, melyre $T = |\eta|$. Az η felépítése szerinti indukcióval fejezhetjük be a bizonyítást.

(i) Ha $\eta = \emptyset$ vagy $\eta \in \Sigma_0 \bigcup X_n$, akkor maga a T fanyelv is véges.

(ii) Ha $\eta = \xi + \zeta$, akkor $T = T_1 \bigcup T_2$, ahol $T_1 = |\xi|$ és $T_2 = |\zeta|$. Továbbá az indukciós feltevés miatt a T_1 és T_2 fanyelvek megkaphatók véges fanyelvekből a reguláris műveletek véges sokszori alkalmazásával. Ezért T is megkapható ugyanígy. Stb, stb ...

FAAUTOMATÁK MINIMALIZÁLÁSA

Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ ΣX_n-faautomaták. Egy $\varphi : A \to B$ leképezés $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{B}$-be való *homomorfizmusa*, ha
1) $\varphi(a^{(i)}) = b^{(i)}$ $(i = 1, \ldots, n)$.
2) φ az $\mathcal{A}$ algebrának a $\mathcal{B}$ algebrába való homomorf leképezése
3) $\varphi^{-1}(B') = A'$.

Ha van $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{B}$-be olyan φ homomorf leképezése, amely ráképezés, akkor $\mathbf{B}$-t az $\mathbf{A}$ faautomata *homomorf képének* mondjuk. Amennyiben φ kölcsönösen egyértelmű is, akkor φ-t *izomorfizmusnak* nevezzük, és azt mondjuk, hogy az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ faautomaták *izomorfak*, jelben $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Lemma Ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ homomorf képe a $\varphi: \ A \to B$ homomorfizmus mellett, akkor tetszőleges $p \in F_\Sigma(X_n)$ és $a_1, \ldots, a_n \in A$ esetén $p(a_1, \ldots, a_n) \in A' \Leftrightarrow p(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \in B'$.

Bizonyítás
$p(a_1, \ldots, a_n) \in A' \Leftrightarrow \varphi(p(a_1, \ldots, a_n)) \in B' \Leftrightarrow p(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n)) \in B'$, ahol az első ekvivalecia a $\varphi^{-1}(B') = A'$ feltételből, a második pedig a $\varphi(p(a_1, \ldots, a_n)) = p(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_n))$ feltételből következik (ld. homomorfizmus definíciója után).

Tétel Ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ homomorf képe, akkor $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$.

Bizonyítás A $\varphi(a^{(i)}) = b^{(i)}$ feltételből és az előző tételből kapjuk, hogy minden $p \in F_\Sigma(X_n)$-re $p(\mathbf{a}) \in A' \Leftrightarrow p(\mathbf{b}) \in B'$ ami pontosan azt jelenti, hogy $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$. $\square$

Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ egy ΣX_n-faautomata és $\rho \subseteq A \times A$ ekvivalencia reláció. ρ az $\mathbf{A}$ *kongruenciája*, ha
1) ρ az $\mathcal{A}$ algebra kongruenciája, és
2) ha $a \equiv b(\rho)$ $(a, b \in A)$ és $a \in A'$, akkor $b \in A'$ (vagyis ρ szaturálja A'-t).

Jelölés: $\mathbf{a}/\rho = (a^{(1)}/\rho, \ldots, a^{(n)}/\rho)$

Ha ρ az $\mathbf{A}$ kongruenciája, akkor az $\mathbf{A}/\rho = (\mathcal{A}/\rho, \mathbf{a}/\rho, A'/\rho)$ faautomatát az $\mathbf{A}$ *ρ-szerinti faktor ΣX_n-automatájának* nevezzük.

Tétel Ha ρ az $\mathbf{A}$ kongruenciája, akkor $\mathbf{A}/\rho$ az $\mathbf{A}$ homomorf képe. Fordítva, ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ homomorf képe, akkor $\mathbf{A}$-nak van olyan ρ kongruenciája, hogy $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}/\rho$.

Bizonyítás Ismert, hogy $\varphi(a) = a/\rho$ $(a \in A)$ az $\mathcal{A}$ algebrának $\mathcal{A}/\rho$-ra való homomorfizmusa. Ez egyúttal $\mathbf{A}$-nak $\mathbf{A}/\rho$-ra való homomorfizmusa is, mivel

1) $\varphi(a^{(i)}) = a^{(i)}/\rho$ és
3) $\underline{a \in A'} \Leftrightarrow a/\rho \in A'/\rho \Leftrightarrow \underline{\varphi(a) \in A'/\rho}$, ahol az első ekvivalencia abból következik, hogy ρ szaturálja A'-t.

A második állítás bizonyítása végett legyen $\varphi : A \stackrel{\text{re}}{\to} B$ az $\mathbf{A}$ faautomatának $\mathbf{B}$-re történő homomorfizmusa. Ismert, hogy az $a_1 \equiv a_2(\rho) \Leftrightarrow \varphi(a_1) = \varphi(a_2)$ $(a_1, a_2 \in A)$ összefüggéssel definiált ekvivalencia reláció az $\mathcal{A}$ algebra kongruenciája. Megmutatjuk, hogy ρ az $\mathbf{A}$ faautomata kongruenciája is.

Tfh. $a_1 \equiv a_2(\rho)$ és $\underline{a_1 \in A'}$. A ρ definíciójából és abból a tényből, hogy h homomorfizmus, következik, hogy $\varphi(a_1) = \underline{\varphi(a_2) \in B'}$, amiből ugyancsak h homomorfizmus volta miatt $a_2 \in A'$.

Most igazoljuk, hogy $\mathbf{B} \cong \mathbf{A}/\rho$. Ismert, hogy $\psi(a/\rho) = \varphi(a)$ izomorfizmus az $\mathcal{A}/\rho$ és $\mathcal{B}$ algebrák között. Ekkor ψ izomorfizmus $\mathbf{A}/\rho$ és $\mathbf{B}$ között is, mivel

1) $\psi(a^{(i)}/\rho) = \varphi(a^{(i)}) = b^{(i)}$,

3) $\underline{a/\rho \in A'/\rho} \Leftrightarrow a \in A' \Leftrightarrow \varphi(a) \in B' \stackrel{\varphi(a)=\psi(a/\rho)}{\Leftrightarrow} \underline{\psi(a/\rho) \in B'}$ $\square$

Következmény Ha ρ az $\mathbf{A}$ kongruenciája, akkor $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{A}/\rho)$.

Definíció. Legyen $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ felismerhető erdő, $\mathcal{K}_T$ pedig a T-t felismerő ΣX_n-automaták osztálya. Egy $\mathbf{A}$ faautomata minimális $\mathcal{K}_T$-ben, ha bármely $\mathbf{B} \in \mathcal{K}_T$ faautomatára $|A| \leq |B|$.

Célunk egy adott nyelvet felismerő minimális faautomata algoritmikus meghatározása.

Legyen $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ egy faautomata és definiáljuk $\rho_\mathbf{A} \subseteq A \times A$ relációt a következőképpen: $a \equiv b(\rho_\mathbf{A})$ akkor és csak akkor, ha minden $p \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$ esetén $p(a) \in A' \Leftrightarrow p(b) \in A'$.

Ha $a \equiv b(\rho_\mathbf{A})$, akkor azt mondjuk, hogy a és b *ekvivalensek*.

Tétel $\rho_{\mathbf{A}}$ az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ kongruenciája.

Bizonyítás Nyilvánvaló, hogy $\rho_{\mathbf{A}}$ ekvivalencia.

1) Először megmutatjuk, hogy $\rho_{\mathbf{A}}$ az $\mathcal{A}$ kongruenciája. Indirekt bizonyítás.

Legyen $a, b \in A$ úgy, hogy $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$ és tfh $\rho_{\mathbf{A}}$ nem kongruencia. Akkor van
$\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_1, c_{i+1}, \ldots, c_m) \in \mathrm{ET}(\mathcal{A})$, melyre
$\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \ldots, c_m) \not\equiv \sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \ldots, c_m)(\rho_{\mathbf{A}})$.

Ekkor a $\rho_{\mathbf{A}}$ definíciója szerint létezik $p \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$, melyre
$p(\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \ldots, c_m)) \in A' \Leftrightarrow$
$p(\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \ldots, c_m)) \notin A'$

De akkor a $q(x_1) = p(\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, x_1, c_{i+1}, \ldots, c_m)) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$ algebrai függvényre teljesül, hogy
$q(a) = p(\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, a, c_{i+1}, \ldots, c_m))$ és
$q(b) = p(\sigma(c_1, \ldots, c_{i-1}, b, c_{i+1}, \ldots, c_m))$.

Kapjuk, hogy $q(a) \in A' \Leftrightarrow q(b) \notin A'$, ami ellentmond annak, hogy $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$.

Végül megmutatjuk, hogy $\rho_{\mathbf{A}}$ szaturálja A'-t.

Legyen $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$ és $a \in A'$. A $p = x_1 \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$ algebrai függvényre $p(a) = a$ és $p(b) = b$.

Tehát a $p(a) \in A' \Leftrightarrow p(b) \in A'$ feltételből kapjuk, hogy $b \in A'$. $\square$

Az $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ faktorautomatát az $\mathbf{A}$-*hoz tartozó redukált faautomatának* nevezzük. Ha $\rho_{\mathbf{A}}$ az egyenlőségi reláció A-n, akkor azt mondjuk, hogy $\mathbf{A}$ *redukált*.

Tétel Legyen φ az $\mathbf{A}$ ΣX_n-automatának a $\mathbf{B}$ ΣX_n-automatára való homomorf leképezése. Úgy tetszőleges két $a, b \in A$ állapotra teljesül az
$a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}}) \Leftrightarrow \varphi(a) \equiv \varphi(b)(\rho_{\mathbf{B}})$
ekvivalencia.

Bizonyítás Lásd Appendix.

Következmény Tetszőleges $\mathbf{A}$ ΣX_n-automatára az $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ faktor faautomata redukált.

Bizonyítás Tfh. $a/\rho_{\mathbf{A}} \equiv b/\rho_{\mathbf{A}}(\rho_{(\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}})})$. Alkalmazzuk a fenti tételt az $\mathbf{A}$ és az $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ faautomatákra és a természetes $\varphi : A \to A/\rho_{\mathbf{A}}$ homomorfizmura. Kapjuk, hogy $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$, vagyis $a/\rho_{\mathbf{A}} = b/\rho_{\mathbf{A}}$. $\square$

Definíció A $\mathbf{B} = (\mathcal{B}, \mathbf{b}, B')$ faautomata az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ *összefüggő része,* ha
- $B = \{p(\mathbf{a}) \mid p \in F_\Sigma(X_n)\}$,
- $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ és $B' = B \bigcap A'$.

Ha $\mathbf{B}$ az $\mathbf{A}$ összefüggő része, akkor nyilvánvalóan $T(\mathbf{B}) = T(\mathbf{A})$.

$\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ faautomata *összefüggő*, ha $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, vagyis ha
$A = \{p(\mathbf{a}) \mid p \in F_\Sigma(X_n)\}$.

Lemma Ha $\mathbf{A}$ összefüggő és ρ az $\mathbf{A}$ kongruenciája, akkor $\mathbf{A}/\rho$ is összefüggő.

Tétel Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összefüggő ΣX_n-automaták. Úgy $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$ akkor és csakis akkor teljesül, ha $\mathbf{A}/\rho_\mathbf{A} \cong \mathbf{B}/\rho_\mathbf{B}$.

Bizonyítás Tfh $\mathbf{A}/\rho_\mathbf{A} \cong \mathbf{B}/\rho_\mathbf{B}$. Mivel a homomorfizmus megőrzi a faautomata által felismert erdőt, a faktor faautomata pedig a faautomata homomorf képe, ezért

$$T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{A}/\rho_\mathbf{A}) = T(\mathbf{B}/\rho_\mathbf{B}) = T(\mathbf{B}).$$

Fordítva, tfh. $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$.

Vegyük az $\mathbf{A}' = \mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ és $\mathbf{B}' = \mathbf{B}/\rho_{\mathbf{B}}$ faautomatákat. Mint láttuk, $T(\mathbf{A}') = T(\mathbf{B}')$, továbbá $\mathbf{A}'$ és $\mathbf{B}'$ összefüggőek és redukáltak.

Ha be tudjuk bizonyítani, hogy $\mathbf{A}' \cong \mathbf{B}'$, akkor készen is vagyunk, mert

$$\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}} = \mathbf{A}' \cong \mathbf{B}' = \mathbf{B}/\rho_{\mathbf{B}}.$$

A bizonyítást az $\mathbf{A}'$ és $\mathbf{B}'$ helyett az egyszerűbb $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ jelöléssel végezzük. Tegyük fel tehát, hogy $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$, továbbá $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összefüggőek és redukáltak. Megmutatjuk, hogy $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$.

Legyen $\varphi = \{(p(\mathbf{a}), p(\mathbf{b})) \mid p \in F_\Sigma(X_n)\} \subseteq A \times B$. Mivel $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összefüggő, φ értelmezési tartománya A, értékkészlete pedig B.

(a) Megmutatjuk (indirekt bizonyítással), hogy φ injektív leképezés A-ból B-re.

Tfh $\exists p_1, p_2 \in F_\Sigma(X_n)$: $p_1(\mathbf{a}) = p_2(\mathbf{a})$ és $p_1(\mathbf{b}) \neq p_2(\mathbf{b})$.

Mivel $\mathbf{B}$ redukált, van olyan $p(b_1, \ldots, b_{i-1}, x_1, b_{i+1}, \ldots, b_k) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{B})$, melyre

$p(b_1, \ldots, b_{i-1}, p_1(\mathbf{b}), b_{i+1}, \ldots, b_k) \in B' \Leftrightarrow$
$p(b_1, \ldots, b_{i-1}, p_2(\mathbf{b}), b_{i+1}, \ldots, b_k) \notin B'$

Mivel $\mathbf{B}$ összefüggő, minden $j \in \{1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, k\}$-re létezik
$q_j \in F_\Sigma(X_n) : q_j(\mathbf{b}) = b_j$

Legyen
$r_1 = p(q_1, \ldots, q_{i-1}, p_1, q_{i+1}, \ldots, q_k) \in F_\Sigma(X_n)$,
$r_2 = p(q_1, \ldots, q_{i-1}, p_2, q_{i+1}, \ldots, q_k) \in F_\Sigma(X_n)$

Legyen
$r_1 = p(q_1, \ldots, q_{i-1}, p_1, q_{i+1}, \ldots, q_k) \in F_\Sigma(X_n)$,
$r_2 = p(q_1, \ldots, q_{i-1}, p_2, q_{i+1}, \ldots, q_k) \in F_\Sigma(X_n)$.
Az előző oldalról kapjuk, hogy $r_1(\mathbf{b}) \in B' \Leftrightarrow r_2(\mathbf{b}) \notin B'$.

Mivel $p_1(\mathbf{a}) = p_2(\mathbf{a})$, ezért $r_1(\mathbf{a}) = r_2(\mathbf{a})$. Másrészt a $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$ feltételből következik, hogy $r_j(\mathbf{a}) \in A' \Leftrightarrow r_j(\mathbf{b}) \in B'$ $(j = 1, 2)$. Kapjuk, hogy

$$r_1(\mathbf{b}) \in B' \Leftrightarrow r_1(\mathbf{a}) \in A' \Leftrightarrow r_2(\mathbf{a}) \in A' \Leftrightarrow r_2(\mathbf{b}) \in B',$$

ami ellentmondás.

Végül, az $\mathbf{A}$ és a $\mathbf{B}$ szerepét felcserélve az is adódik, hogy φ injektív.

(b) Megmutatjuk, hogy φ homomorfizmus is.

1) $p = x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$: $p(\mathbf{a}) = \underline{a^{(i)}}$ és $p(\mathbf{b}) = \underline{b^{(i)}}$,

2) legyen $\sigma(\in \Sigma_m)$ és $p_1, \ldots, p_m \in F_\Sigma(X_n)$ ($\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ összefüggő):

$\underline{\varphi(\sigma(p_1(\mathbf{a}), \ldots, p_m(\mathbf{a})))} = \varphi(\sigma(p_1, \ldots, p_m)(\mathbf{a})) =$
$\sigma(p_1, \ldots, p_m)(\mathbf{b}) = \sigma(p_1(\mathbf{b}), \ldots, p_m(\mathbf{b})) = \underline{\sigma(\varphi(p_1(\mathbf{a})), \ldots, \varphi(p_m(\mathbf{a})))}$,

3) $p(\mathbf{a}) \in A' \Leftrightarrow p(\mathbf{b}) \in B' \Leftrightarrow \varphi(p(\mathbf{a})) \in B'$,

ahol az első ekvivalenvcia a $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$ feltételből, a második pedig a $p(\mathbf{b}) = \varphi(p(\mathbf{a}))$ összefüggésből következik.

Tehát $\mathbf{B}$ homomorf képe $\mathbf{A}$-nak a φ injektív homomorfizmus mellett, vagyis $\mathbf{A} \cong \mathbf{B}$. $\square$

Következmény Ha $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_T$ összefüggő faautomata, akkor minden $\mathbf{B} \in \mathcal{K}_T$ összefüggő faautomata esetén $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ a $\mathbf{B}$ homomorf képe.

Bizonyítás A homomorfizmus tétel szerint $\mathbf{B}/\rho_{\mathbf{B}}$ homomorf képe $\mathbf{B}$-nek. Továbbá, a $T(\mathbf{A}) = T(\mathbf{B})$ egyenlőség miatt $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}} \cong \mathbf{B}/\rho_{\mathbf{B}}$. Ezért $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ is a $\mathbf{B}$ homomorf képe. $\square$

Következmény Tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_T$ összefüggő faautomata esetén $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ minimális $\mathcal{K}_T$-ben. Továbbá, bármely két $\mathcal{K}_T$-beli minimális automata izomorf.

Faautomaták minimalizálása

Az eddigieket összefoglalva, egy adott T erdőt felismerő minimális faautomatát a következőképpen adjuk meg:

1) Veszünk egy tetszőleges $\mathbf{A} \in \mathcal{K}_T$ faautomatát és megkonstruáljuk annak $\mathbf{B}$ összefüggő részét.

2) Megkonstruáljuk a $\mathbf{B}/\rho_{\mathbf{B}}$ faautomatát.

1) Az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ összefüggő részének meghatározása.

(i) $H_0 = \{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\} \bigcup \{\sigma^{\mathcal{A}} \mid \sigma \in \Sigma_0\}$,...

(ii) $H_{i+1} = H_i \bigcup \{\sigma(a_1, \ldots, a_m) \mid \sigma \in \Sigma_m, m > 0,\ a_1, \ldots, a_m \in H_i\}$,

Mivel $H_i \subseteq H_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots)$ és A véges, van olyan k, melyre $H_k = H_{k+1}$.

Megmutatjuk,hogy $H_k = H_{k+l}$ $(l = 0, 1, \ldots)$.

Elegendő igazoni, hogy ha $(H_k = H_{k+1})$ akkor $(H_{k+1} = H_{k+2})$.

Tfh $a \in H_{k+2}$
1) Ha $a \in H_{k+1}$, akkor készen vagyunk.
2) Ha $a \notin H_{k+1}$, akkor $\exists \sigma \in \Sigma_m,\ a_1, \ldots, a_m \in H_{k+1} : a = \sigma(a_1, \ldots, a_m)$.
De $H_k = H_{k+1}$, így $a_1, \ldots, a_m \in H_k$, következésképpen $a \in H_{k+1}$.

H_k az $\mathcal{A}$ algebrának az $\{a^{(1)}, \ldots, a^{(n)}\}$ részhalmaz által generált részalgebrája.

2) Az $\mathbf{A}/\rho_{\mathbf{A}}$ redukált faautomata meghatározása (= $\rho_{\mathbf{A}}$ kiszámítása).

Definiáljuk a $\rho_0, \rho_1, \ldots$ relációkat a következő módon:

(i) $a \equiv b(\rho_0) \Leftrightarrow (a \in A' \Leftrightarrow b \in A')$

$$\vdots$$

(ii) $a \equiv b(\rho_{i+1}) \Leftrightarrow a \equiv b(\rho_i) \wedge (\forall p \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))(p(a) \equiv p(b)(\rho_i))$

Nyilvánvaló, hogy $\rho_0 \supseteq \rho_1 \supseteq \ldots$, ezért $\exists k: \ \rho_k = \rho_{k+1}$.

Állítás $\rho_{\mathbf{A}} = \rho_k$.

Bizonyítás Lásd Appendix.

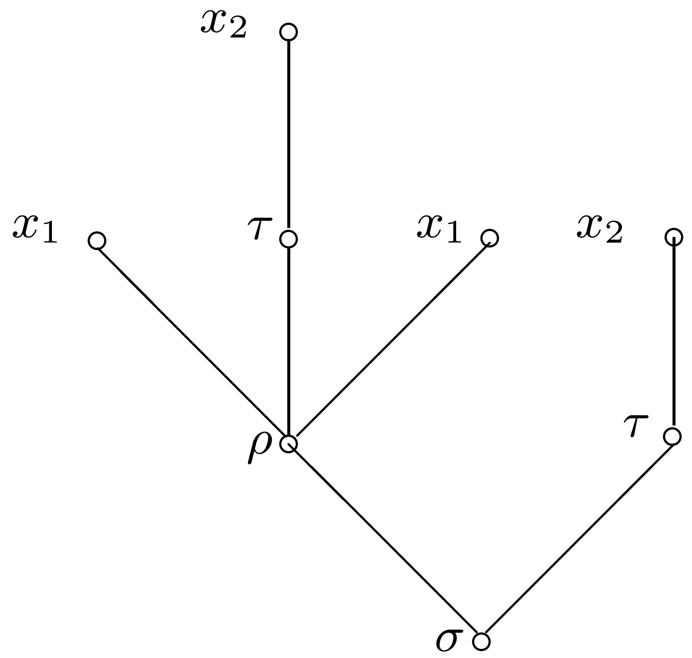
LOKÁLIS FANYELVEK

Egy $p(\in F_\Sigma(X_n))$ fa *elágazásainak* $\mathrm{fork}(p)$ halmaza:

(i) ha $p \in \Sigma_0 \bigcup X_n$, akkor $\mathrm{fork}(p) = \emptyset$,
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor

$$\mathrm{fork}(p) = \mathrm{fork}(p_1) \bigcup \ldots \bigcup \mathrm{fork}(p_m) \bigcup \{(\sigma, \mathrm{root}(p_1) \ldots \mathrm{root}(p_m))\}.$$

Példa $p = \sigma(\rho(x_1, \tau(x_2), x_1), \tau(x_2))$



$\mathrm{fork}(p) = \{(\sigma, \rho\tau), (\rho, x_1\tau x_1), (\tau, x_2)\}$

LOKÁLIS FANYELVEK

Definíció $\text{fork}(\Sigma, X_n) := \bigcup(\text{fork}(p) \mid p \in F_\Sigma(X_n))$, véges halmaz.

Definíció Legyen $R \subseteq \Sigma \bigcup X_n$ és $F \subseteq \text{fork}(\Sigma, X_n)$. Ekkor

$$T(\Sigma, X_n, R, F) := \{p \in F_\Sigma(X_n) \mid \text{root}(p) \in R \text{ és } \text{fork}(p) \subseteq F\}.$$

(Szemléletesen, $T(\Sigma, X_n, R, F)$ az összes olyan fák halmaza, melyek gyökere R-ben, valamennyi elágazása pedig F-ben van.)

Egy $T(\subseteq F_\Sigma(X_n))$ fanyelv *lokális*, ha létezik $R \subseteq \Sigma \bigcup X_n$ és $F \subseteq \text{fork}(\Sigma, X_n)$, melyekre $T = T(\Sigma, X_n, R, F)$.

A lokális ΣX_n-fanyelvek osztályát $\text{Loc}(\Sigma, X_n)$-nel jelöljük.

Példa Legyen $\Sigma = \Sigma_2 = \{\sigma\}$ és

$$T = \{x_2, \sigma(x_2, x_1), \sigma(\sigma(x_2, x_1), x_1), \ldots\}.$$

Ekkor T lokális (pontosabban $T \in \mathrm{Loc}(\Sigma, X_2)$), mivel $T = T(\Sigma, X_2, R, F)$, ahol

- $R = \{x_2, \sigma\}$ és
- $F = \{(\sigma, \sigma x_1), (\sigma, x_2 x_1)\}$.

Tétel $\mathrm{Loc}(\Sigma, X_n) \subseteq \mathrm{Rec}(\Sigma, X_n)$: minden lokális erdő felismerhető.

Bizonyítás Tegyük fel, hogy $T = T(\Sigma, X_n, R, F)$, ahol $F \subseteq \mathrm{fork}(\Sigma, X_n)$ és $R \subseteq \Sigma \bigcup X_n$.

Értelmezzük az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, \mathbf{a}, A')$ faautomatát, ahol $A = \Sigma \bigcup X_n \bigcup \{*\}$ $(* \notin \Sigma \bigcup X_n)$, továbbá

- minden $\sigma \in \Sigma_0$-ra $\sigma^{\mathcal{A}} = \sigma$,
- minden $m > 0$, $\sigma \in \Sigma_m$, és $a_1, \ldots, a_m \in A$ esetén

$$\sigma^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_m) = \begin{cases} \sigma, & \text{ha } (\sigma, a_1 \ldots a_m) \in F, \\ *, & \text{különben.} \end{cases}$$

Végül $\mathbf{a} = (x_1, \ldots, x_n)$, és $A' = R$.

Megmutatjuk, hogy minden $a \in A \setminus \{*\}$ és $p \in F_\Sigma(X_n)$ esetén $a = p(\mathbf{a})$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{root}(p) = a$ és $\mathrm{fork}(p) \subseteq F$.

Ebből és az $A' = R$ feltételből következik a tétel állítása.

LOKÁLIS FANYELVEK

Állítás: $\forall(a \in A \setminus \{*\}) : a = p(\mathbf{a}) \Leftrightarrow \mathrm{root}(p) = a \wedge \mathrm{fork}(p) \subseteq F$

$\Rightarrow$ irány: h(p) szerinti indukcióval

(i) h$(p) = 0$
(ia) $p = x_i$: $p(\mathbf{a}) = x_i = \mathrm{root}(p)$ és $\mathrm{fork}(p) = \emptyset$,
(ib) $p = \sigma \in \Sigma_0$: $p(\mathbf{a}) = \sigma = \mathrm{root}(p)$ és $\mathrm{fork}(p) = \emptyset$

2) h$(p) > 0$ és $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$
A feltétel szerint $p_i(\mathbf{a}) = a_i \neq *$ $(i = 1, \ldots, m)$ és $\sigma(a_1, \ldots, a_m) = a \neq *$.

Az indukciós feltevés szerint: $\underline{a_i = \mathrm{root}(p_i)} \wedge \underline{\mathrm{fork}(p_i) \subseteq F}$

A $\sigma(a_1, \ldots, a_m) = a \neq *$ feltételből és $\sigma^{\mathcal{A}}$ definíciójából:

$\underline{a = \sigma = \mathrm{root}(p)} \wedge \underline{(\sigma, \mathrm{root}(p_1) \ldots \mathrm{root}(p_m)) \in F}$

Tehát $\mathrm{root}(p) = a$ és $\mathrm{fork}(p) \subseteq F$.

$\Leftarrow$ irány: fordítva $\square$

Tétel $\mathrm{Det}(\Sigma, X_1) \setminus \mathrm{Loc}(\Sigma, X_1) \neq \emptyset$: van olyan felismerhető fanyelv amely nem lokális.

Bizonyítás Legyen $\Sigma = \Sigma_1 = \{\sigma\}$ és vegyük a $T = \{\sigma(\sigma(x_1))\}$ fanyelvet. Nyilvánvaló, hogy T determinisztikus (mivel felismerhető és zárt).

Tfh. T lokális, azaz $T = T(\Sigma, X_1, R, F)$ alkalmas R-re és F-re.

Akkor $\mathrm{fork}(\sigma(\sigma(x_1))) = \{(\sigma, \sigma), (\sigma, x_1)\} \subseteq F \wedge \sigma \in R$.

De akkor $\sigma^k(x_1) \in T$ $(k = 1, 2, \ldots)$, ahol

(i) $\sigma^0(x_1) = x_1$, és
(ii) $\sigma^k(x_1) = \sigma(\sigma^{k-1}(x_1))$, ha $k > 0$,

ami nyilvánvalóan ellentmondás.

(Tehát még az is igaz, hogy van olyan véges (egyelemű) fanyelv, amely nem lokális.)

LOKÁLIS FANYELVEK

Példa Megmutatjuk, hogy a

$$T_{m,n} = \{\sigma(\gamma^m(x_1), \gamma^n(x_2)) \mid m, n \geq 0\}$$

fanyelv nem lokális. Tegyük fel ugyanis, hogy van olyan $R \subseteq \Sigma \cup X_2$ és $F \subseteq \mathrm{fork}(\Sigma, X_2)$, melyekre $T = T(\Sigma, X_2, R, F)$.

Akkor nyilvánvalóan $\sigma \in R$, továbbá, $(\sigma, \gamma\gamma), (\gamma, x_1), (\gamma, x_2) \in F$.

De akkor $\sigma(\gamma(x_1), \gamma(x_1))$, $\sigma(\gamma(x_2), \gamma(x_1))$, stb szintén $T(\Sigma, X_2, R, F)$-ben van, ami ellentmondás, mert $T = T(\Sigma, X_2, R, F)$.

Definíció Legyenek Σ és Ω rangolt ábécék és tekintsünk egy $\tau_0 : \; \Sigma \to \Omega$ rangtartó leképezést (tehát $\tau(\Sigma_m) \subseteq \Omega_m$ $(m = 0, 1, \ldots)$).

τ_0 természetes módon kiterjeszthető egy $\tau : \; F_\Sigma(X_n) \to F_\Omega(X_n)$ leképezéssé, amit *projekciónak* hívunk:

(ia) minden $x \in X_n$-re $\tau(x) = x$
(ib) minden $\sigma \in \Sigma_0$-ra $\tau(\sigma) = \tau_0(\sigma)$
(ii) minden $m > 0$, $\sigma \in \Sigma_m$, és $p_1, \ldots, p_m \in F_\Sigma(X_n)$ esetén

$$\tau(\sigma(p_1, \ldots, p_m)) = \tau_0(\sigma)(\tau(p_1), \ldots, \tau(p_m)).$$

Példa

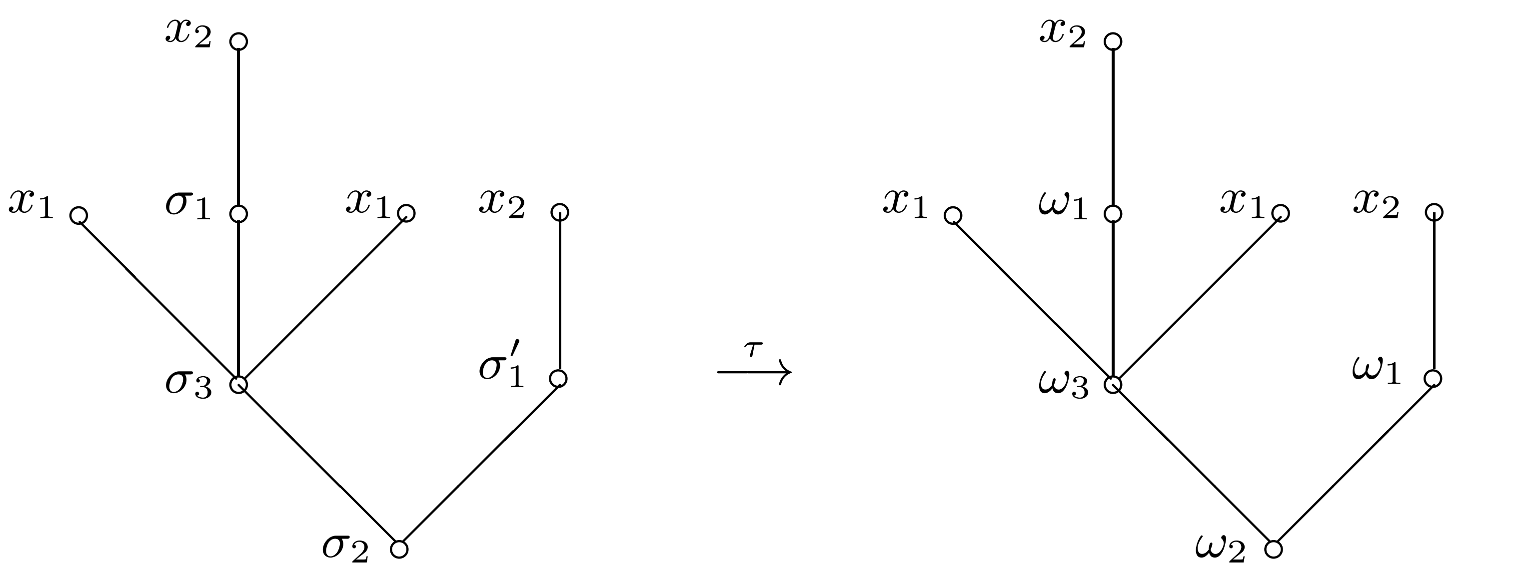
$\Sigma = \Sigma_1 \bigcup \Sigma_2 \bigcup \Sigma_3$, $\Sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_1'\}$, $\Sigma_2 = \{\sigma_2\}$, $\Sigma_3 = \{\sigma_3\}$

$\Omega = \Omega_1 \bigcup \Omega_2 \bigcup \Omega_3$, $\Omega_1 = \{\omega_1\}$, $\Omega_2 = \{\omega_2\}$, $\Omega_3 = \{\omega_3\}$

$\tau_0(\sigma_1) = \tau_0(\sigma_1') = \omega_1$
$\tau_0(\sigma_2) = \omega_2$
$\tau_0(\sigma_3) = \omega_3$

$[\tau(\sigma(p_1, \ldots, p_m)) = \tau_0(\sigma)(\tau(p_1), \ldots, \tau(p_m))]$

LOKÁLIS FANYELVEK



$p = \sigma_2(\sigma_3(x_1, \sigma_1(x_2), x_1), \sigma'_1(x_2)) \quad \tau(p) = \omega_2(\omega_3(x_1, \omega_1(x_2), x_1), \omega_1(x_2))$

Projekciók vizsgálata estén feltehető, hogy $\tau(F_\Sigma(X_n)) = F_\Omega(X_n)$, vagyis $\tau_0(\Sigma) = \Omega$.

Tétel Legyen $\tau_0 : \ \Sigma \to \Omega$ projekció. Ha $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ felismerhető, akkor $\tau(T)$ is az. Továbbá, ha $R \subseteq F_\Omega(X_n)$ felismerhető, akkor $\tau^{-1}(R)$ is az.

Bizonyítás a) $\tau(T)$ felismerhető:

Legyen $T = T(G)$, ahol $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ na-ban adott reguláris fanyelvtan.

Konstruáljuk meg a $\bar{G} = (A, \Omega, X_n, \bar{P}, a_0)$ fanyelvtant a következőképpen:
(ia) Ha $a \to x_i \in P$ $(a \in A,\ x_i \in X_n)$, akkor $a \to x_i \in \bar{P}$.
(ib) Ha $a \to \sigma \in P$ $(a \in A,\ \sigma \in \Sigma_0)$, akkor $a \to \tau_0(\sigma) \in \bar{P}$.
(ii) Ha $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$ $(m > 0, \sigma \in \Sigma_m, a, a_1, \ldots, a_m \in A)$, akkor

$$a \to \tau_0(\sigma)(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}.$$

<u>$\tau(T) \subseteq T(\bar{G})$:</u> tetszőleges $a \in A$ és $p \in F_\Sigma(X_n)$ esetén

$$(a \Rightarrow_G^* p) \Longrightarrow (a \Rightarrow_{\bar{G}}^* \tau(p)).$$

Bizonyítás $\mathrm{h}(p)$ szerinti indukcióval

(i) $\mathrm{h}(p) = 0$:
(ia) $p = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$: $a \to x_i \in P \Rightarrow a \to x_i \in \bar{P} \Rightarrow a \Rightarrow_{\bar{G}} x_i = \tau(p)$
(ib) $p = \sigma \in \Sigma_0$: $a \to \sigma \in P \Rightarrow a \to \tau_0(\sigma) \in \bar{P} \Rightarrow a \Rightarrow_{\bar{G}} \tau_0(\sigma) = \tau(p)$

(ii) $\mathrm{h}(p) > 0$: $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(m > 0, \sigma \in \Sigma_m)$,

A deriváció $a \Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_G^* \sigma(p_1, \ldots, p_m) = p$ alakban írható.

Egyrészt $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$, amiből $\bar{P}$ értelmezése szerint
$a \to \tau_0(\sigma)(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}$.

Másrészt $a_i \Rightarrow_G^* p_i$, amiből az indukció feltevés szerint $a_i \Rightarrow_{\bar{G}}^* \tau(p_i)$.

Tehát $a \Rightarrow_{\bar{G}} \tau_0(\sigma)(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_{\bar{G}}^* \tau_0(\sigma)(\tau(p_1), \ldots, \tau(p_m))$.

LOKÁLIS FANYELVEK

$\underline{T(\bar{G}) \subseteq \tau(T)}$: tetszőleges $a \in A$, $q \in F_\Omega(X_n)$ esetén

$$(a \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} q) \Longrightarrow (\exists p \in F_\Sigma(X_n))(a \Rightarrow_G^{*} p \wedge \tau(p) = q).$$

Bizonyítás $\mathrm{h}(q)$ szerinti indukcióval.

(i) $\mathrm{h}(q) = 0$: $q = x_i$ vagy $q = \omega \in \Omega_0$, minkét eset triviális.

(ii) $\mathrm{h}(q) > 0$: $q = \omega(q_1 \ldots, q_m)$ $(m > 0, \omega \in \Omega_m)$
$a \Rightarrow_{\bar{G}} \omega(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} \omega(q_1, \ldots, q_m) = q$

Egyrészt $a \to \omega(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}$, tehát $\exists \sigma \in \Sigma_m$: $\tau_0(\sigma) = \omega$ és
$a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$.

Másrészt $a_i \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} q_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, tehát az indukciós feltevés szerint
$\exists p_i \in F_\Sigma(X_n)$, melyre $a_i \Rightarrow_G^{*} p_i$ és $\tau(p_i) = q_i$.

A $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ fára $a \Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_G^{*} \sigma(p_1, \ldots, p_m) \wedge \tau(p) = q$.

a) $\tau^{-1}(R)$ felismerhető: Legyen $R = T(\bar{G})$, ahol $\bar{G} = (A, \Omega, X_n, \bar{P}, a_0)$ na-ban adott reguláris fanyelvtan.

Tekintsük a $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ reguláris fanyelvtant, ahol

(ia) $a \to x_i \in P \Leftrightarrow a \to x_i \in \bar{P}$ $(x_i \in X_n)$.
(ib) $a \to \sigma \in P \Leftrightarrow a \to \tau_0(\sigma) \in \bar{P}$ $(\sigma \in \Sigma_0)$.
(ii) $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P \Leftrightarrow$
$a \to \tau_0(\sigma)(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$.

Megmutatjuk, hogy tetszőleges $a \in A$-ra és $p \in F_\Sigma(X_n)$-re

$$a \Rightarrow_G^* p \Leftrightarrow a \Rightarrow_{\bar{G}}^* \tau(p).$$

<u>$\Rightarrow$ irány</u>: mint az első állítás bizonyításában.

<u>$\Leftarrow$ irány</u>: Tfh. $a \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} \tau(p)$
(i) $\mathrm{h}(p) = 0$:

(ia) $p = x_i \in X_n$: $\tau(p) = x_i$ és $a \to x_i \in \bar{P} \Rightarrow a \to x_i \in P$

(ib) $p = \sigma \in \Sigma_0$: $a \to \tau(\sigma) \in \bar{P} \Rightarrow a \to \sigma \in P$

(ii) $\mathrm{h}(p) > 0$: $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(m > 0, \Sigma \in \Sigma_m)$ és
$\tau(p) = \tau_0(\sigma)(\tau(p_1), \ldots, \tau(p_m))$
$a \Rightarrow_{\bar{G}} \tau_0(\sigma)(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} \tau_0(\sigma)(\tau(p_1), \ldots, \tau(p_m))$

Egyrészt $a \to \tau_0(\sigma)(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}$, amiből kapjuk, hogy
$a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$.

Másrészt $a_i \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} \tau(p_i)$, tehát az indukció feltevés szerint $a_i \Rightarrow_{G}^{*} p_i$.

Összevetve, kapjuk, hogy $a \Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_G^{*} \sigma(p_1, \ldots, p_m)$. $\square$

LOKÁLIS FANYELVEK

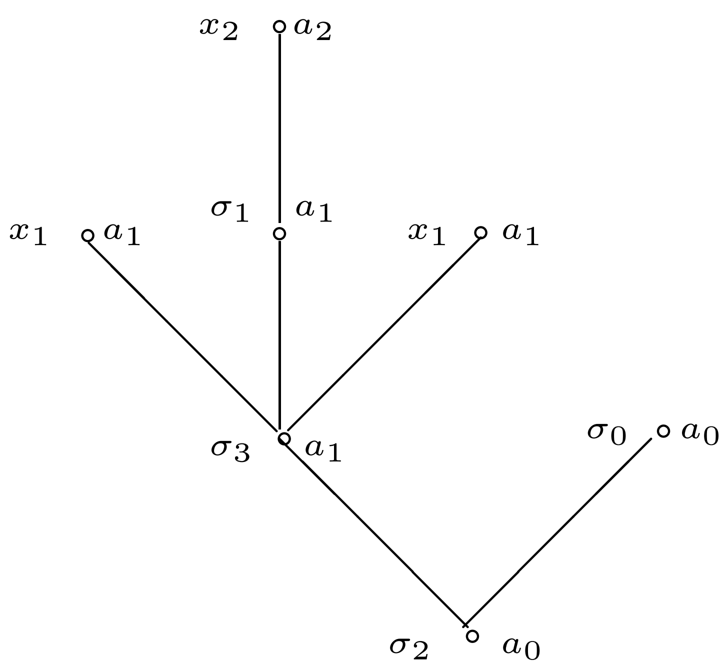
Tétel Bármely felismerhető fanyelv megkapható egy lokális fanyelv projekciójaként.

Példa Tekintsük a következő reguláris fanyelvtant:

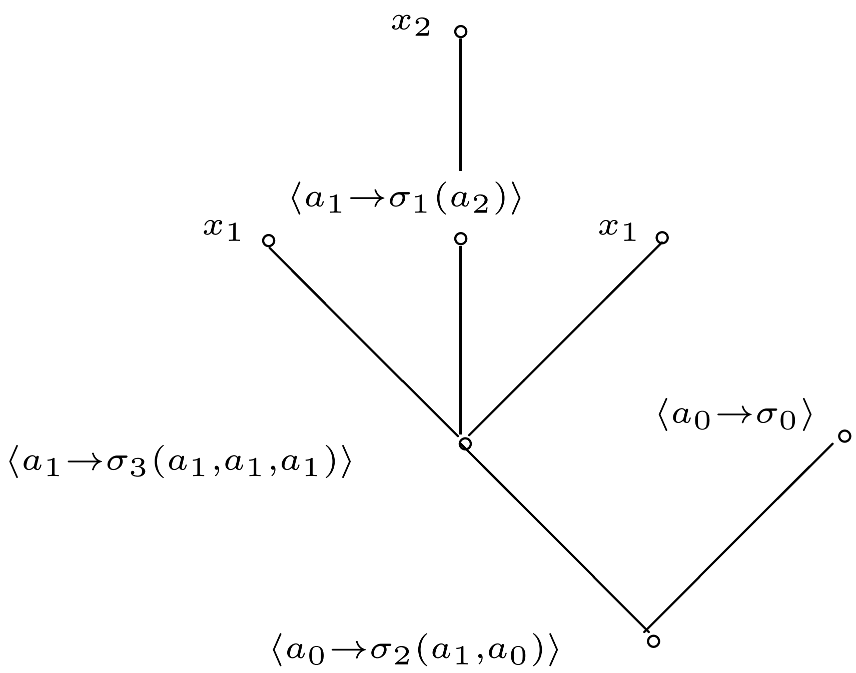
- $a_0 \to \sigma_2(a_1, a_0)$,
- $a_1 \to \sigma_3(a_1, a_1, a_1)$,
- $a_1 \to x_1$,
- $a_1 \to \sigma_1(a_2)$,
- $a_2 \to x_2$,
- $a_0 \to \sigma_0$

Ekkor $a_0 \Rightarrow \sigma_2(a_1, a_0) \Rightarrow \sigma_2(\sigma_3(a_1, a_1, a_1), a_0) \Rightarrow \sigma_2(\sigma_3(a_1, \sigma_1(a_2), a_1), a_0)$
$\Rightarrow^4 \sigma_2(\sigma_3(x_1, \sigma_1(x_2), x_1), \sigma_0)$

A levezetés és a levezetett fa



A szabályok lesznek szimbólumok



A jobb oldali fa projekciója a bal oldali fa.

Bizonyítás Legyen $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ na-ban adott reguláris fanyelvtan. Tfh. Σ minden szimbóluma szerepel legalább egy P-beli átírási szabályban.

Értelmezzük az Ω rangolt ábécét a következőképpen:

$$\Omega_0 = \{\langle a \to \sigma \rangle \mid a \to \sigma \in P,\ \sigma \in \Sigma_0\},$$
$$\Omega_m = \{\langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle \mid a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P,\ \sigma \in \Sigma_m\ m > 0\}$$

és legyen

$$\begin{aligned} F =& \{(\langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle, d_1 \ldots d_m) \mid a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P,\ m > 0, \\ & d_i = \langle a_i \to p_i \rangle, \text{ha } a_i \to p_i \in P \text{ és } p_i \notin X_n,\ \text{vagy} \\ & d_i = x, \text{ha } a_i \to x \in P\} \text{ és} \\ R =& \{\langle a_0 \to p \rangle \mid a_0 \to p \in P, p \notin X_n\} \bigcup \\ & \{x \mid a_0 \to x \in P,\ x \in X_n\} \end{aligned}$$

Tekintjük a $T(\Omega, X_n, R, F)$ lokális fanyelvet.

Meg fogunk adni egy $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekciót, amelyre $\tau(T(\Omega, X_n, R, F)) = T(G)$.

(a) Először megadunk egy $\bar{G} = (A, \Omega, X_n, \bar{P}, a_0)$ reguláris fanyelvtant, melyre $T(\bar{G}) = T(\Omega, X_n, R, F)$.

(ia) $a \to x_i \in \bar{P} \Leftrightarrow a \to x_i \in P$ $(x_i \in X_n)$,
(ib) $a \to \langle a \to \sigma \rangle \in \bar{P} \Leftrightarrow a \to \sigma \in P$ $(\sigma \in \Sigma_0)$,
(ii) $a \to \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \rangle (a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P} \Leftrightarrow a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$.

Megmutatjuk, hogy minden $a \in A$ és $q \in F_\Omega(X_n)$ esetén
$a \Rightarrow^*_{\bar{G}} q \Leftrightarrow (\mathrm{fork}(q) \subseteq F) \wedge \big((\mathrm{root}(q) = \langle a \to p \rangle) \vee (q = x_i \wedge a \to x_i \in P)\big)$

$\Rightarrow$ irány:
(i) $\mathrm{h}(q) = 0$
(ia) $q = x_i$ $(1 \leq i \leq n)$: $a \to x_i \in \bar{P} \Rightarrow a \to x_i \in P \wedge \mathrm{fork}(q) = \emptyset \subseteq F$
(ib) $q = \langle b \to \sigma \rangle$ $(\sigma \in \Sigma_0)$: $a \to \langle b \to \sigma \rangle \in \bar{P}$ és $b = a$. Így $\mathrm{root}(q) = \langle a \to \sigma \rangle$.

(ii) $\mathrm{h}(q) > 0$, $q = \omega(q_1, \ldots, q_m)$ $(\omega = \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle \in \Omega_m, m > 0)$:

$$
\begin{aligned}
a &\Rightarrow_{\bar{G}} \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle(a_1, \ldots, a_m) \\
&\Rightarrow^*_{\bar{G}} \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle(q_1, \ldots, q_m),
\end{aligned}
$$

Tehát $a \to \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}$ és $a_i \Rightarrow^*_{\bar{G}} q_i$. A $\bar{P}$ értelmezése szerint $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$.

Az ind. felt. szerint $\mathrm{fork}(q_i) \subseteq F$ és

$$
\mathrm{root}(q_i) = \begin{cases} \langle a_i \to p_i\rangle \text{ ahol } a_i \to p_i \in P, & \text{ha } q_i \notin X_n, \\ x \in X_n, & \text{ha } a_i \to x \in P. \end{cases}
$$

Tehát $(\langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle, \mathrm{root}(q_1) \ldots \mathrm{root}(q_m)) \in F$ és
$\underline{\mathrm{root}(q) = \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle}$

A $\mathrm{fork}(q)$ értelmezése szerint $\mathrm{fork}(q) \subseteq F$.

$\Leftarrow$ irány: az előző eljárás megfordításával.

(b) Most megadunk egy $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekciót, amelyre $\tau(T(\bar{G})) = T(G)$. Legyen

- $\tau_0(\langle a \to \sigma \rangle) = \sigma$, minden $\langle a \to \sigma \rangle \in \Omega_0$ esetén, és
- $\tau_0(\langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \rangle) = \sigma$, minden $\langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \rangle \in \Omega_m,\ m > 0$ esetén.

<u>A $\tau(T(\bar{G})) = T(G)$ bizonyítása.</u> Elegendő megmutatni, hogy

minden $a \in A$ és $q \in F_\Omega(X_n)$ esetén : $a \Rightarrow^*_{\bar{G}} q \Leftrightarrow a \Rightarrow^*_G \tau(q)$.

<u>$\Rightarrow$ irány:</u> h(q)-szerinti indukcióval

(i) $\mathrm{h}(q) = 0$:
(ia) $q = x_i : a \Rightarrow^*_{\bar{G}} q \Leftrightarrow a \to x_i \in \bar{P} \Leftrightarrow a \to x_i \in P \Leftrightarrow a \Rightarrow^*_G \tau(q)$,
(ib) $q = \langle b \to \sigma \rangle \in \Omega_0$:
$a \Rightarrow^*_{\bar{G}} q \Leftrightarrow b = a \wedge a \to \langle a \to \sigma \rangle \in \bar{P} \Leftrightarrow a \to \sigma \in P \Leftrightarrow a \Rightarrow^*_G \tau(q)$

(ii) h$(q) > 0$, $q = \omega(q_1, \ldots, q_m)$, ahol $\omega = \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle \in \Omega_m,\ m > 0:$

$$
\begin{aligned}
a &\Rightarrow_{\bar{G}} \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle(a_1, \ldots, a_m) \\
&\Rightarrow^*_{\bar{G}} \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle(q_1, \ldots, q_m) = q
\end{aligned}
$$

Tehát $a \to \langle a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m)\rangle(a_1, \ldots, a_m) \in \bar{P}$ és $a_i \Rightarrow^*_{\bar{G}} q_i$

A $\bar{P}$ definíciója szerint $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$.

Másrészt, az ind. feltevés szerint $a_i \Rightarrow^*_G \tau(q_i)$. Összevetve, kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
a &\Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \\
&\Rightarrow^*_G \sigma(\tau(q_1), \ldots, \tau(q_m)) = \tau_0(\omega)(\tau(q_1), \ldots, \tau(q_m)) = \tau(q)
\end{aligned}
$$

<u>$\Leftarrow$ irány:</u> hasonlóan $\square$

Példa Az előző tétel bizonyításában szereplő konstrukciókat szemléltetjük.

Legyen $\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}\}$ és legyen G az a ΣX_1-fanyelvtan, melynek szabályai a következők:

$$a_0 \to \sigma(a_0, a_1) \qquad a_0 \to \alpha \qquad a_1 \to \gamma(a_1) \qquad a_1 \to x_1$$

Ekkor $T(G) = \{\alpha, \sigma(\alpha, \gamma^n(x_1)), \sigma(\sigma(\alpha, \gamma^k(x_1)), \gamma^l(x_1)), \ldots\}$

Továbbá $\Omega_0 = \{\langle a_0 \to \alpha\rangle\}, \Omega_1 = \{\langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle\}, \Omega_2 = \{\langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle\}$,

$$\begin{aligned} F = \Big\{ &\big(\langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle, \langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle\langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle\big), \\ &\big(\langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle, \langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle x_1\big), \\ &\big(\langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle, \langle a_0 \to \alpha\rangle\langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle\big), \big(\langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle, \langle a_0 \to \alpha\rangle x_1\big), \\ &\big(\langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle, \langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle\big), \big(\langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle, x_1\big)\Big\} \text{ és} \end{aligned}$$

$$R = \big\{\langle a_0 \to \alpha\rangle, \langle a_0 \to \sigma(a_0, a_1)\rangle\big\}$$

Példa Az előző tétel bizonyításában szereplő konstrukciókat szemléltetjük.

A $\bar{G}$ nyelvtan szabályai:

$$\begin{array}{ll} a_0 \to \langle a_0 \to \sigma(a_0,a_1)\rangle(a_0,a_1) & a_0 \to \langle a_0 \to \alpha\rangle \\ a_1 \to \langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle(a_1) & a_1 \to x_1. \end{array}$$

A bizonyítás értelmében: $T(\bar{G}) = T(\Omega, X_1, R, F)$.

Továbbá, τ_0 definíciója:

$$\tau_0(\langle a_0 \to \sigma(a_0,a_1)\rangle) = \sigma,\ \tau_0(\langle a_0 \to \alpha\rangle) = \alpha,\ \tau_0(\langle a_1 \to \gamma(a_1)\rangle) = \gamma$$

Ugyancsak a bizonyítás értelmében $T(G) = \tau(T(\bar{G}))$, tehát $T(G) = \tau(T(\Omega, X_1, R, F))$, vagyis $T(G)$ a $T(\Omega, X_1, R, F)$ lokális erdő projekciója.

LOKÁLIS FANYELVEK

Egy kapcsolat a lokális fanyelvek és a felismerhető fanyelvek között:

Tétel. Egy fanyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha megadható egy lokális fanyelv projekciójaként.

Bizonyítás. Az egyik irány az előző tételből következik, a másik pedig abból, hogy minden lokális fanyelv felismerhető és a felismerhető erdők zártak a projekcióra.

Egy észrevétel.

Legyen $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ na-ban adott reguláris fanyelvtan, melyre teljesülnek az alábbi (*) tulajdonságok:

- tetszőleges $\sigma \in \Sigma_0$ esetén $|\{a \mid a \to \sigma \in P\}| \leq 1$.
- tetszőleges $a \in A$ és $\sigma \in \Sigma_m$ $(m > 0)$ esetén

$$|\{(a_1, \ldots, a_m) \mid a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P\}| \leq 1.$$

Konstruáljuk meg G-hez az $\mathbf{A} = (\mathcal{A}, a_0, \mathbf{a})$ felszálló faautomatát az ismert módon:
$\mathcal{A} = (A, \Sigma)$ egy nd felszálló algebra, melyre
- $\sigma \in \Sigma_0 : a \in \sigma^{\mathcal{A}} \Leftrightarrow a \to \sigma \in P$,
- $m > 0$, $\sigma \in \Sigma_m$ esetén: $(a_1, \ldots, a_m) \in \sigma^{\mathcal{A}}(a) \Leftrightarrow a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$.
- $a \in A^{(i)} \Leftrightarrow a \to x_i \in P$ $(1 \leq i \leq n)$

Ekkor $T(\mathbf{A}) = T(G)$ és a két feltétel miatt $\mathbf{A}$ determinisztikus.

LOKÁLIS FANYELVEK

Az előző tételben szereplő $\bar{G}$ nyelvtan $\bar{P}$ szabályai:

$a \to \langle a \to \sigma \rangle$ és

$a \to \langle a \to \omega(a_1, \ldots, a_m) \rangle (a_1, \ldots, a_m)$

alakúak. Tehát $\bar{G}$ nyelvtan is (*) tulajdonságú, ezért $T(\bar{G})$ felismerhető determinisztikus felszálló faautomatával. Az előző tétel bizonyításában láttuk, hogy $T(\bar{G})$ lokális is. Tehát érvényes a következő.

Következmény Bármely felismerhető fanyelv megadható egy lokális és determinisztikus fanyelv projekciójaként.

Tétel Egy fanyelv akkor és csak akkor felismerhető, ha megadható egy lokális és determinisztikus fanyelv projekciójaként.

Összefoglalás:

Tétel Teteszőleges $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ fanyelvre a következő három állítás ekvivalens:

(1) T felismerhető,

(2) létezik Ω rangolt ábécé, $T' \subseteq F_\Omega(X_n)$ lokális fanyelv és $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekció, melyekre $T = \tau(T')$,

(3) létezik Ω rangolt ábécé, $T' \subseteq F_\Omega(X_n)$ determinisztikus fanyelv és $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekció, melyekre $T = \tau(T')$.

(4) létezik Ω rangolt ábécé, $T' \subseteq F_\Omega(X_n)$ lokális és determinisztikus fanyelv és $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekció, melyekre $T = \tau(T')$.

Bizonyítás (1) $\Rightarrow$ (4) : előző tétel + az észrevétel; (4) $\Rightarrow$ (3) és (4) $\Rightarrow$ (2): triviális; (3) $\Rightarrow$ (1) és (2) $\Rightarrow$ (1): a felismerhető erdők zártak a projekcióra. $\square$

FAAUTOMATÁK ÉS KÖRNYEZETFÜGGETLEN NYELVEK

Környezetfüggetlen nyelvtan: $G = (A, X_n, P, a_0)$ rendszer, ahol

- A a *nemterminális szimbólumok* (X_n-nel diszjunkt) véges, nemüres halmaza,
- X_n a *terminális szimbólumok* véges halmaza,
- P az $a \to u$ alakú *átírási szabályok (produkciók)* véges halmaza, ahol $a \in A$ és $u \in (A \cup X_n)^*$,
- $a_0 (\in A)$ a *kezdőszimbólum*.

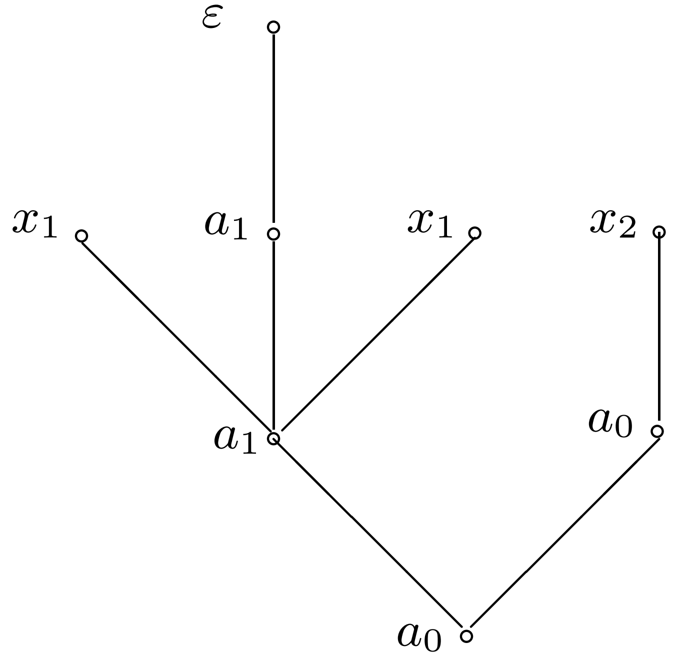
Az $u \Rightarrow_G v$ és $u \Rightarrow_G^* v$ relációkat a szokásos módon értelmezzük, ahol $u, v \in (A \cup X_n)^*$. A G indexet általában elhagyjuk a $\Rightarrow_G$ és $\Rightarrow_G^*$ jelölésekből.

A $G = (A, X_n, P, a_0)$ által *generált nyelv:* $L(G) = \{u \in X_n^* \mid a_0 \Rightarrow^* u\}$.

Példa

$G = (\{a_0, a_1\}, \{x_1, x_2\}, P, \{a_0\})$ egy kfüggetlen nyelvtan, ahol
$P = \{a_0 \overset{(1)}{\to} a_1a_0,\ a_0 \overset{(2)}{\to} x_2,\ a_1 \overset{(3)}{\to} x_1a_1x_1, a_1 \overset{(4)}{\to} \varepsilon\}$

$a_0 \overset{(1)}{\Rightarrow} a_1a_0 \overset{(3)}{\Rightarrow} x_1a_1x_1a_0 \overset{(4)}{\Rightarrow} x_1x_1a_0 \overset{(2)}{\Rightarrow} x_1x_1x_2$



G derivációs fája = terminális derivációnak megfelelő derivációs fa

Egy derivációs fa D részfájának $\mathrm{fr}(D)$ *határa* az az X_n^*-beli szó, amelyet a következő módon kapunk:
(i) Ha D-nek egyetlen csúcsa van és annak címkéje $x(\in X_n \bigcup\{\varepsilon\})$, akkor $\mathrm{fr}(D) = x$.
(ii) Ha D gyökere közvetlen leszármazottjainak részfái rendre $D_1, \ldots, D_k$, akkor $\mathrm{fr}(D) = \mathrm{fr}(D_1) \ldots \mathrm{fr}(D_k)$.

A D derivációs fa határán tehát azt a szót értjük, amelyet úgy kapunk, hogy D leveleinek címkéit balról jobbra haladva összeolvassuk.

<u>Ismétlés:</u> $p \in F_\Sigma(Z)$ fa $\bar{\mathrm{fr}}(p)$ *határa*:
(ia) ha $p = z \in Z$, akkor $\bar{\mathrm{fr}}(p) = z$,
(ib) ha $p = \sigma \in \Sigma_0$, akkor $\bar{\mathrm{fr}}(p) = \varepsilon$, ahol ε az üres szó,
(ii) ha $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ $(\sigma \in \Sigma_m,\ m > 0)$, akkor $\bar{\mathrm{fr}}(p) = \bar{\mathrm{fr}}(p_1) \ldots \bar{\mathrm{fr}}(p_m)$

A kettő nem ugyanaz!

Tétel Ha $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ felismerhető erdő, akkor $\bar{\text{fr}}(T)$ környezetfüggetlen nyelv.

Bizonyítás Legyen $T = T(G)$, ahol $G = (A, \Sigma, X_n, P, a_0)$ na-ban adott reguláris fanyelvtan.

Konstruáljuk meg a $\bar{G} = (A, X_n, \bar{P}, a_0)$ környezetfüggetlen nyelvtant, ahol $\bar{P} = \{a \to \bar{\text{fr}}(p) \mid a \to p \in P\}$.

Tehát, az $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m), a \to \alpha$ és $a \to x_i$ P-beli szabályok $a \to a_1 \ldots a_m, a \to \varepsilon$ és $a \to x_i$ alakban ”mennek át” $\bar{P}$-ba.

Megmutatjuk, hogy $\bar{\text{fr}}(T) = L(\bar{G})$.

$\bar{\text{fr}}(T) \subseteq L(\bar{G})$: Elegendő megmutatni, hogy minden $a \in A$ és $p \in F_\Sigma(X_n)$ esetén $a \Rightarrow_G^* p$-ből következik, hogy $a \Rightarrow_{\bar{G}}^* \bar{\text{fr}}(p)$

h(p)-szerinti indukció

(i) h$(p) = 0$:
$p \in \Sigma_0 \bigcup X_n$: $a \Rightarrow_G^* p \Longrightarrow a \to p \in P \Longrightarrow a \to \bar{\text{fr}}(p) \in \bar{P} \Longrightarrow a \Rightarrow_{\bar{G}}^* \bar{\text{fr}}(p)$.

(ii) h$(p) > 0$, $m > 0$, $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$, $(\sigma \in \Sigma_m)$:

$a \Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_G^* \sigma(p_1, \ldots, p_m)$

Egyrészt $a \to \sigma(a_1, \ldots, a_m) \in P$ másrészt $a_i \Rightarrow_G^* p_i$.

Akkor a $\bar{P}$ értelmezése szerint $a \to a_1 \ldots a_m \in \bar{P}$. Továbbá, az ind. feltevés szerint $a_i \Rightarrow_{\bar{G}}^* \bar{\text{fr}}(p_i)$.

Kapjuk, hogy $a \Rightarrow_{\bar{G}} a_1 \ldots a_m \Rightarrow_{\bar{G}}^* \bar{\text{fr}}(p_1) \ldots \bar{\text{fr}}(p_m) = \bar{\text{fr}}(p)$,

amiből $a = a_0$-t véve $\bar{\text{fr}}(T) \subseteq L(\bar{G})$ adódik.

$\underline{L(\bar{G}) \subseteq \bar{\mathrm{fr}}(T)}$:

Elegendő megmutatni: ha $a \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} u$ $(u \in X_n^*)$, akkor van olyan $p \in F_\Sigma(X_n)$, melyre $a \Rightarrow_{G}^{*} p$ és $\bar{\mathrm{fr}}(p) = u$

Bizonyítás az $a \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} u$ deriváció k hossza szerinti indukcióval.

(i) $k = 1$

(ia) $a \Rightarrow_{\bar{G}} \varepsilon$: $a \to \varepsilon \in \bar{P}$. Akkor van olyan $\sigma \in \Sigma_0$, melyre $a \to \sigma \in P$. Tehát $p = \sigma$ jó.

(ib) $a \Rightarrow_{\bar{G}} x_i$: $a \to x_i \in \bar{P}$, ezért $a \to x_i \in P$; így $p = x_i$ jó.

(ii) $k > 1$, vagyis $a \Rightarrow_{\bar{G}} a_1 \dots a_m \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} u_1 \dots u_m = u$

Egyrészt $a \to a_1 \dots a_m \in \bar{P}$, amiből a $\bar{P}$ értelmezése szerint $\exists \sigma : a \to \sigma(a_1, \dots, a_m) \in P$.

Másrészt $a_i \Rightarrow_{\bar{G}}^{*} u_i$, melyből az indukciós feltevés szerint $\exists p_i : a_i \Rightarrow_{G}^{*} p_i \wedge \bar{\mathrm{fr}}(p_i) = u_i$.

A kettőt egybevetve kapjuk, hogy a $p = \sigma(p_1, \ldots, p_m)$ fára
$a \Rightarrow_G \sigma(a_1, \ldots, a_m) \Rightarrow_G^* \sigma(p_1, \ldots, p_m) = p$ és
$\bar{\mathrm{fr}}(p) = \bar{\mathrm{fr}}(p_1) \ldots \bar{\mathrm{fr}}(p_m) = u_1 \ldots u_m = u.$

Így $a = a_0$-t véve $L(\bar{G}) \subseteq \bar{\mathrm{fr}}(T)$ adódik. $\square$

Példa. Legyen $\Sigma = \{\sigma^{(2)}, \gamma^{(1)}, \alpha^{(0)}\}$ és legyen G az a ΣX_1-fanyelvtan, melynek szabályai a következők:

$$a_0 \to \sigma(a_0, a_1) \quad a_0 \to \alpha \quad a_1 \to \gamma(a_1) \quad a_1 \to x_1$$

Ekkor $T(G) = \{\alpha, \sigma(\alpha, \gamma^n(x_1)), \sigma(\sigma(\alpha, \gamma^k(x_1)), \gamma^l(x_1)), \ldots\}$.

A $\bar{G}$ környezetfüggetlen nyelvtan szabályai: $a_0 \to a_0 a_1$, $a_0 \to \varepsilon$, $a_1 \to x_1$ (és $a_1 \to a_1$). A bizonyítás értelmében $L(\bar{G}) = \bar{\mathrm{fr}}(T(G))$, tehát $\bar{\mathrm{fr}}(T(G))$ környezetfüggetlen.

Definíció Az $\mathbf{A}$ ΣX_n-*faautomata által felismert nyelven* az

$$L(\mathbf{A}) = \bar{\mathrm{fr}}(T(\mathbf{A}))$$

nyelvet értjük.

Tehát $L(\mathbf{A}) \subseteq X_n^*$ és az előző tétel értelmében $L(\mathbf{A})$ környezetfüggetlen. Ezért a faautomatákkal felismerhető nyelvek környezetfüggetlenek. Megmutatjuk, hogy a fordítottja is érvényes.

Definíció Legyen $G = (A, X_n, P, a_0)$ egy környezetfüggetlen nyelvtan. Definiáljuk a Σ rangolt ábécét, ahol

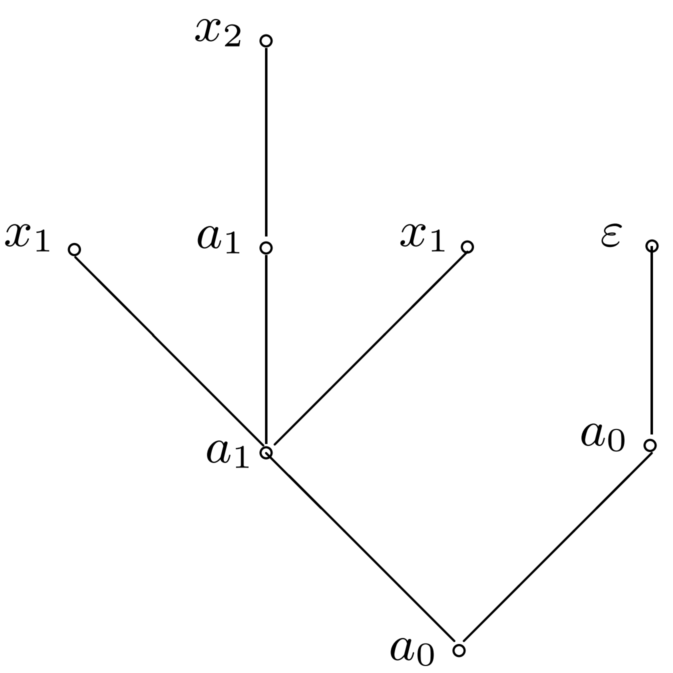
$$\Sigma_m = \{\langle a \to u\rangle \mid a \to u \in P,\ |u| = m\}$$

$(m = 0, 1, \ldots)$ és $|u|$ az u szó hossza.

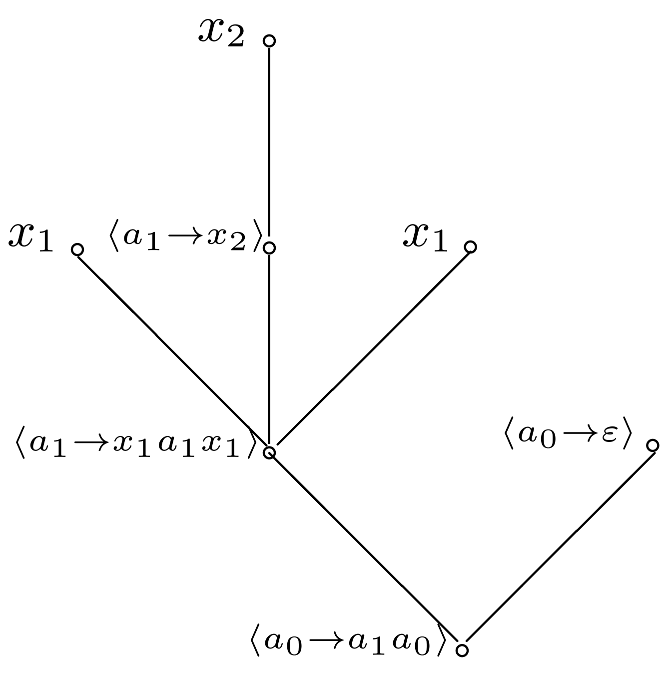
Minden $d \in A \bigcup X_n$ estén $P(G, d) \subseteq F_\Sigma(X_n)$ a legszűkebb olyan fanyelv, melyre teljesülnek:
(i) ha $d = x_i$, akkor $P(G, d) = \{x_i\}$,
(ii) ha $d \in A$ és $d \to d_1 \ldots d_m \in P$ (ahol $d_1, \ldots, d_m \in A \bigcup X_n$), akkor minden $p_i \in P(G, d_i)$ $(i = 1, \ldots, m)$ esetén $\langle d \to d_1 \ldots d_m\rangle(p_1, \ldots, p_m) \in P(G, d)$.

$P(G, a_0)$ a G *produkciós fáinak* halmaza.

Derivációs fa:



Produkciós fa:



Tétel Legyen G tetszőleges környezetfüggetlen nyelvtan. Akkor $P(G, a_0)$ lokális fanyelv, továbbá $L(G) = \{\bar{\mathrm{fr}}(t) \mid t \in P(G, a_0)\}$.

Bizonyítás $P(G, a_0)$ lokális, mivel $P(G, a_0) = T(\Sigma, X_n, R, F)$, ahol Σ az előbbi rangolt ábécé,

$$R = \{\langle a_0 \to u\rangle | a_0 \to u \in P\},$$

F pedig az összes $(\langle a \to d_1 \dots d_m\rangle, c_1 \dots c_m)$ alakú elágazások halmaza, ahol $m > 0$, $a \to d_1 \dots d_m \in P$ $(d_1, \dots, d_m \in A \cup X_n)$ és tetszőleges $i(= 1, \dots, m)$ esetén

$$c_i = \begin{cases} d_i, & \text{ha } d_i \in X_n, \\ \langle d_i \to u_i\rangle, & \text{ha } d_i \in A \text{ és } d_i \to u_i \in P. \end{cases}$$

Az $L(G) = \{\bar{\mathrm{fr}}(t) \mid t \in P(G, a_0)\}$ egyenlőség nyilvánvaló. $\square$

Összefoglalva:

Tétel Egy nyelv akkor és csakis akkor környezetfüggetlen, ha felismerhető faautomatával.

Bizonyítás Mint már igazoltuk, a faautomatákkal felismerhető nyelvek kfüggetlenek.

Fordítva, minden G kfüggetlen nyelvtan esetén $P(G, a_0)$ felismerhető, mivel lokális. Továbbá,

$$L(G) = \{\bar{\mathrm{fr}}(t) \mid t \in P(G, a_0)\}.$$

Tehát $L(G)$ egy felismerhető erdő határa, vagyis felismerhető faautomatával.

$\square$

Észrevétel Tetszőleges $T \subseteq F_\Omega(X_n)$ erdő, $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekció esetén minden $p \in F_\Omega(X_n)$ fára $\bar{\text{fr}}(p) = \bar{\text{fr}}(\tau(p))$ (a projekció megőrzi a fák $\bar{\text{fr}}$ határát). Ezért

$$\bar{\text{fr}}(T) = \{\bar{\text{fr}}(p) \mid p \in T\} = \{\bar{\text{fr}}(\tau(p)) \mid p \in T\} =$$
$$\{\bar{\text{fr}}(p') \mid p' \in \tau(T)\} = \bar{\text{fr}}(\tau(T)).$$

1. Következmény Egy nyelv akkor és csakis akkor környezetfüggetlen, ha felismerhető determinisztikus felszálló faautomatával.

Bizonyítás Az egyik irány nyilvánvaló. Fordítva, legyen $L \subseteq X_n^*$ környezetfüggetlen nyelv. Az előző tétel értelmében van olyan Σ rangolt ábécé és $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ felismerhető erdő, melyre $L = \bar{\text{fr}}(T)$. Egy korábbi tétel miatt van olyan Ω rangolt ábécé, $T' \subseteq F_\Omega(X_n)$ determinisztikus erdő és $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekció, melyre $\tau(T') = T$. Ezért

$$\bar{\text{fr}}(T') = \bar{\text{fr}}(\tau(T')) = \bar{\text{fr}}(T) = L.$$

$\square$

2. Következmény Egy L nyelv akkor és csakis akkor környezetfüggetlen, ha van olyan lokális és determinisztikus T' erdő, melyre $L = \bar{\mathrm{fr}}(T')$.

Bizonyítás Az egyik irány nyilvánvaló. Fordítva, legyen $L \subseteq X_n^*$ környezetfüggetlen nyelv. Az előző tétel értelmében van olyan Σ rangolt ábécé és $T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ felismerhető erdő, melyre $L = \bar{\mathrm{fr}}(T)$. Egy korábbi tétel miatt van olyan Ω rangolt ábécé, $T' \subseteq F_\Omega(X_n)$ lokális és determinisztikus erdő és $\tau_0 : \Omega \to \Sigma$ projekció, melyre $\tau(T') = T$. Ezért

$$\bar{\mathrm{fr}}(T') = \bar{\mathrm{fr}}(\tau(T')) = \bar{\mathrm{fr}}(T) = L.$$

$\square$

FAAUTOMATÁK ÉS KÖRNYEZETFÜGGETLEN NYELVEK.

A környezetfüggetlen nyelvek egy Kleene-szerű jellemzése.

Legyenek $L_1, L_2 \subseteq X_n^*$ és $x_i \in X_n$.

L_1 és L_2 x_i-*szorzata*:

$$\begin{aligned} L_1 \cdot_{x_i} L_2 = &\{v_1 u_1 v_2 \dots v_{m-1} u_{m-1} v_m \mid v_1 x_i v_2 \dots v_{m-1} x_i v_m \in L_2, \\ &x_i \text{ nem szerepel } v_j\text{-ben } (j = 1, \dots, m), u_1, \dots, u_{m-1} \in L_1\} \end{aligned}$$

$L \subseteq X_n^*$ nyelv x_i-*iteráltja*:

(i) $L^{0,x_i} = \{x_i\}$
(ii) $L^{j,x_i} = L^{j-1,x_i} \bigcup (L^{j-1,x_i} \cdot_{x_i} L), j = 1, 2, \dots$.

Végül $L^{*x_i} = \bigcup (L^{j,x_i} \mid j = 0, 1, \dots)$.

Állítás tetszőleges $T_1, T_2, T \subseteq F_\Sigma(X_n)$ esetén

1) $\bar{\mathrm{fr}}(T_1 \bigcup T_2) = \bar{\mathrm{fr}}(T_1) \bigcup \bar{\mathrm{fr}}(T_2)$,
2) $\bar{\mathrm{fr}}(T_1 \cdot_{x_i} T_2) = \bar{\mathrm{fr}}(T_1) \cdot_{x_i} \bar{\mathrm{fr}}(T_2)$,
3) $\bar{\mathrm{fr}}(T^{*x_i}) = \bar{\mathrm{fr}}(T)^{*x_i}$.

3) abból következik, hogy $\bar{\mathrm{fr}}(T^{j,x_i}) = \bar{\mathrm{fr}}(T)^{j,x_i}$ $(j = 0, 1, \ldots)$ és 1) végtelen egyesítésre is igaz.

Tétel Egy L nyelv akkor és csakis akkor környezetfüggetlen, ha megadható véges nyelvekből az egyesítés, az x_i-szorzás és az x_i-iteráció véges sokszor való alkalmazásával. (Vö.: Kleene tétel második alakja.)

Bizonyítás Tfh. az L nyelv megadható a tétel szerint.

Tekintsük a $\Sigma = \Sigma_0 \bigcup \Sigma_2$ ábécét, ahol $\Sigma_2 = \{\sigma\}$ és $\Sigma_0 = \{\alpha\}$.

Tetszőleges $\bar{L} \subseteq X_n^*$ véges nyelvhez van olyan $\bar{T} \subseteq F_\Sigma(X_n)$ véges erdő, hogy $\bar{L} = \bar{\text{fr}}(\bar{T})$.

Például, legyen $\bar{L} = \{x_1, x_2x_1x_2, \varepsilon\}$. Akkor
$\bar{T} = \{\sigma(\alpha, x_1), \sigma(x_2, \sigma(x_1, x_2)), \alpha\}$-ra
$\bar{\text{fr}}(\bar{T}) = \{\bar{\text{fr}}(\sigma(\alpha, x_1)), \bar{\text{fr}}(\sigma(x_2, \sigma(x_1, x_2))), \bar{\text{fr}}(\alpha)\} = \{x_1, x_2x_1x_2, \varepsilon\} = \bar{L}$.

L-nek a véges $\bar{L}$ nyelvekből való felépítésének megfelelően építsünk fel a véges $\bar{T}$ erdőkből egy T erdőt.

Ekkor T megkapható véges erdőkből a reguláris műveletek véges sokszori alkalmazásával, tehát felismerhető. Másrészt, az Állítás szerint $L = \bar{\mathrm{fr}}(T)$.

Tehát L környezetfüggetlen.

Fordítva, legyen L környezetfüggetlen nyelv. Van olyan T felismerhető erdő, hogy $L = \bar{\mathrm{fr}}(T)$.
T megadható (a Kleene tétel szerint) véges erdőkből az egyesítés, az x_i-szorzás és az x_i-iteráció véges sokszor való alkalmazásával. Így az Állítás szerint L megadható véges nyelvekből (ti. a véges erdők határaiból) az egyesítés, az x_i-szorzás és az x_i-iteráció véges sokszor való alkalmazásával.

$\square$

Appendix

Tétel Legyen φ az $\mathbf{A}$ ΣX_n-automatának a $\mathbf{B}$ ΣX_n-automatára való homomorf leképezése. Úgy tetszőleges két $a, b \in A$ állapotra teljesül az $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}}) \Leftrightarrow \varphi(a) \equiv \varphi(b)(\rho_{\mathbf{B}})$ ekvivalencia.

Bizonyítás Tfh $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$.
Legyen $p \in F_{\Sigma}(X_k)$, $1 \leq i \leq k$, $b_1, \ldots, b_{i-1}, b_{i+1}, \ldots, b_k \in B$ tetszőleges és vegyük a $p(b_1, \ldots, b_{i-1}, x_1, b_{i+1}, \ldots, b_k) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{B})$ algebrai függvényt.
Legyenek $a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_k \in A$ olyanok, hogy $\varphi(a_j) = b_j$.

Mivel $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}}) \wedge p(a_1, \ldots, x_1, \ldots, a_k) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$, kapjuk, hogy
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A' \iff$
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A'$.

Mivel φ homomorfizmus és $\varphi(a_j) = b_j$:

$\underline{p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A'} \Leftrightarrow$

$\varphi(p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k)) \in B' \Leftrightarrow$

$p(b_1, \ldots, b_{i-1}, \varphi(a), b_{i+1}, \ldots, b_k) \in B'$

és

$\underline{p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A'} \Leftrightarrow$

$\varphi(p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k)) \in B' \Leftrightarrow$

$p(b_1, \ldots, b_{i-1}, \varphi(b), b_{i+1}, \ldots, b_k) \in B'$

Mindez együtt azt jelenti, hogy

$p(b_1, \ldots, b_{i-1}, \varphi(a), b_{i+1}, \ldots, b_k) \in B' \Leftrightarrow$
$p(b_1, \ldots, b_{i-1}, \varphi(b), b_{i+1}, \ldots, b_k) \in B'$,

vagyis $\varphi(a) \equiv \varphi(b)(\rho_{\mathbf{B}})$.

Fordítva, tegyük fel, hogy $a \not\equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$. Akkor vagy olyan
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_1, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$, hogy
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A' \Leftrightarrow$
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k) \notin A'$
Mivel φ homomorfizmus:
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k) \in A' \Leftrightarrow$
$\varphi(p(a_1, \ldots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \ldots, a_k)) \in B' \Leftrightarrow$
$p(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{i-1}), \varphi(a), \varphi(a_{i+1}), \ldots, \varphi(a_k)) \in B'$ és
$p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k) \notin A' \Leftrightarrow$
$\varphi(p(a_1, \ldots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \ldots, a_k)) \notin B' \Leftrightarrow$
$p(\varphi(a_1), \ldots, \varphi(a_{i-1}), \varphi(b), \varphi(a_{i+1}), \ldots, \varphi(a_k)) \notin B'$

A $\rho_{\mathbf{A}}$ definíciójából és a $p(\varphi(a_1), \ldots x_1, \ldots, \varphi(a_k)) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{B})$ feltételből kapjuk, hogy $\varphi(a) \not\equiv \varphi(b)(\rho_{\mathbf{B}})$ $\square$

A $\rho_{\mathbf{A}} = \rho_k$ bizonyításának előkészítése.

Definíció $\mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A}) = \{p \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A}) \mid x_1$ legfeljebb egyszer szerepel p-ben$\}$

Állítás Ha $p \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A})$ és x_1 szerepel p-ben, akkor van olyan $p_1, \ldots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A})$), hogy

$$p(a) = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \quad (a \in A),$$

ahol $j = 0$ esetén $p_1 \cdot \ldots \cdot p_j = x_1$. $\square$

A $\rho_{\mathbf{A}} = \rho_k$ bizonyításának előkészítése.

Tétel $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$ akkor és csak akkor, ha
$((\forall p \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A}))(p(a) \in A' \Leftrightarrow p(b) \in A')$.

Bizonyítás $\Longrightarrow$ nyilvánvaló

$\Longleftarrow$ Tfh a, b: $(\forall p \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A}))(p(a) \in A' \Leftrightarrow p(b) \in A')$

Megmutatjuk, hogy $(\forall q \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A}))(q(a) \in A' \Leftrightarrow q(b) \in A')$,
ami definíció szerint azt jelenti, hogy $a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$.

Legyen evégett

$q(\ldots, x_1, \ldots, x_1, \ldots, \ldots, x_1, \ldots, x_1, \ldots) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$ tetszőleges ...

<u>A $\rho_{\mathbf{A}} = \rho_k$ bizonyításának előkészítése.</u>

Megmutatjuk, hogy $(\forall q \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A}))(q(a) \in A' \Leftrightarrow q(b) \in A')$.

Legyen evégett

$q(\ldots, x_1, \ldots, x_1, \ldots, \ldots, x_1, \ldots, x_1, \ldots) \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A})$ tetszőleges. Akkor

$$\underline{q(\ldots, a, \ldots, a, \ldots, \ldots, a, \ldots, a \ldots) \in A'}$$

$$\Updownarrow q(\ldots, x_1, \ldots, a, \ldots, \ldots, a, \ldots, a, \ldots) \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A})$$

$$q(\ldots, b, \ldots, a, \ldots, \ldots, a, \ldots, a, \ldots) \in A'$$

$$\Updownarrow q(\ldots, b, \ldots, x_1, \ldots, \ldots, a, \ldots, a, \ldots) \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A})$$

$$q(\ldots, b, \ldots, b, \ldots, \ldots, a, \ldots, a, \ldots) \in A'$$

$$\Updownarrow \quad \vdots$$

$$q(\ldots, b, \ldots, b, \ldots, \ldots, b, \ldots, a, \ldots) \in A'$$

$$\Updownarrow q(\ldots, b, \ldots, b, \ldots, \ldots, b, \ldots, x_1, \ldots) \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A})$$

$$\underline{q(\ldots, b, \ldots, b, \ldots, \ldots, b, \ldots, b, \ldots) \in A'} \qquad \square$$

FAAUTOMATÁK MINIMALIZÁLÁSA

A $\rho_{\mathbf{A}} = \rho_k$ bizonyítása.

Először azt mutatjuk meg, hogy (a fenti k-ra) $\rho_k = \rho_{k+l}$ $(l = 0, 1, \ldots)$

Elegendő igazolni, hogy $(\rho_k = \rho_{k+1}) \Rightarrow (\rho_{k+1} = \rho_{k+2})$

Tfh $\underline{a \equiv b(\rho_{k+1})}$

$\Rightarrow$ def: $(\forall p \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))(p(a) \equiv p(b)(\rho_k))$

$\Rightarrow \rho_k = \rho_{k+1}$: $(\forall p \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))(p(a) \equiv p(b)(\rho_{k+1}))$

$\Rightarrow$ def: $\underline{a \equiv b(\rho_{k+2})}$

Állítás Ha $a \equiv b(\rho_{i+j})$ $(i, j = 0, 1, \ldots)$, akkor tetszőleges $p_1, \ldots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))$ esetén

$$(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \equiv (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)(\rho_i).$$

Bizonyítás j-szerinti indukcióval

(i) $j = 0$ nyilvánvaló

(ii) $j - 1 \Rightarrow j$:

$a \equiv b(\rho_{i+j})$

$\Rightarrow$ def: $p_1(a) \equiv p_1(b)(\rho_{i+j-1})$

$\Rightarrow$ ind. felt.: $\underbrace{(p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)(p_1(a))}_{=\,(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a)} \equiv \underbrace{(p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)(p_1(b))}_{=\,(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)}(\rho_i)$ $\square$

Következmény $\rho_k \subseteq \rho_{\mathbf{A}}$.

Bizonyítás Tfh $a \equiv b(\rho_k)$ és $p \in \mathrm{Alg}_{1,1}(\mathcal{A})$ tetszőleges
Feltehető, hogy x_1 előfordul p-ben, ekkor $\exists p_1, \ldots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))$:

$$p(c) = (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(c) \; (c \in A).$$

$\underline{a \equiv b(\rho_k)}$

$\Rightarrow \rho_k = \rho_{k+j}$: $a \equiv b(\rho_{k+j})$

$\Rightarrow$ Áll.: $(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \equiv (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)(\rho_k)$

$\Rightarrow \rho_k \leq \rho_0$: $(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \equiv (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)(\rho_0)$

$\Rightarrow$ def.: $\underbrace{(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a)}_{= p(a)} \in A' \Leftrightarrow \underbrace{(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)}_{= p(b)} \in A'$

$\Rightarrow p(a) \in A' \Leftrightarrow p(b) \in A'$

$\Rightarrow \underline{a \equiv b(\rho_{\mathbf{A}})}$ $\square$

Állítás Ha $a \not\equiv b(\rho_i)$ akkor van olyan $p_1, \dots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))$, hogy

$$(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \not\equiv (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)(\rho_0).$$

Bizonyítás i-szerinti indukcióval

(i) $i = 0$: x_1 $(j = 0)$ jó

(ii) $i - 1 \Rightarrow i$: $a \not\equiv b(\rho_i)$
(iia) ha $a \not\equiv b(\rho_{i-1})$, akkor az ind. felt. szerint van megfelelő $p_1, \dots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))$
(iib) ha $a \equiv b(\rho_{i-1})$, akkor a def. szerint van $p_1 \in \mathrm{ET}(\mathcal{A})$:
$p_1(a) \not\equiv p_1(b)(\rho_{i-1})$

$\Rightarrow$ ind. felt. $\exists p_2, \dots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))$:

$$\begin{array}{ccc} (p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)(p_1(a)) & \not\equiv & (p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)(p_1(b))(\rho_0) \\ = & & = \\ (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) & & (p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_j)(b) \end{array}$$

$\square$

Következmény $\rho_{\mathbf{A}} \subseteq \rho_k$.

Bizonyítás

Tfh $a \not\equiv b(\rho_k)$

$\Downarrow$ Áll. $\exists p_1, \ldots, p_j \in \mathrm{ET}(\mathcal{A}))$

$(p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \not\equiv (p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b)(\rho_0)$

$\Downarrow$ def.

$((p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(a) \in A') \Leftrightarrow ((p_1 \cdot \ldots \cdot p_j)(b) \notin A')$

$\Downarrow p_1 \cdot \ldots \cdot p_j \in \mathrm{Alg}_1(\mathcal{A}))$

$a \not\equiv b(\rho_{\mathbf{A}})$ $\square$

Tétel $\rho_{\mathbf{A}} = \rho_k$. $\square$