

A SAT változatai

Logika előadáson láttuk, hogy a **HORNSAT** probléma P-beli: Adott egy φ Horn-formula (olyan KNF, ahol minden klóz legfeljebb egy pozitív literált tartalmaz); kielégíthető-e φ ?

Most megmutatjuk, hogy bár 2SAT és HORNSAT P-beli, a következő probléma (nevezzük **2-3SAT**-nak) **NP-teljes**: adott egy φ KNF, ahol minden klóz pontosan kettő literált vagy pontosan három negatív literált tartalmaz; kielégíthető-e φ ?

Ehhez megmutatjuk, hogy $3SAT \leq_p 2-3SAT$:

- Legyen $\varphi \mapsto \varphi'$ a következő leképezés: φ minden C klózára
 - ha C olyan, hogy három negatív literált tartalmaz, akkor vegyük fel C -t φ' -be is
 - Egyébként legyen C' az a klóz, amit úgy kapunk C -ből, hogy benne minden x változót (azaz pozitív literált) kicserélünk $\neg \hat{x}$ -re, ahol \hat{x} egy új, még nem használt változó, és felvesszük φ' -be C' -t és az $x \vee \hat{x}$ és $\neg x \vee \neg \hat{x}$ klózokat
- A $\varphi \mapsto \varphi'$ leképezése **polinom időben kiszámítható** és **választartó** is,
 - hiszen $(x \vee \hat{x}) \wedge (\neg x \vee \neg \hat{x}) \equiv (x \rightarrow \neg \hat{x})$, tehát \hat{x} -nek mindig x -el ellentétes igazságértéket kell felvennie egy φ' -t kielégítő értékadásban

Gráfokkal kapcsolatos NP-teljes problémák

Legyen adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $K \leq |V|$

- **FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ**

- Kérdés: Van-e G -ben K darab olyan csúcs, melyek egyikéből sincs a másikba vezető él?

- **CSÚCSLEFEDÉS**

- Kérdés: Van-e G -ben K darab olyan csúcs, hogy G minden élének egyik végpontja ezen csúcsok valamelyikére esik?

A fenti problémák mindegyike NP-teljes

Bizonyítás

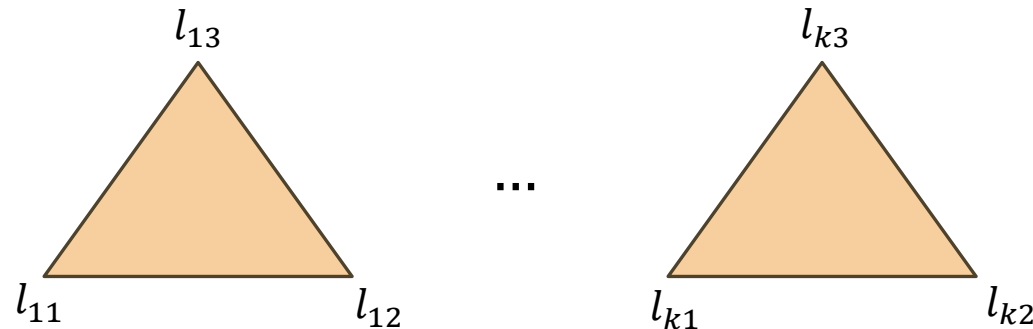
Mindkét probléma polinomidőben verifikálható, azaz NP-beli: Megadható olyan M nemdet. Turing-gép, ami egy $\langle G, K \rangle$ bemenetre nemdeterminisztikusan felsorolja G K darab csúcsát és polinom időben leellenőrzi, hogy ezek rendelkeznek-e a kérdéses tulajdonsággal

További NP-teljes problémák

Bizonyítás (folyt.)

FÜGGETLEN CSÚCSHALMAZ (FCS) NP-nehéz

- Megmutatjuk, hogy $3SAT \leq_p FCS$
- Legyen $\varphi = (l_{11} \vee l_{12} \vee l_{13}) \wedge \cdots \wedge (l_{k1} \vee l_{k2} \vee l_{k3})$
- Konstruáljuk meg G_φ -t:



- Továbbá, l_{ij} és l_{mn} között pontosan akkor van él ha ezek egymás komplementerei
- Végül legyen $K = k$
- Belátható, hogy a konstrukció polinom időben elvégezhető
- Megmutatjuk, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow G_\varphi$ -ben van K csúcsú független csúcshalmaz

További NP-teljes problémák

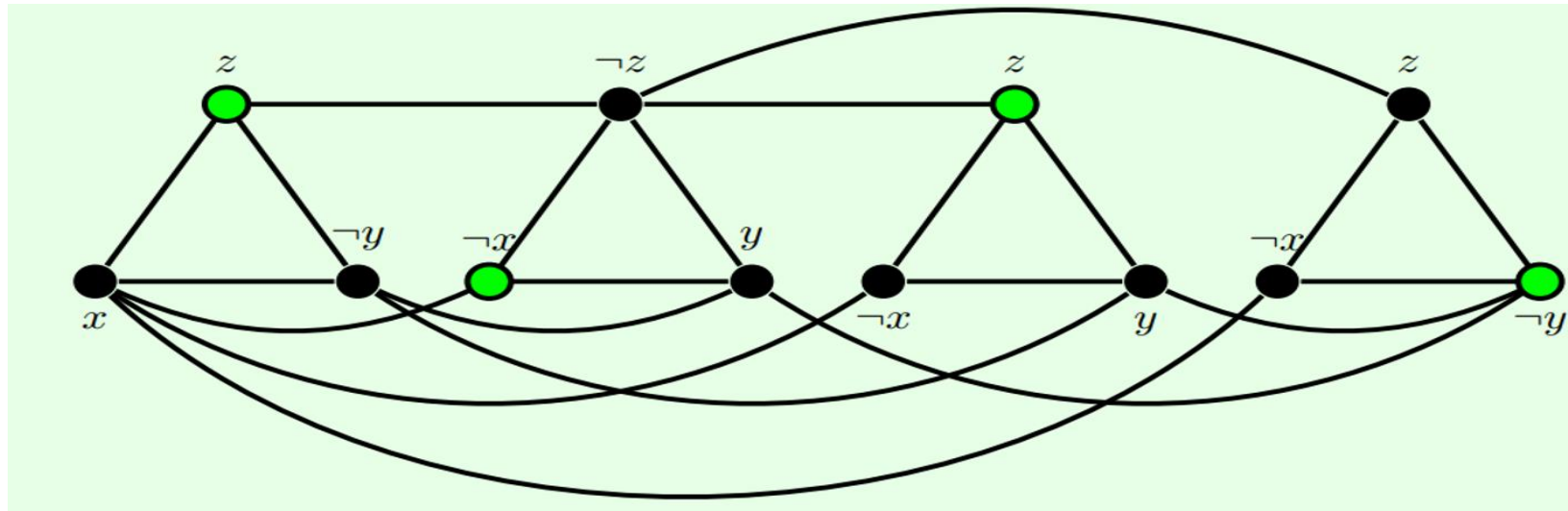
Bizonyítás (folyt.)

φ kielégíthető \Leftrightarrow

van olyan A értékadás, ami kielégíti minden klóz legalább egy literálját \Leftrightarrow
ezen literálokkal címkézett literálok páronként nem szomszédosak G_φ -ben \Leftrightarrow

G_φ -ben van k csúcsú független csúcshalmaz

Legyen $\varphi = (x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg x \vee y \vee \neg z) \wedge (\neg x \vee y \vee z) \wedge (\neg x \vee \neg y \vee z)$. Ekkor a G_φ gárf:



A zölddel jelölt csúcsok egy négyelemű független csúcshalmazt alkotnak

További NP-teljes problémák

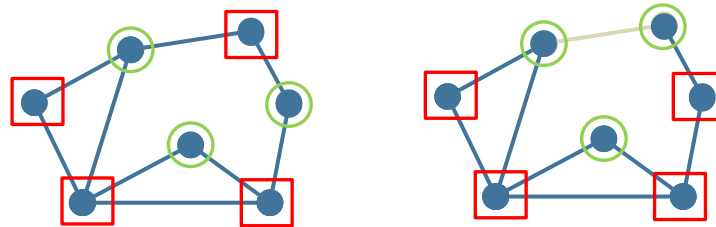
Bizonyítás (folyt.)

CSÚCSLEFEDÉS (CSL) NP-nehéz

Megmutatjuk, hogy $FCS \leq_p CSL$

- Legyen $G = (V, E)$ és $K \leq |V|$
- Vegyük észre, hogy

G -ben van K csúcsú független csúcshalmaz $\Leftrightarrow G$ -ben van $|V| - K$ csúcsú csúcslefedés



A bekarikázott csúcsok független csúcshalmazt alkotnak \Leftrightarrow
A bekeretezett csúcsok csúcslefedést alkotnak

Ha valami nehéz, akkor az általánosítása is az

Egy A probléma a B probléma általánosítása (vagy B az A speciális esete), ha a B megkapható A -ból úgy, hogy A bemeneteit megszorítjuk

Vegyük például az **ÁLT-SAT** problémát, ami a SAT általánosítása:

Adott egy φ ítéletkalkulusbeli formula; vajon kielégíthető-e?

Ez a probléma szintén **NP-teljes**: **NP-beli**, amit hasonlóan lehet belátni, mint a SAT NP-beliségét; az pedig, hogy **NP-nehéz** triviális: bármit, amit a SAT-ra vissza lehet vezetni polinom időben, az ÁLT-SAT-ra is vissza lehet (ugyanaz a konstrukció jó lesz)

Ez általában is igaz: egy **NP-nehéz probléma általánosítása szintén NP-nehéz**

HITTING SET

Adott egy U halmaz, $T = \{s_1, \dots, s_n\}$, ahol $s_1, \dots, s_n \subseteq U$, és egy K szám

Kérdés: Van-e olyan K elemű $H \subseteq U$ halmaz (a hitting set) ami tartalmaz minden T -beli halmazból legalább egy elemet?

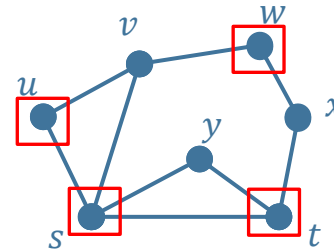
HITTING SET

HITTING SET NP-teljes

Egyrészt **NP-beli**, mert polinom időben verifikálható

Másrész a **HITTING SET probléma a CSÚCSLEFEDÉS általánosítása**: ha a HITTING SET bemenetként csak olyan T -ket engedünk meg, amiben csak kételemű halmazok szerepelhetnek, akkor a CSÚCSLEFEDÉS problémát kapjuk

Vegyünk például a következő gráfot:



Ebben négy elemű független csúcshalmazt keresni ugyanaz, mint az élek halmazában (ami most a T) keresni egy négy elemű „hitting set”-et:

- $T = \{\{u, v\}, \{u, s\}, \{v, w\}, \{s, v\}, \{w, x\}, \{x, t\}, \{s, y\}, \{y, t\}, \{s, t\}\}$
- Egy négy elemű **hitting set** T -ben: $H = \{u, s, t, w\}$

HAMILTON ÚT

HAMILTON ÚT (HÚ): Adott egy $G = (V, E)$ irányított gráf és $s, t \in V$

Kérdés: Van-e G -ben s -ből t -be Hamilton út (azaz minden csúcsot pontosan egyszer érintő út)?

HÚ NP-teljes

Bizonyítás

Láttuk, hogy HÚ **polinom időben verifikálható**

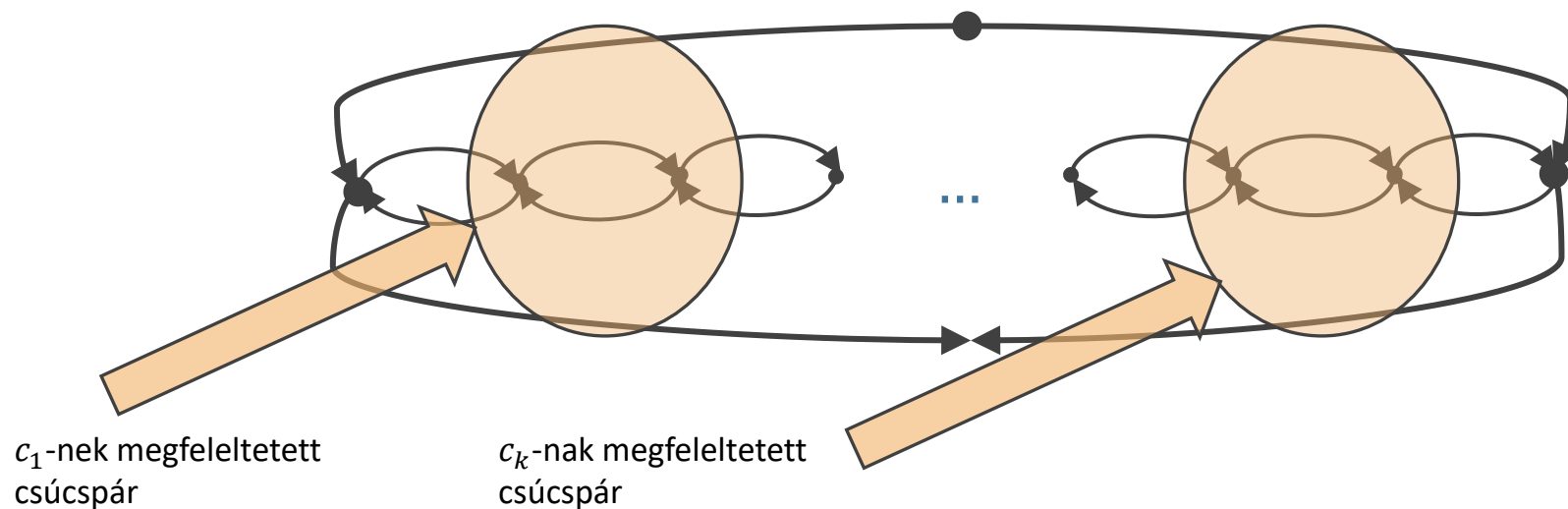
Megmutatjuk, hogy **$SAT \leq_p HÚ$**

- Legyen $\varphi = c_1 \wedge \dots \wedge c_k$ egy tetszőleges KNF-ben adott formula
- Tegyük fel, hogy a φ -ben használt változók: p_1, p_2, \dots, p_l

HAMILTON ÚT

Bizonyítás

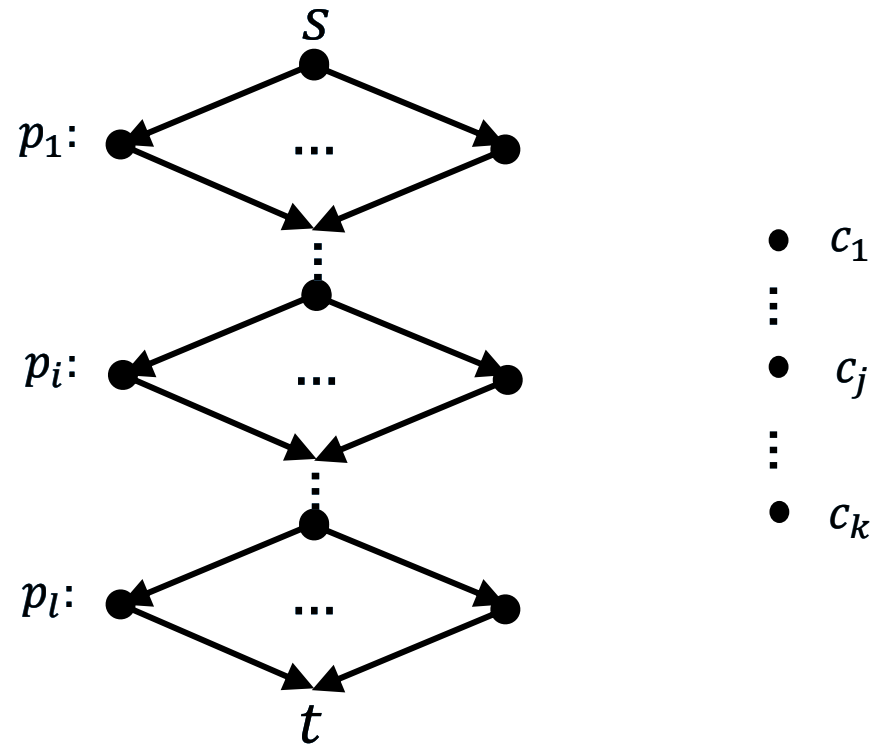
Minden p_i változóhoz konstruáljuk meg egy alábbi **részgráfot**:



HAMILTON ÚT

Bizonyítás (folyt.)

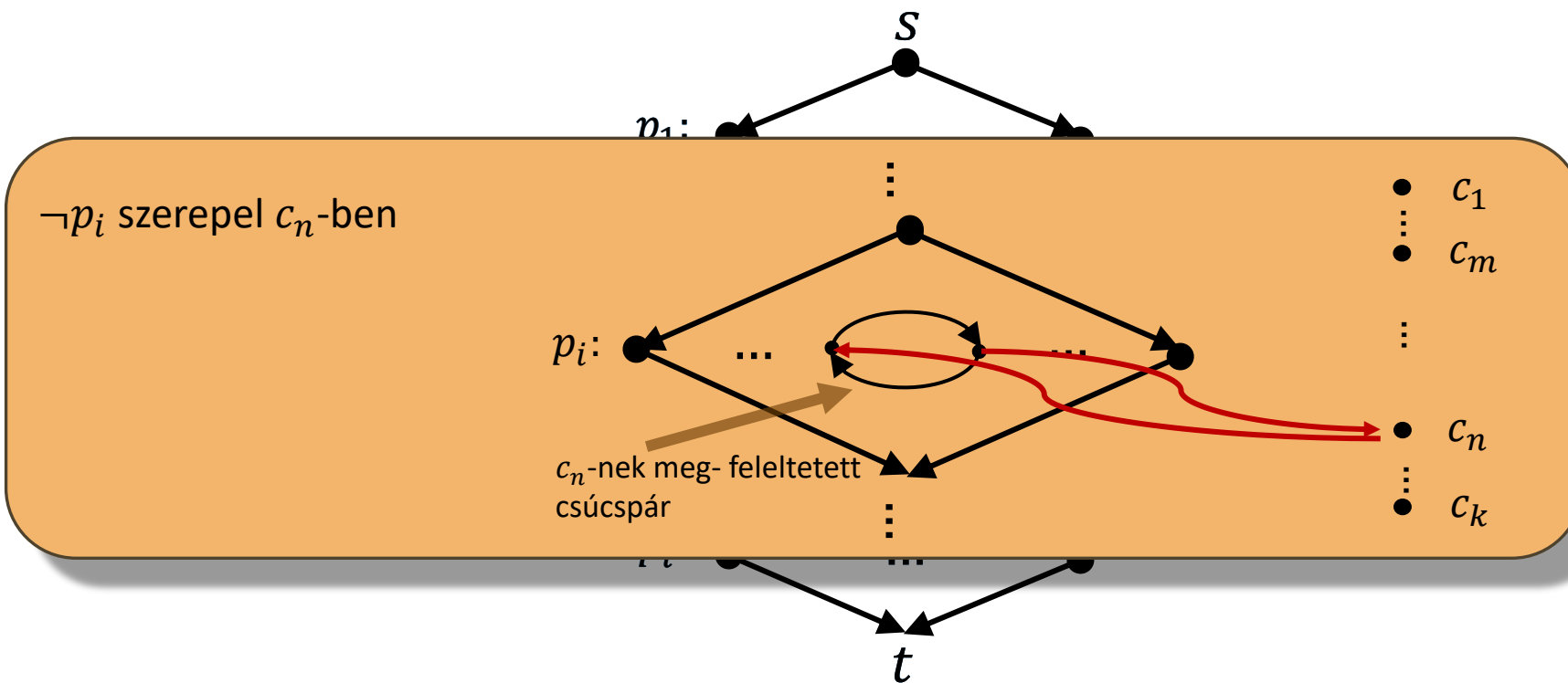
Legyen G_φ az alábbi gráf:



HAMILTON ÚT

Bizonyítás (folyt.)

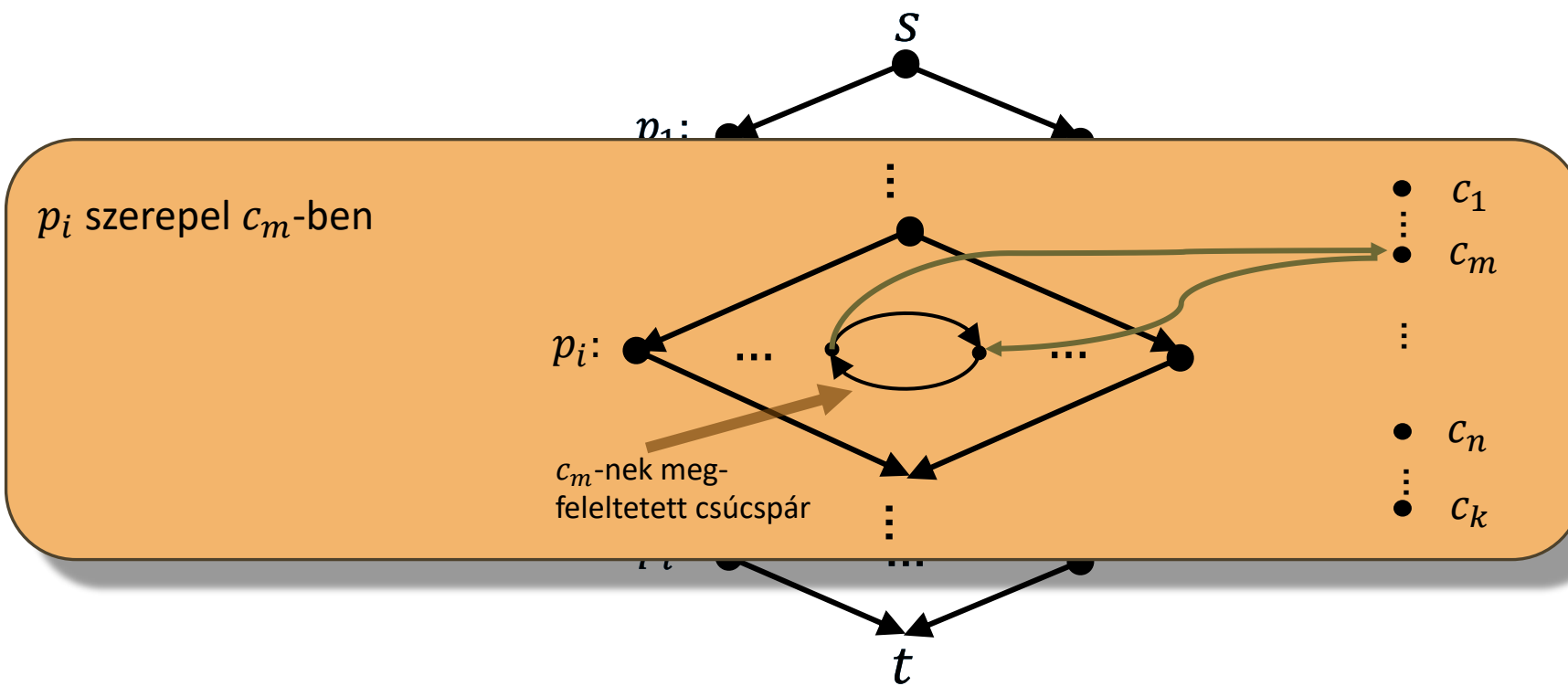
Legyen G_φ az alábbi gráf:



HAMILTON ÚT

Bizonyítás (folyt.)

Legyen G_φ az alábbi gráf:



HAMILTON ÚT

Bizonyítás (folyt.)

G_φ polinom időben megkonstruálható

Továbbá, belátható, hogy φ kielégíthető $\Leftrightarrow G_\varphi$ -ben van Hamilton-út s -ből t -be

- **Megjegyzés:**

- Minden s -ből t -be vezető u út meghatározza a φ -beli változók egy A értékadását:
- u egy p_i -nek megfelelő részgráf tetején pontosan akkor megy balra, ha $A(p_i) = 1$
- Ekkor $A \models \varphi \Leftrightarrow u$ Hamilton úttá alakítható

Konstruáljuk meg G_φ -t, ha $\varphi = (p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q)$

IRÁNYÍTATLAN HAMILTON ÚT

IRÁNYÍTATLAN HAMILTON ÚT (IHÚ)

- Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és $s, t \in V$
- Kérdés: Van-e G -ben s -ből t -be Hamilton-út?

IHÚ NP-teljes

Bizonyítás

Világos, hogy IHÚ is **polinom időben verifikálható**

Megmutatjuk, hogy **$HÚ \leq_p IHÚ$**

Tetszőleges G -re legyen $G' = (V', E')$ a következő gráf

- Minden $u \in V$ -re, $u_1, u_2, u_3 \in V'$
- Minden $u \in V$ -re, $\{u_1, u_2\}, \{u_2, u_3\} \in E'$
- Minden $(u, v) \in E$ -re, $\{u_3, v_1\} \in E'$

IRÁNYÍTATLAN HAMILTON ÚT

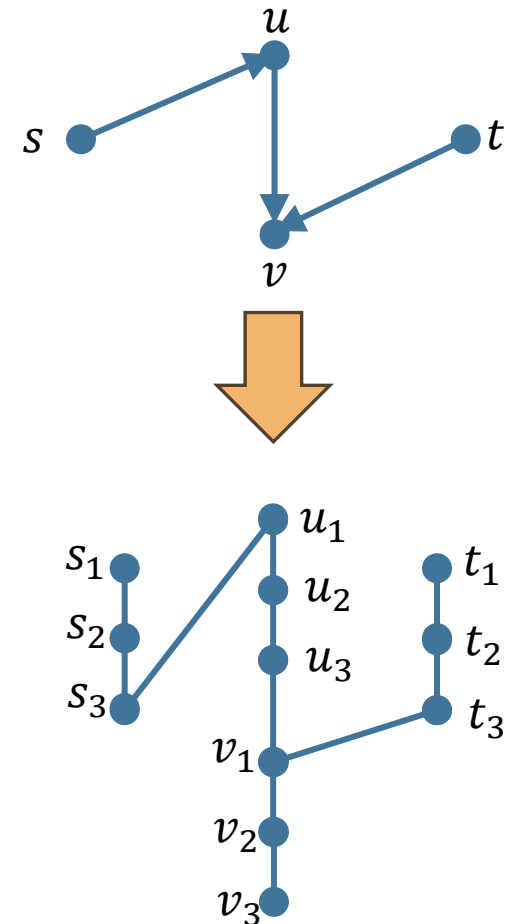
Bizonyítás (folyt.)

G' polinom időben megkonstruálható

Továbbá, belátható, hogy

G -ben van Hamilton-út s -ből t -be $\Leftrightarrow G'$ -ben van
Hamilton-út s_1 -ből t_3 -ba

- **Megjegyzés:** A csúcsok triplázása biztosítja G' -ben azt hogy a G -beli élek az irányításuk elvesztése után is pontosan akkor alkossanak Hamilton-utat, ha G -ben azt alkotnak



Feszítőfa keresése

Egy **G irányítatlan gráf feszítőfája** a G egy olyan fa részgráfja, ami a G összes csúcsát tartalmazza

- Feszítőfát keresni lehet **polinom időben**, pl. a Kruskal algoritmussal

Legyen **KORLÁTOZOTT FESZÍTŐFA** a következő probléma:

- Adott egy G irányítatlan gráf és egy K szám
- Döntsük el, hogy van-e G -nek olyan feszítőfája, melyben a csúcsok fokszáma legfeljebb K

KORLÁTOZOTT FESZÍTŐFA NP-teljes:

- **NP-beli:** a Turing-gép **nemdeterminisztikusan legenerálja** a G egy G' részgráfját (úgy, hogy minden csúcsot megtart), és **polinom időben ellenőrzi**, hogy G' összefüggő és körmentes-e (azaz fa gráf-e) valamint azt, hogy benne minden csúcs foka legfeljebb K -e

NP-nehéz, mert az **IRÁNYÍTATLAN HAMILTON-ÚT általánosítása:**

- Egy G gráfban egy olyan feszítőfa, melyben a csúcsok kifoka legfeljebb 2 nem más, mint egy Hamilton-út

IRÁNYÍTATLAN HAMILTON KÖR

IRÁNYÍTATLAN HAMILTON KÖR (IHK)

- Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf
- Kérdés: Van-e G -ben Hamilton-kör?

IHK NP-teljes

Bizonyítás

Világos, hogy IHK **polinom időben verifikálható**

Megmutatjuk, hogy **$IHÚ \leq_p IHK$**

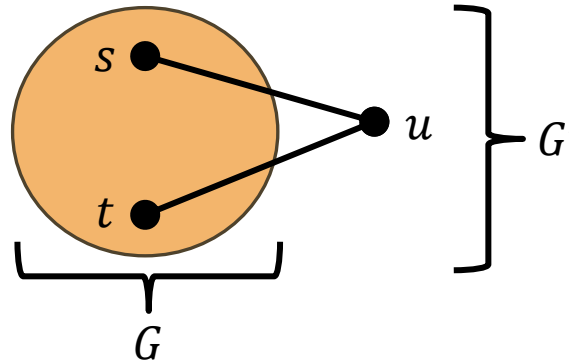
Tetszőleges G -re és $s, t \in V$ csúcsokra, legyen $G' = (V', E')$ a következő gráf

- $V' = V \cup \{u\}$, ahol u egy új, V -ben nem szereplő csúcs
- $E' = E \cup \{\{s, u\}, \{t, u\}\}$

IRÁNYÍTATLAN HAMILTON KÖR

Bizonyítás (folyt.)

A konstrukció szemléletesen:



Belátható, hogy G -ben pontosan akkor van Hamilton-út s -ből t -be, ha G' -ben van Hamilton-kör

UTAZÓÜGYNÖK

UTAZÓÜGYNÖK

- Adott: $G = (V, E)$ irányítatlan gráf az éleken pozitív egész súlyokkal és K természetes szám
- Kérdés: Van-e G -ben legfeljebb K súlyú Hamilton-kör?

UTAZÓÜGYNÖK NP-teljes

Bizonyítás

Világos, hogy UTAZÓÜGYNÖK **polinom időben verifikálható**

Észrevesszük, hogy az UTAZÓÜGYNÖK probléma bemenetét a következőképpen **megszorítva**:

- G minden élén 1 súly szerepel
- $K = |V|$
megkapjuk a HAMILTON KÖR problémát

Tehát HAMILTON KÖR az UTAZÓÜGYNÖK egy speciális esete, azaz ez utóbbi is **NP-nehéz**