

# NP-TELJES PROBLÉMÁK SZÁMOKRA

## RÉSZLETÖSSZEG probléma:

- Adott:  $a_1, \dots, a_n$  pozitív egészek és egy  $K$  szám
- Kérdés: Kiválasztható-e az  $a_i$ -k közül néhány úgy, hogy összegük  $K$  legyen?

Állítás: A RÉSZLETÖSSZEG probléma NP-teljes

Az NP-beliség világos, az NP-nehézséget a 3SAT-ról való visszavezetéssel igazoljuk

- Legyen  $\varphi = c_1 \wedge \dots \wedge c_n$  egy 3CNF,  $c_i = \ell_{i,1} \vee \ell_{i,2} \vee \ell_{i,3}$ , a  $\varphi$ -beli változók:  $x_1, \dots, x_m$

► Ebből elkészítjük a RÉSZLETÖSSZEG probléma egy példányát, melyben  $n + m$ -jegyű (!) számok szerepelnek.

►  $x_i$ -ből a  $t_i$  és  $f_i$  számok készülnek:

- ▷  $t_i$  és  $f_i$  első  $m$  jegye csupa 0, kivéve az  $i$ . jegyet, ami 1-es;
- ▷  $t_i$  utolsó  $n$  jegye közül az  $m + k$ . akkor 1-es, ha  $c_k$ -ban szerepel  $x_i$ , egyébként 0;
- ▷  $f_i$  utolsó  $n$  jegye közül az  $m + k$ . akkor 1-es, ha  $c_k$ -ban szerepel  $\neg x_i$ , egyébként 0.

► Továbbá,  $a_i = b_i = 0^{m+i-1}10^{n-i}$ , minden  $i = 1, \dots, n$  esetén

► Az eredmény: a  $\{f_i, t_i : 1 \leq i \leq m\} \cup \{a_i, b_i : 1 \leq i \leq n\}$  halmaz és a  $K = 11 \dots 133 \dots 3$  célszám ( $m$  darab 1-es, majd  $n$  darab 3-as).

# RÉSZLETÖSSZEG NP-TELJES

## Példa

Ha  $\varphi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \vee (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \vee (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_4)$ :

$t_1 = 1000110$	▶ $t_1$ és $f_1$ közül pontosan az egyiket kell válasszuk ( $K$ első jegye miatt);
$f_1 = 1000001$	▶ általában $t_i$ és $f_i$ közül is pontosan az egyiket – $t_i$ választása feleljen meg az $x_i = 1$ , $f_i$ választása az $x_i = 0$ értékadásnak;
$t_2 = 0100001$	
$f_2 = 0100110$	
$t_3 = 0010100$	▶ ezzel az $m + j$ . jegyek mindegyike 0, 1, 2 vagy 3 lesz $j = 1, \dots, n$ -re, annak függvényében, hogy $c_j$ -ben 0, 1, 2 vagy 3 literál vált igazzá;
$f_3 = 0010000$	
$t_4 = 0001010$	
$f_4 = 0001001$	▶ ha az $m + j$ . jegy 3, akkor jó, ha 2, akkor válasszuk ki még mondjuk $a_j$ -t, ha 1, akkor $a_j$ -t és $b_j$ -t is, ha 0, akkor nem tudjuk ezen a jegyen elérni a célszámot
$a_1 = b_1 = 0000100$	
$a_2 = b_2 = 0000010$	
$a_3 = b_3 = 0000001$	
$K = 1111333$	

# NP-TELJES PROBLÉMÁK SZÁMOKRA

## HÁTIZSÁK probléma:

- Adott:  $N$  elem mindegyikének  $w_i$  súlya és  $c_i$  értéke, valamint  $W$  és  $C$
- Kérdés: Kiválasztható-e ismétlés nélkül néhány elem úgy, hogy összértékük  $\geq C$  és összsúlyuk  $\leq W$ ?

**Állítás:** A HÁTIZSÁK probléma **NP-teljes**. Az NP-beliség világos, és nehéz, mert a RÉSZLETÖSSZEG általánosítása

- **Ötlet:** A RÉSZLETÖSSZEG problémában az  $a_i$  értékekből rendre készítsünk egy tárgyat  $w_i = c_i = a_i$  súllyal és értékkel, továbbá legyen  $C = W = K$ , a célszám

**Algoritmus** a HÁTIZSÁK megoldására (az optimalizálási verzióra):

A következő rekurzív összefüggéssel számítható  $T[i, w]$ , ami a legfeljebb az első  $i$  tárgy felhasználásával egy  $w$  kapacitású hátizsákkal elérhető maximális haszon:

$$T[i, w] = \begin{cases} 0 & \text{ha } i = 0 \\ T[i - 1, w] & i > 0, w < w_i \\ \max\{T[i - 1, w], c_i + T[i - 1, w - w_i]\} & i > 0, w \geq w_i \end{cases}$$

Ez ad egy  $\mathcal{O}(N \cdot W)$  időigényű algoritmust, ami **nem** polinom, mert az input mérete  $n = N(\log w_i + \log c_i) + \log W$ .

dinamikus programozás

# HÁTIZSÁK PROBLÉMA

Felfoghatjuk úgy is, hogy az algoritmusunk akkor polinomidejű, ha az inputban a súlyokat **unárisan reprezentáljuk**, vagy ha a súlyok a tárgyak számának egy polinomjával korlátozhatóak. Ez vezet el az algoritmikus bonyolultságelméletben a **pszeudopolinomialitás fogalmához**:

Legyen  $A$  egy probléma.

Egy  $A$ -t eldöntő algoritmus **pszeudopolinomiális**, ha tetszőleges  $(a_1, \dots, a_m)$  inputon a futásideje  $\mathcal{O}\left(\left(\sum_{1 \leq i \leq m} a_i\right)^k\right)$ , valamely konstans  $k$ -ra.

Emlékezzünk vissza: az input **mérete**  $\sum_{1 \leq i \leq m} \log a_i$  volt!  
tehát nem az input **méretéhez képest**, hanem az input **értékéhez képest** kell polinom legyen.

Ha egy **NP**-teljes probléma eldönthető pszeudopolinomiális algoritmussal, úgy **gyengén NP-teljesnek**, ha pedig unáris változata is **NP**-teljes, akkor **erősen NP-teljesnek** nevezzük.

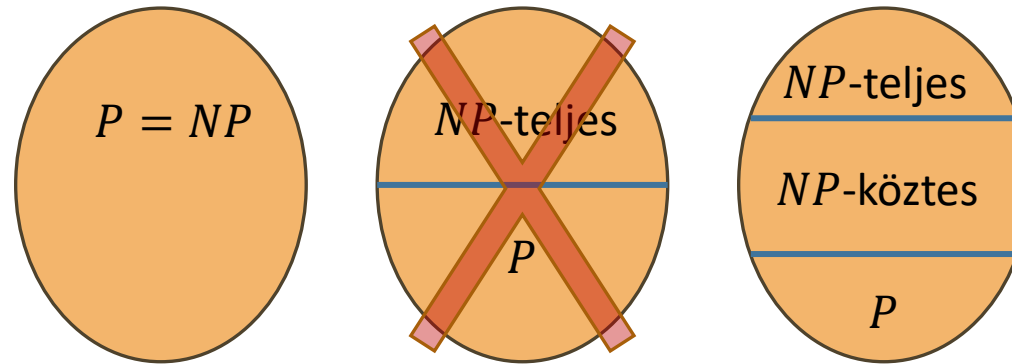
**Unáris változat:** amikor a számok unárisan jönnek be az inputra, pl a 4-et 1111 ábrázolja

Ha egy erősen **NP**-teljes problémára van pszeudopolinomiális algoritmus, akkor **P = NP**.

hiszen unáris számábrázolásnál a polinomiális algoritmus ugyanaz, mint a pszeudopolinomiális: méret=érték



# A $P$ és $NP$ osztályok lehetséges viszonyai



Ha  $P \neq NP$ , akkor van olyan  $L \in NP$ , hogy  $L \notin P$  és  $L$  nem  $NP$ -teljes (azaz  $L$  ún.  **$NP$ -köztes**)

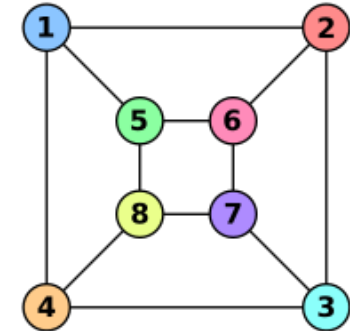
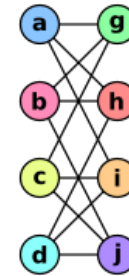
Mivel feltehetően  $P \subsetneq NP$ , valószínűleg van olyan probléma, ami nem oldható meg hatékonyan, de nem is a „legnehezebben megoldható”  $NP$ -beli problémák közé tartozik

# Potenciális NP-köztes problémák

## GRÁF IZOMORFIZMUS probléma:

- Adottak  $G_1$  és  $G_2$  irányítatlan gráfok
- Kérdés: Izomorfak-e?

Példa izomorf gráfokra (forrás: Wikipédia)



## FAKTORIZÁLÁS-E probléma:

- Adottak  $N, K > 0$  egészek
- Kérdés: Van-e  $N$ -nek  $K$ -nál kisebb prímosztója?

- Ezek a problémák NP-beliek, de egyikről sem ismert, hogy P-beli vagy NP-nehéz lenne
- Az a sejtés, hogy **NP-köztesek**

# Az NP és coNP osztályok

Ha  $\mathbb{C}$  problémák egy osztálya, akkor  $\text{co}\mathbb{C} := \{\bar{L} \mid L \in \mathbb{C}\}$  (itt  $\bar{L}$  az a probléma melynek egy  $w$  bemenete pontosan akkor pozitív bemenete  $\bar{L}$ -nek, ha  $w$  negatív bemenete  $L$ -nek)

## coNP-teljes problémák:

- $\text{KIELÉGÍTHETETLENSÉG} = \overline{\text{ÁLT-SAT}}$ 
  - Adott egy  $\varphi$  ítéletkalkulusbeli formula
  - Kérdés: **kielégíthetetlen-e**  $\varphi$ ?
- $\overline{\text{HAMILTON-ÚT}}$ 
  - Adott egy  $G$  irányított gráf és  $s, t$  csúcsai
  - Kérdés: igaz-e, hogy **nincs Hamilton-út**  $s$ -ből  $t$ -be?

coNP tartalmazza a polinomidőben cáfolható problémákat

# Az NP és coNP osztályok

Legyen  $\mathbb{C}$  problémák egy osztálya.  $\mathbb{C}$  **zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve**, ha tetszőleges  $L_2 \in \mathbb{C}$  és  $L_1$  problémák esetén,  $L_1 \leq_p L_2$ -ből következik, hogy  $L_1 \in \mathbb{C}$

Korábbi tételünk alapján P és NP zártak a polinom idejű visszavezetésre nézve

Ha  $\mathbb{C}$  zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve, akkor  $\text{co}\mathbb{C}$  is zárt

- Legyen  $L_2 \in \text{co}\mathbb{C}$  és  $L_1 \leq_p L_2$
- Akkor  $\overline{L_2} \in \mathbb{C}$  és  $\overline{L_1} \leq_p \overline{L_2}$  (mert  $\text{coco}\mathbb{C} = \mathbb{C}$ )
- Amiből  $\overline{L_1} \in \mathbb{C}$  (mert  $\mathbb{C}$  zárt)
- És így  $L_1 \in \text{co}\mathbb{C}$  (mert  $\overline{L_1}$  komplementere az  $L_1$ )

**Következmény:** coNP is zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve



# Az NP és coNP osztályok

Egy  $L$  nyelv akkor és csak akkor  $\mathbb{C}$ -teljes, ha  $\bar{L}$  co $\mathbb{C}$ -teljes

- Elég az egyik irányt belátni: tegyük fel, hogy  $L$   $\mathbb{C}$ -teljes
- Akkor minden  $\mathbb{C}$ -beli visszavezethető rá polinom időben
- Akkor minden co $\mathbb{C}$ -beli visszavezethető  $\bar{L}$ -re polinom időben, azaz  $\bar{L}$  co $\mathbb{C}$ -teljes

**Következmény:**

KIELÉGÍTHETETLENSÉG, ÉRVÉNYESSÉG =  $\{\langle \varphi \rangle \mid \varphi \text{ érvényes zérusrendű formula}\}$  és

HAMILTON-ÚT **coNP-teljesek**

- Triviálisan  $\text{KIELÉGÍTHETETLENSÉG} \leq_p \text{ÉRVÉNYESSÉG}$

- Az a sejtés, hogy  $\text{NP} \neq \text{coNP}$
- Viszont ha egy coNP-teljes problémáról kiderül, hogy NP-beli vagy egy NP-teljesről az, hogy coNP-beli, akkor  $\text{NP} = \text{coNP}$ 
  - Azért, mert mindkét osztály zárt a polinom idejű visszavezetésre nézve

# Tárbonyolultság

---

A **tárbonyolultság** vizsgálatához ún. **off-line Turing-gépeket** használunk:

- A bemenetet csak olvassa
- A kimenetet csak írja
- A felhasznált tárba csak a munkaszalagokon felhasznált cellák száma számít bele

- Off-line Turing-gépek használatával **szublineáris tárbonyolultságnak** is van értelme
- A tár újra felhasználható

# Tárkonyolultság

---

**PSPACE**-szel jelöljük a

- **polinom tárral**
- **determinisztikus** Turing-géppel eldönthető problémák osztályát

**NPSPACE**-szel jelöljük a

- **polinom tárral**
- **nemdeterminisztikus** Turing-géppel eldönthető problémák osztályát

Triviálisan:  $PSPACE \subseteq NPSPACE$  és  $NP \subseteq NPSPACE$

Később látni fogjuk, hogy  $PSPACE = NPSPACE$  és az a **sejtés**, hogy  $NP \subset PSPACE$

# Savitch tétele

**Savitch tétele:** Ha  $f(n) \geq \log n$  és az  $L$  probléma eldönthető  $f(n)$  tárbonyolultságú nemdeterminisztikus Turing-géppel, akkor  $L$  eldönthető  $f^2(n)$  tárbonyolultságú (determinisztikus) Turing-géppel

## Bizonyítás

Először definiálunk egy speciális **elérhetőségi problémát** gráfokban:

Legyen  $G = (V, E)$  egy irányított gráf,  $n = |V|$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $u, v \in V$ , és tekintsük a következő Boole-függvényt:

$\text{MAXELÉR}(G, u, v, i) = \text{igaz} \Leftrightarrow G\text{-ben van legfeljebb } i \text{ hosszú út } u\text{-ból } v\text{-be}$

- $\text{MAXELÉR}(G, u, v, i)$  kiszámítható egy  $O(\log^2 n)$  **tárigényű**  $N$  (determinisztikus) Turing-géppel:
- $\text{MAXELÉR}(G, u, v, i) = \text{igaz} \Leftrightarrow$  ha  $i = 1$  és  $u = v$  vagy  $(u, v) \in E$  VAGY  $i > 1$  és

$$\exists w \in V: \text{MAXELÉR}\left(G, u, w, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right) = \text{igaz} \wedge \text{MAXELÉR}\left(G, w, v, \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor\right) = \text{igaz}$$

- A számításhoz  $N$ -nek legfeljebb  $\log n$  **mélységű rekurziót** kell alkalmaznia, és a rekurzió minden szintjén  $O(\log n)$  **méretű adatot** kell eltárolnia
- Tehát  $N$  tárigénye  $O(\log^2 n)$

Egy  $u$ -ból  $v$ -be tartó út hossza az úton szereplő élek száma

# Savitch tétele

Bizonyítás (folyt.)

Ezek után a tétel bizonyítása:

- Legyen  $M$  egy  $f(n)$  tárigényű nemdeterminisztikus Turing-gép és  $w$  az  $M$  egy  $n$  hosszú bemenete
- Ekkor az  $M$  konfigurációs gráfjának a mérete  $w$ -n  $2^{df(n)}$  egy alkalmas  $d$  konstansra
- Jelöljük ezt a gráfot  $G_M$ -mel
- $G_M$ -ben kell keresni egy legfeljebb  $2^{d \cdot f(n)}$  hosszú utat a  $c_{kezdő}$  kezdő és a  $c_{elfogadó}$  elfogadó konfiguráció között
- Azaz az  $N$  Turing-géppel ki kell számolni az  $\text{MAXELÉR}(G_M, c_{kezdő}, c_{elfogadó}, 2^{d \cdot f(n)})$  értékét
- Láttuk, hogy ez kiszámolható  $O\left((\log 2^{d \cdot f(n)})^2\right) = O(f^2(n))$  tárigénnyel

$M$  konfigurációs gráfja  $w$ -n:

- A csúcsai  $M$  lehetséges konfigurációi  $w$ -n
- A gráfban egy  $C_1$  csúcsból pontosan akkor vezet egy  $C_2$  csúcsba él ha  $C_1 \Rightarrow C_2$

Következmény: PSPACE = NPSPACE

# PSPACE-teljes problémák

QBF:

QBF mint quantified Boolean formula

Adott egy  $\varphi$  prenex alakú zárt Boole formula

Kérdés: Igaz-e  $\varphi$ ?

$\exists X \forall Y \exists Z ((X \vee Y) \wedge (Y \vee Z) \wedge (\neg Y \vee \neg Z))$  igaz

$\exists X \forall Y ((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee \neg Y))$  nem igaz

- Szokás a QBF-nek egy **megszorított változatát tekinteni**:  $\varphi$ -ben a kvantorok alternálnak, az első és utolsó kvantor pedig  $\exists$
- Ilyen bemenetekre a QBF felfogható kétszemélyes játékként:
  - Az első játékos választja a páratlan változók értékét, és célja a formula igazzá tétele
  - a második választja a páros változókét, és célja a form $\varphi$  **pontosan akkor igaz, ha az első játékosnak van nyerő stratégiája** ula hamissá tétele
- Ilyenkor ebben a játékban

QBF PSPACE-teljes (a kétszemélyes játék változata is)



# QBF PSPACE-teljes

## Bizonyítás

Csak azt mutatjuk meg, hogy  $QBF \in PSPACE$

- Az alábbi  $A$  algoritmus QBF-et dönti el:
  - Egy  $\varphi$  QBF bemenetre
    - Ha  $\varphi$ -ben nincs kvantor, akkor **értékeljük ki**: ha  $\varphi$  igaz, akkor a kimenetre: *igen*, egyébként a kimenetre: *nem*
    - Ha  $\varphi = \exists X\psi$ , akkor **rekurzívan hívjuk meg  $A$ -t  $\psi$ -re**  $X = igaz$  és  $X = hamis$  értékekkel is; Ha **valamelyik** esetben *igen* a kimenet, akkor a kimenetre: *igen*, egyébként a kimenetre: *nem*
    - Ha  $\varphi = \forall X\psi$ , akkor **rekurzívan hívjuk meg  $A$ -t  $\psi$ -re**  $X = igaz$  és  $X = hamis$  értékekkel is; Ha **mindkét** esetben *igen* a kimenet, akkor a kimenetre: *igen*, egyébként a kimenetre: *nem*
  - $A$  tárigénye:
    - A rekurzió **mélysége**: változók száma
    - **Egy szinten tárolandó adat**: egy változó igazságértékei
    - Az **összes tárigény lineáris**  $\varphi$  változóinak számában

# FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes

## FÖLDRAJZI JÁTÉK (FJ)

- Adott egy  $G = (V, E)$  irányított gráf és  $p \in V$
- Kérdés: Van-e nyerő stratégiája a kezdő játékosnak az alábbi játékban:
  - Két játékos felváltva jelöli meg  $p$ -ből kiindulva  $G$  csúcsait úgy, hogy a következő játékos mindig csak egy a legutoljára megjelölt csúcsból elérhető még meg nem jelölt csúcsot választhat
  - Az veszít aki nem tud újabb csúcsot megjelölni

## FJ PSPACE-teljes

### Bizonyítás

## FJ $\in$ PSPACE

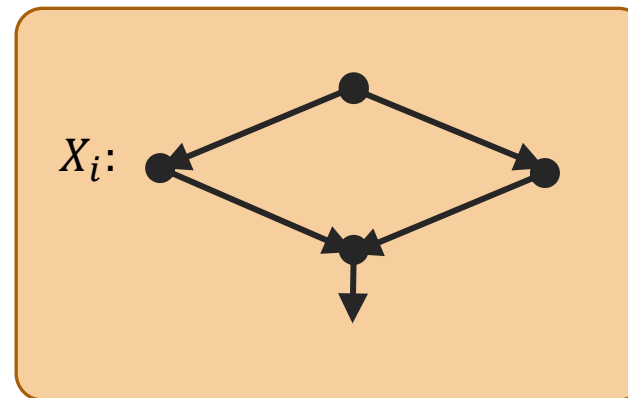
- Hasonlóan látható be, mint QBF esetében

# FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes

Bizonyítás (folyt.)

FJ PSPACE-nehéz:

- Polinom időben visszavezetjük rá QBF-et
- Legyen
  - $\varphi = \exists X_1 \forall X_2 \dots \forall X_{k-1} \exists X_k \psi$ , ahol  $\psi = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$
- (QBF ilyen alakú bemenetekre megszorítva is PSPACE-teljes)
- Konstruáljuk meg  $G_\varphi$ -t a következőképpen
  - Minden  $X_i$ -hez elkészítünk egy részgráfot:

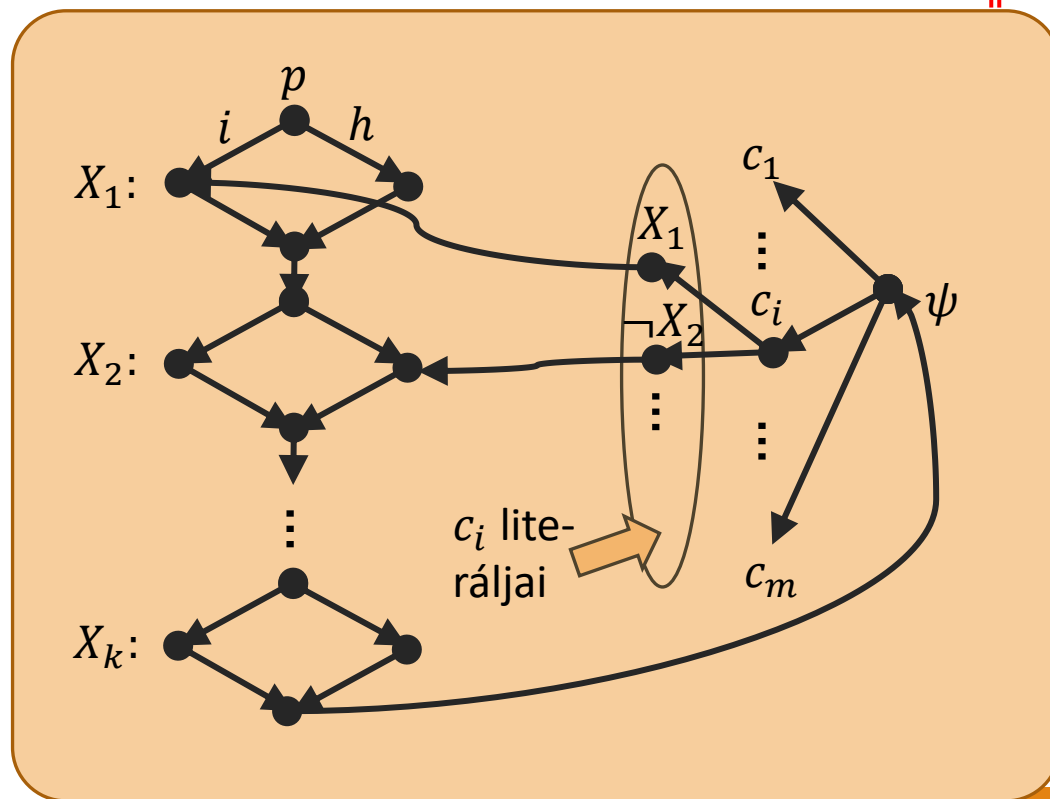


# FÖLDRAJZI JÁTÉK PSPACE-teljes

## Bizonyítás (folyt.)

Legyen  $G_\varphi$  az ábrán látható gráf

- A konstrukció polinom időben elvégezhető és választartó: belátható, hogy  $\varphi$  igaz  $\Leftrightarrow G_\varphi$ -ben van nyerő stratégiája a kezdő játékosnak
- játékosoknak csak követniük kell a másik játékban való nyerő stratégiájukat (ha van):
- $X_i$  igazzá tételének az felel meg, hogy a gráf megfelelő rombuszában balra kell menni, a hamissá tételének meg az, hogy jobbra
- Mindig az egyes választja az utolsó változó értékét illetve ennek megfelelően az utolsó rombusz bal vagy jobb oldali csúcsát
- Ezért az egyes választja a  $\psi$ -t, majd a kettes választ egy olyan csúcsot (klózt), amit reményei szerint sikerült hamissá tennie
- Ha egyesnek van nyerő stratégiája, akkor mindig tud választani egy olyan literált, amit a kettes által választott klózban is sikerült igazzá tennie
- Ekkor kettes nem tud olyan csúcsot választani, ami még nem volt választva ...



# Az L és NL osztályok

L: **determinisztikus** Turing-géppel **logaritmikus tárral** megoldható problémák osztálya

NL : **nemdeterminisztikus** Turing-géppel **logaritmikus tárral** megoldható problémák osztálya

Triviálisan  $L \subseteq NL$ , de az a **sejtés**, hogy a tartalmazás **valódi**

- Egy  $K_1$  nyelv **logaritmikus tárral visszavezethető** egy  $K_2$  nyelvre (jele:  $K_1 \leq_l K_2$ ), ha a  $K_1 \leq K_2$  visszavezetés kiszámítható **logaritmikus táras** determinisztikus (off-line) Turing-géppel
- Egy  $K$  nyelv **NL-nehéz** (a log. táras visszavezetésre nézve), ha minden  $K' \in NL$  nyelvre,  $K' \leq_l K$
- Az  $K$  nyelv **NL-teljes**, ha  $K$  NL-nehéz és  $K \in NL$  is teljesül

L zárt a logaritmikus tárral való visszavezetésre

Következmény: Ha egy  $K$  nyelv NL-teljes és  $K \in L$ , akkor  $L = NL$

# Az L és NL osztályok

Az **ELÉR** probléma: Adott  $G = (V, E)$  irányított gráf és  $s, t \in V$

**Kérdés:** Van-e  $G$ -ben út  $s$ -ből  $t$ -be?

ELÉR NL-teljes

Bizonyítás

ELÉR  $\in$  NL

- Legyen  $M$  egy nemdeterminisztikus Turing-gép ami adott  $G = (V, E)$  gráfra és  $s, t \in V$  csúcsokra a következőt teszi:
  - Ráírja  $s$ -t a második szalagra
  - Ráírja a 0-t a harmadik szalagra
  - Amíg a harmadik szalagon  $|V|$ -nél kisebb szám van
    - Legyen  $u$  a második szalagon lévő csúcs
    - Nemdeterminisztikusan felír  $u$  helyére egy  $u$ -ból elérhető  $v$  csúcsot a második szalagra
    - Ha  $v = t$ , akkor elfogadja a bemenetet, egyébként növeli a harmadik szalagon lévő számot binárisan eggyel
  - Elutasítja a bemenetet
- Belátható, hogy  $M$   $O(\log |V|)$  tárral eldönti, hogy van-e út  $s$ -ből  $t$ -be



# Az L és NL osztályok

## Bizonyítás (folyt.)

### ELÉR NL-nehez

- Legyen  $K$  egy NL-beli nyelv; megmutatjuk, hogy  $K \leq_l \text{ELÉR}$ 
  - Legyen  $M$  egy  $K$ -t eldöntő  $O(\log n)$  táras nemdeterminisztikus Turing-gép és legyen  $u$  az  $M$  egy  $n$  hosszú bemenete
  - Akkor  $M$  egy konfigurációja  $c \cdot \log n$  méretű valamely alkalmas  $c$  konstansra
  - Legyen  $G$  az  $M$  konfigurációs gráfja az  $u$ -n
  - Legyen  $s$  és  $t$  rendre az  $M$  kezdő- és elfogadó konfigurációja az  $u$ -n
- Ekkor  $u \in L(M) \Leftrightarrow G$ -ben van út  $s$ -ből  $t$ -be, tehát  $G$  megkonstruálása nem más, mint  $K$  visszavezetése ELÉR-re
- Ez a visszavezetés **logaritmikus tárral** kiszámítható
  - **Lexikografikusan** soroljuk fel az összes  $c \cdot \log n$  hosszú szót
    - teszteljük, hogy ez legális konfigurációja-e  $M$ -nek, ha igen, akkor a **kimenetre írjuk**, mint a  $G$  egy csúcsát
    - Az élek (konfiguráció párok) hasonlóképpen felsorolhatók, tesztelhetők és a kimenetre írhatók

# Az L és NL osztályok

## Következmények:

- Ha  $ELÉR \in L$ , akkor  $L = NL$
- $ELÉR$  eldönthető  $O(\log^2 n)$  tárral determinisztikusan
- $NL \subseteq P$

Korábban kimondtuk, hogy ha egy NL-teljes problémáról kiderül, hogy L-beli, akkor  $L = NL$

$ELÉR \in NL$  azt jelenti, hogy  $ELÉR$  eldönthető  $O(\log n)$  tárral nemdeterminisztikusan; alkalmazzuk Savitch tételét!

## Bizonyítás (vázlat)

- Legyen  $K \in NL$  és  $M$  egy  $K$ -t felismerő **logaritmikus táras** Turing-gép
- Legyen  $w$  az  $M$  egy  $n$ -hosszú bemenete
- $M$  konfigurációs gráfja a  $w$ -n **polinom méretű**, polinom időben megkonstruálható, és
- ebben a gráfban kell keresni utat a kezdőkonfigurációból az elfogadóba (feltehetjük, hogy egy elfogadó konfiguráció van)
- Ez polinom idő alatt elvégezhető (pl. Dijkstra algoritmus)

# Az L és NL osztályok

**Immerman-Szelepcsényi tétel:**  $NL = coNL$

- Tehát az is eldönthető konstans sok csúcs tárolásával, hogy egy csúcsból **nem érhető el** egy másik csúcs
- Ez meglepő, hiszen látszólag ehhez el kellene tárolni a gráf már bejárt részét
- A nemdeterminizmus ügyes alkalmazásával ez nem szükséges

$L \subseteq NL = coNL \subseteq P \subseteq NP \subseteq PSPACE \subseteq EXPTIME$

- EXPTIME az **exponenciális időben** megoldható problémák osztálya

Ismert, hogy  $NL \subset PSPACE$  és  $P \subset EXPTIME$

Az a sejtés, hogy minden tartalmazás valódi

A tanult (és egyéb) osztályok feltehető viszonyai

